On s'intéresse dans ce TD au problème de *l'interpolation* de Lagrange : étant donnés un entier naturel n non nul, n réels $x_1 < \ldots < x_n$, et n autres réels $y_1, \ldots, y_n$, on montrera en cours qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $P(x_1) = y_1, \ \ldots, \ P(x_n) = y_n$. On se propose d'écrire des fonctions calculant effectivement ce polynôme P.

1. Écrire une fonction `lagrange[k_,x_,L_]}` prenant en paramètres une liste $L = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de nombres réels, un entier k entre 1 et n, et une variable x, et renvoyant le polynôme

   $$P_{k,L}(x) = \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

   Que vaut $P_{k,L}(x_j)$? Quel est le degré de $P_{k,L}$? (ces deux questions sont à traiter à la main)
2. On prend dans cette question $L = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Tracer sur un même graphe les polynômes $P_{k,L}$ pour k variant de 1 à 7.
3. Écrire une fonction `interpolation[f_,x_,L_]` prenant en paramètres une fonction f, une variable x, et une liste L de longueur n, et renvoyant le polynôme $P_f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) P_{k,L}(x)$.
   Que vaut $P_f(x_k)$ pour k entre 1 et n ? Que dire du degré de P_f ? (ces deux questions sont à traiter à la main)

   Le polynôme P_f est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points de la liste L. C'est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, dont la valeur au point x_k est précisément $f(x_k)$. Il répond donc à la question posée dans l'introduction du TD.

4. Écrire une fonction `subdivReguliere[a_,b_,n_]` et une fonction `subdivTchebychev[a_,b_,n_]` prenant en paramètres deux réels a et b et un entier $n \geq 1$, et renvoyant, pour la première, la liste des réels $a + k(b-a)/n$, $k = 0, \ldots, n$, et pour la seconde, la liste des réels $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.
5. On prend $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur l'intervalle $[-3, 3]$. Tracer sur un même graphe (ou mieux : animer) la fonction f et le polynôme P_f pour des subdivisions régulières avec des valeurs de n croissantes. Faire ensuite de même avec des subdivisions de Tchebychev.

   On constate dans le cas des subdivisions régulières une forte oscillation du polynôme d'interpolation aux bornes de l'intervalle. Ce phénomène est appelé le phénomène de Runge. En revanche, l'approximation de f par P_f semble bien meilleure lorsqu'on utilise des subdivisions de Tchebychev. On peut en fait montrer que les polynômes d'interpolation de f pour des subdivisions régulières convergent très mal vers la fonction f, alors qu'il y a « convergence uniforme » (voir cours de Spé) pour des subdivisions de Tchebychev.