

Quelques calculs

1. Pourquoi l'expression $E^{(i \text{ Pi})}$ ne s'évalue-t-elle pas ?
2. Prévoir comment les expressions suivantes seront évaluées, et vérifier !

$$\begin{aligned} &5/2 - 0.5 \quad ; \quad \text{Pi}/2 \quad ; \quad (I + 1)/(I - 1) \quad ; \quad \text{Sin}[\text{Pi}/2 - 1] \\ &\text{Sin}'[\text{Pi}/2 - 1] \quad ; \quad a + b/c \quad ; \quad a/b * c \quad ; \quad 3/2 + \text{Pi} \\ &1.5 + \text{Pi} \quad ; \quad \text{N}[\text{Pi}, 35] \quad ; \quad \text{N}[\text{Sqrt}[1 + I]] \end{aligned}$$

3. Prévoir l'évaluation de $\text{N}[10^{(-20)+1}]$, puis celle de $\text{N}[10^{(-20)+1}, 50]$.
4. Calculer e^2 , π et $\ln(2)$ avec 25 chiffres significatifs.
5. Parmi les fractions $7/5$, $141/100$, $707/500$ quelle est celle qui approche le mieux $\sqrt{2}$?

Simplifier (À l'aide de la fonction `Simplify` ou `FullSimplify`)
Simplifier les expressions suivantes

$$\begin{aligned} &\frac{1-x^2}{1-x} \quad ; \quad \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)} \quad ; \quad \cos^2 x - \sin^2 x \\ &\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-13+5\sqrt{17}}{2}} \quad ; \quad 1/(1+1/(1+1/x)) \end{aligned}$$

Remarque : On peut imposer à *Mathematica* certaines conditions pour l'éventuelle simplification d'une expression. La syntaxe est alors `Simplify[expression, condition]`. Ainsi `Simplify[Sqrt[x^2], x<0]` donne $-x$
`Simplify[Cos[n*Pi], n ∈ Integers]` donne $(-1)^n$

Factoriser, développer (`Factor`, `Expand`, `FactorInteger`)

1. Factoriser les polynômes

$$x^2 - (a+b)x + ab \quad ; \quad x^4 - y^4$$

2. Décomposer 123456789 en facteurs premiers.
3. Développer les expressions

$$\frac{x^3(y-z)^2 + y^2(-x+z)}{x(y-z)} \quad ; \quad (x+y)^4$$

Complexes (`ComplexExpand`)

1. Écrire les complexes suivants sous forme algébrique (i.e. sous la forme $a + ib$) :

$$e^{i\pi/4}, \quad e^{i\pi/3}/(2i)$$

2. Comparer les entrées suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{Re}[x + I * y], \text{Re}[\text{ComplexExpand}[x + I y]] \\ &\text{et } \text{ComplexExpand}[\text{Re}[x + I y]]. \end{aligned}$$

3. Calculer $\sqrt{e^{-i\pi/2}}$. On mettra le résultat sous forme $a + ib$, en précisant comment *Mathematica* définit \sqrt{z} pour un nombre complexe z .
4. Les variables x et y désignant des réels, déterminer les parties réelles et imaginaires de $\frac{5+x+iy}{-3i+x+iy}$.

Résoudre (`Solve`)

1. Résoudre $8x + 3 = 0$, puis $8x + 3. = 0$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue x , et de paramètre θ : $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = 0$.
3. Résoudre le système d'inconnue (x, y) et de paramètre a

$$\begin{cases} ax - y = 1 \\ -x + ay = 0 \end{cases}.$$
Le résultat est-il valable pour toute valeur de a ?

Graphiques (Plot, ParametricPlot)

(Il est indispensable d'avoir un oeil critique sur les images obtenues)

1. On considère l'expression polynômiale suivante

$$x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$

- (a) Définissez la fonction $f(x)$ égale à cette expression.
 - (b) Évaluer $f(0.5)$, $f(\sqrt{2})$, $f(z^2)$.
 - (c) Construisez un tableau de valeurs de la fonction $f(x)$ pour les valeurs $x = 0.1, 0.2, \dots, 1$. (Table)
 - (d) Factoriser ce polynôme.
 - (e) Tracez le graphe de cette fonction pour $0.9 \leq x \leq 6.1$.
2. Tracer sur la même figure les courbes représentatives des fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^4, \quad g(x) = 2^x$$

afin d'étudier le nombre points d'intersection des deux courbes.

(la réponse est 3)

3. Tracer le graphe de $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$.
4. Représenter la courbe d'équation cartésienne

$$(2x^2 + xy - 1)^2 = (2x^2 - 1)^2(1 - x^2).$$

5. Tracer la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) + \sin(t) \\ y(t) = \sin^3(t) + \cos(t) \end{cases}.$$

Calcul de limite. Dériver. Intégrer

1. À l'aide *Mathematica*, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(1/x).$$

2. Calculer la dérivée de la fonction tangente.
3. Calculer la dérivée par rapport à x de $\frac{x^2+y^2}{xy}$.
4. Déterminer une expression simple de la dérivée 5^e de $x \mapsto x \exp(1/x)$.
5. Calculer la dérivée seconde par rapport à t de $\frac{x}{\exp(y(a-t))}$ et vérifier qu'elle vaut xy^2 en a .
6. À l'aide de *Mathematica*, retrouver les règles de dérivation du produit ou du quotient de deux fonctions.
7. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto x^2 \sin(x) \exp(x)$.
8. On souhaite « approcher au voisinage de 0 » la fonction cos par une fonction de type $x \mapsto \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en choisissant de bonnes valeurs pour a et b . Pour cela on s'attachera à faire coïncider le plus grand nombre de dérivées $k^{\text{ième}}$ en 0 pour $k = 0, 1, 2, \dots$. Déterminer les bonnes valeurs de a et de b , puis tracer sur un même graphe les deux fonctions autour de zéro.