**Deux fonctions** *Mathematica* **:** `Map, Apply`.

La fonction `Map` applique une `fonction` à chaque élément d'une `liste` en suivant la syntaxe
`Map[fonction,liste]`.
Évaluer les entrées suivantes :

```
Map[Cos,{Pi,1.2,a}]
Map[f,{1,1.5,x}]
```

Un écriture abrégée de `Map[fonction,liste]` est `fonction /@ liste`
Évaluer les entrées suivantes :

```
First /@ {{a,b},{c,d,e}}
f /@ Table[k^2,{k,1,4}]
Expand /@ Table[(1+x)^k,{k,1,4}]
```

Cette fonction `Map` opère de la même façon sur toute expression qui n'est pas une liste. L'évaluation `Map[f,expr]` applique ainsi la fonction `f` aux arguments de l'expression `expr`. Autrement dit `Map[f,expr]` opère indépendamment de la *tête* de l'expression `expr`.

```
Clear[f,g]; Map[f,g[x,y,z]]
 f /@ Sum[x^k,{k,1,5}]
 Log[#]/#& /@ {1,a,x,E}
```

La fonction `Apply` permet de substituer la tête d'une expression en écrivant : `Apply[nouvelle_tête,expression]` et une écriture abrégée de `Apply[nouvelle_tête,Expression]` est :
`nouvelle_tête @@ expression`.
Évaluer les entrées suivantes :

```
Apply[Plus,{1,a,-2,b}]
Times @@ (a+b+c)
Times @@ (a+1+2)
f @@ g[x]
```

1. Construire une fonction qui calcule la moyenne des éléments d'une liste.
2. On appelle *nombre d'Armstrong* tout nombre entier qui est égal à la somme des cubes des chiffres de son écriture en base 10 ; par exemple 153 est un nombre d'Armstrong puisque $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. Écrire un programme qui calcule tous les nombres d'Armstrong à 3 ou 4 chiffres. (voir `IntergerDigits, Select`).
3. La fonction `FactorInteger` donne sous la forme d'une liste de listes la décomposition d'un entiers $n$ en facteur premier. Retrouver l'entier $n$ à partir de cette liste de facteurs.
4. Un nombre entier est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. L'entier 6 est parfait car $6 = 3 + 2 + 1$. Construire une « fonction test » `parfait[n_]` permettant de savoir si un nombre $n$ est parfait (voir `Divisors`).
   En déduire la liste de tous les nombres parfaits inférieurs ou égaux à 10 000.

## Exercices divers, au choix

1. *(Extrait Centrale 2011)*
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
   $$P_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(nX)^i}{i!}.$$
   (a) À l'aide de *Mathematica*, constater pour plusieurs valeurs de $n$ que les racines du polynôme $P_n$ sont de module inférieur ou égal à 1.
   *(on pourra utiliser* `NSolve` *pour extraire les racines)*
   (b) Construire une fonction *Mathematica*, (`zer[n_]:=...`), permettant de tracer sur un même graphique le cercle unité et les racines de $P_n$. Tracer ce graphique pour les valeurs $n = 25,\ 50,\ 100$. (voir `ListPlot`).
2. ☢ *Problème de Flavius Josèphe*
   On considère $n$ personnes assises autour d'une table, numérotées de 1 à $n$ et un entier $p$.
   On « élimine » une à une les personnes de la façon suivante :

on compte $p$ personnes à partir de celle numérotée 1, cette $p^{\text{ième}}$ personne est éliminée, on compte à nouveau $p$ personnes à partir de la suivante, la $p^{\text{ième}}$ personne est éliminée, ainsi de suite ...

Écrire une fonction *Mathematica*, `josephe[n_,p_]` permettant d'établir l'ordre d'élimination des $n$ personnes.

3. *(Nombre de Bernoulli)*

On considère la suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de nombres rationnels définis par les relations

$$B_0 = 1, \quad \forall m \geq 1,\ B_m = \frac{-1}{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}B_k.$$

*Les nombres $B_k$ sont appelés nombres de Bernoulli.*

Construire une fonction *mathematica*, `bernoulli[n_]`, qui fournit la liste des nombres $(B_0, B_1, \dots, B_n)$.

4. *(Anneau des entiers de Gauss)*

On rappelle que l'ensemble $\{\, a + i\,b,\ \ a, b \in \mathbb{Z}\,\} \subset \mathbb{C}$ est un anneau noté $\mathbb{Z}[i]$, appelé *anneau des entiers de Gauss* et que ses éléments inversibles sont $-1, 1, -i, i$. Un élément non nul $z \in \mathbb{Z}[i]$ est dit *premier* ou *irréductible* si $z$ est non inversible et si

$$z = u\,v \Rightarrow (u \text{ ou } v \text{ est inversible}),$$

et tout entier de Gauss non nul se décompose de manière unique comme produit de facteurs irréductibles. (résultat admis)

Avec *Mathematica*, on obtient cette décomposition avec la fonction `FactorInteger` et son option `GaussianIntegers->True`.

Par exemple, évaluer :

```
FactorInteger[3+4*I,GaussianIntegers->True]
FactorInteger[13+6*I,GaussianIntegers->True]
```

(a) Donner un nombre premier qui ne soit pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Vérifier sur plusieurs exemples qu'un nombre entier premier impair est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $p = 3\,[4]$.
(on ne demande pas de montrer ce résultat)

(c) On peut montrer, à l'aide de la fonction

$$N : z = a + i\,b \mapsto N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2,$$

que tout entier naturel premier $p$, non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$, peut s'écrire $p = \alpha^2 + \beta^2$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. (On admet ce résultat).
Noter que $N$ vérifie $N(z\,z') = N'z)N(z')$ pour tout $z$ et $z'$ de $\mathbb{Z}[i]$.
Utiliser la fonction `FactorInteger` de *Mathematica* pour trouver une telle décomposition pour les premiers 13, 29, 113, 373, ...ou pour tout autre que vous aurez choisi.

5. ☢ *(Extrait Oraux Centrale 2008)*

Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

$$f_k(n) = n + \left\lfloor \sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}} \right\rfloor.$$

À l'aide de *Mathematica*, conjecturer une description simple de $\{\, f_k(n),\ \ n \in \mathbb{N}\,\}$.