Lycée Camille Guérin
MPSI
Année 2012/2013

Quelques démonstrations avec Mathematica

Exercice 1 Logique des propositions

Les valeurs True et False sont deux constantes, que l'on peut composer avec les opérations logiques And , Or et Not (il existe aussi d'autres opérateurs, comme Xor , qui peuvent être construits à partir de ces trois là).

$\boxed{1}$ Complétez les tables

And	False	True
False		
True		

et

Or	False	True
False		
True		

.

$\boxed{2}$ En utilisant l'instruction Table , construisez deux listes A $=\{1,2,3,4,5\}$ et B $=\{3,4,5,6,7\}$.

$\boxed{3}$ Consultez la documentation de MemberQ , puis évaluez les valeurs de vérité $x \in A$ et $x \in B$, pour $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ et $x = 7$.

On note $A \setminus B$ l'ensemble $\{x \in A$ tels que $x \notin B\}$, et $A\Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$\boxed{4}$ En utilisant les opérateurs And , Or , Not et MemberQ , et vos listes A et B , évaluez la valeur de vérité $x \in A \cup B$, pour $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ et $x = 7$.

$\boxed{5}$ Même question pour $x \in A\Delta B$.

$\boxed{6}$ Consultez la documentation de Implies et de BooleanConvert .

$\boxed{7}$ Exprimez en Mathematica la proposition $\{x > 0\} \Rightarrow \{x + 1 > 0\}$, puis convertissez la en expression booléenne.

$\boxed{8}$ En utilisant la commande Simplify , calculez sa valeur de vérité (est-elle *vraie* ou *fausse* ?).

$\boxed{9}$ On considère maintenant la proposition $\{x > 0\} \Rightarrow \{x - 1 > 0\}$. Démontrez qu'elle est fausse en utilisant Mathematica : l'idée consiste à identifier un contre-exemple, puis à calculer la valeur de vérité de l'implication pour ce contre-exemple (consultez la documentation de Assuming).

Exercice 2 Utilisation du *Modus Ponens*

Le principe de base de la déduction consiste à établir une proposition B à partir d'une proposition A et d'une proposition $A \Rightarrow B$. Si $A \Rightarrow B$ vaut True , on ne peut rien affirmer quant à la validité de B, parce que l'on ne sait rien de A. Par contre, si $A \Rightarrow B$ vaut True et que A vaut True également, alors on peut affirmer que B vaut True . Cela s'appelle le *Modus Ponens*[1], et se note de la façon suivante :

$$(A, A \Rightarrow B) \Rightarrow B \text{ ou bien } \frac{A, A\Rightarrow B}{B}$$

Dans le système Mathematica , on dispose des commandes suivantes :

Concept	Écriture Mathematica
$A \Rightarrow B$	Implies[A,B]
$(A \Rightarrow B)$, supposons A	Assuming[A, Implies[A,B]]
$A \wedge B$	And[A,B]
$A \vee B$	Or[A,B]
$\neg A$	Not[A]
$x \in A$	Element[A, x]
$A \subset B$	Subset[A, B]

[1]Si l'axiomatisation de la logique ou son utilisation dans les systèmes automatiques vous intéresse, vous pouvez lire les articles suivants :
1. http://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_mathématique
2. http://fr.wikipedia.org/wiki/Déduction_naturelle
3. http://fr.wikipedia.org/wiki/Style_de_Fitch_pour_la_déduction_naturelle

Le B-A-BA

$\boxed{1}$ | Évaluez la valeur $A \Rightarrow B$ en tapant Implies[A,B] .

$\boxed{2}$ | Supposez maintenant que A est vraie, et évaluez la valeur $A \Rightarrow B$: on utilise pour cela l'écriture Assuming[A, Implies[A,B]] .

On observe que Mathematica n'a pas exploité l'hypothèse A. Pour forcer l'utilisation de cette hypothèse dans le calcul déductif, il fut recourir à la procédure Refine : on Remplace Implies[A,B] par Refine[Implies[A,B]] dans l'instruction Assuming .

$\boxed{3}$ | Reprenez votre instruction en utilisant Refine . Interprétez le résultat.

On peut enregistrer une proposition logique comme n'importe quelle variable. Vous pouvez essayer en prenant les instructions suivantes :

1. Theoreme=Implies[A,B]
2. Assuming[A,Refine[Theoreme]]
3. etc.

Application. On considère pour A la proposition Mod[n,4*a]==0 (n est multiple de $4a$), et pour B la proposition Mod[n,2*a]==0 (n est multiple de $2a$). Enregistrez $A \Rightarrow B$ dans la variable Theoreme , puis raffinez le théorème en supposant que a vaut 3. Quel résultat venez-vous de démontrer ?

Utilisation de la valeur *Faux*

On considère la proposition P suivante : *Tous les nombres premiers multiples de* 2 *supérieurs à* 7 *sont divisibles par* 0.

Cette proposition peut s'exprimer sous la forme $A \Rightarrow B$, où
– $A =$ la proposition n *est un nombre premier multiple de* 2 *et supérieur à* 7 ;
– $B =$ la proposition n *est divisible par* 0.

$\boxed{4}$ | À votre avis, P est-elle vraie ou fausse ?

$\boxed{5}$ | Peut-on trouver $n \in \mathbb{N}$ pour lequel A est vraie ? Qu'en déduisez-vous pour la valeur de vérité de A ?

$\boxed{6}$ | Peut-on trouver n qui satisfait B ? Que pensez-vous de la valeur de vérité de B ?

$\boxed{7}$ | Est-ce que tous les $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient A vérifient aussi B ? Que pensez-vous de la valeur de vérité de P ?

$\boxed{8}$ | Tapez dans Mathematica les commandes suivantes : Implies[False, C] , Implies[True, C] , Implies[C, False] , Implies[C, True] . Trouvez un exemple de proposition $Q = (C_1 \Rightarrow C_2)$ telle que C_1 est fausse, mais Q est vraie.

$\boxed{9}$ | Finalement, notre proposition P est-elle de la forme Implies[False, C] ou bien de la forme Implies[True, C] ? Qu'en déduisez-vous : P est-elle vraie, ou fausse ?

Exercice 3 Démonstrations calculatoires

On se propose maintenant de démontrer le résultat suivant : pour toute fonction réelle f telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ qui possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, le signe de $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ est opposé au signe de a.

$\boxed{1}$ | Ce résultat est-il *vrai* ou *faux* ?

On rappelle que pour exprimer dans Mathematica une fonction f qui à x associe une expression *expression* on écrit f[x_]:= *expression*.

$\boxed{2}$ | Créez une fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\boxed{3}$ | En utilisant Solve , calculez les racines de f. Appelez x1 la première racine, et x2 la seconde.

$\boxed{4}$ | Evaluez l'expression logique $a \times f\left(\frac{x1+x2}{2}\right) < 0$, après avoir supposé que $a \neq 0$ et que $b^2 - 4ac > 0$ (il faudra peut-être forcer le calcul avec Simplify).

$\boxed{5}$ | Interprétez le résultat obtenu.

$\boxed{6}$ | Démontrez par un procédé semblable que si $b^2 = 4ac$, alors $\frac{x_1+x_2}{2}$ est une racine de f.