Mathématica TD 4

Le texte écrit en police `Typewriter` correspond au langage mathématica
1. Taper $nn = 4$

On note, pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(z)$ l'algorithme suivant :
$n = 0, u = z$ (initialisation)
tant que $n < nn$,

> Si $|u| > 2, n = nn + 1$
> sinon $u \leftarrow u^2 + z$ et $n \leftarrow n + 1$

Résultat de $\mathcal{A}(z)$: n

On note $f(z)$ le résultat de l'algorithme $\mathcal{A}(z)$

2. Sans mathématica : que vaut $f(0)$? $f(-2)$? $f(2)$? D'une façon générale, quelles sont les valeurs possibles de $f(z)$?
Que vaut $f(z)$ si $|z| > 2$?

3. Programmer la fonction f comme suit et vérifier vos réponses :
`f[z_]:=Module[{n=0,u=z},...`
Le module de u, $|u|$, est noté `Abs[u]`

Soit $z \in \mathbb{C}$, on note (u_n) la suite définie par : $\left\{ \begin{array}{c} u_0 = z \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + z \end{array} \right.$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 2$, $\mathcal{F}$ s'appelle la fractale de Mandelbrot, on l'approxime par l'ensemble $\mathcal{G}$ des nombres complexes z tels que pour tout entier naturel $n \leq nn, |u_n| \leq 2$

4. On note I, à la place de i, le nombre complexe vérifiant $\mathrm{Re}(I) = 0$ et $\mathrm{Im}(I) = 1$. Renvoyer la liste $\mathcal{M}$ des points de coordonnées (i, j) tels que $i + Ij \in \mathcal{G}$, i et j variant de -2 à 2 par pas de 0.05 : vous ferez donc deux boucles `Do`, à la fin de votre programme, vous taperez :

```
{i,-2,2,0.05}];
Print[j],
{j,-2,2,0.05}]
```

5. Tracer la liste $\mathcal{M}$ en utilisant `ListPlot`
6. Améliorer le programme précédent pour accélerer les calculs en tenant compte du fait que si $|i + jI| > 2$ alors $(i, j) \notin \mathcal{M}$

7. Remplacer nn par 80 dès le départ, faire varier i et j de -2 à 2 par pas de 0.005 en utilisant la question précédente et tracer $\mathcal{M}$, vous utiliserez
`PlotStyle->{PointSize[0.0005],Black}` en option

8. Reprendre la question 7 en tapant `Timing` autour des boucles `Do` selon le modèle :

```
Timing[
Do[
...
]
]
```

9. Aller voir la fractale de Mandelbrot sur internet à l'adresse $http://www.syti.net/Fractals.html$ et cliquer sur l'image pour faire des zooms
Aller voir à d'adresse $http://www.youtube.com/watch?v = G\_GBwuYuOOs$ à la maison : vous verrez un zoom en vidéo de la fractale de Mandelbrot

Les fractales de Julia

A chaque valeur du nombre complexe c on associe une fractale de Julia différente, notée J_c. La construction de J_c est très proche de celle de la fractale de Mandelbrot : à chaque valeur du nombre complexe z, on associe la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = z \\ u_{n+1} = u_n^2 + c \end{cases}$$

z appartient à J_c si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 2$

10. Tracer l'ensemble de Julia pour les valeurs de c suivantes : $c = -0.0519 + 0.688i$, $-0.577 + 0.478i, -0.181 - 0.667i, -0.0958 + 0.735i, -0.382 + 0.147i$

Remarquer que certains ensembles de Julia sont d'un seul morceau et d'autre non, on a le résultat suivant : J_c est d'un seul morceau ssi c appartient à la fractale de Mandelbrot

11. Reprendre la question 7 en utilisant la commande `Compile` pour accélerer les calculs de la fractale de Mandelbrot au moment où vous définissez la fonction f (aller dans l'aide de Mathematica) et comparer les temps d'execution