En Mathematica, une liste d'objets est représentée par ces objets mis entre accolades et séparés par des virgules. Du point de vue mathématique, une liste de longueur n se comporte comme un n-uplet : deux listes sont égales si et seulement si elles ont la même longueur et les mêmes éléments dans le même ordre. Quelques remarques avant de commencer :

- `Length[s]` renvoie la longueur de la liste `s`.
- `Join[s1,s2,...,sn]` renvoie la *concaténation* des listes `s1`, `s2`, …, `sn`. Par exemple, la concaténation des listes `{1,2}` et `{3,4,5}` est la liste `{1,2,3,4,5}`.
- `s[[i]]` renvoie le `i`ème élément de la liste `s`.
- Mathematica sait ajouter, soustraire, multiplier, etc, des listes entre-elles, ou les multiplier par un nombre.

Dans ce TD, on représente un point du plan par la liste de ses coordonnées. Ainsi, la liste $\{2, 5\}$ représente le point d'abscisse 2 et d'ordonnée 5.

1. Écrire une fonction `affixe[`$\{x\_, y\_\}$`]` prenant en paramètre un point $\{x, y\}$ et renvoyant le nombre complexe $x + iy$.
2. Écrire la fonction réciproque de la précédente, `image[z_]`, prenant en paramètre un nombre complexe z et renvoyant le point $\{\text{Re } z, \text{Im } z\}$.

   On écrit maintenant des fonctions décrivant des transformations géométriques bien connues du plan.
3. Écrire une fonction `similitude[`$\omega\_, \lambda\_, \theta\_, m\_$`]` prenant en paramètre un point ω, deux réels λ et θ et un point m, et renvoyant l'image du point m par la similitude directe de centre ω, de rapport λ et d'angle θ. Un passage par les nombres complexes sera bien entendu judicieux.
4. En déduire
   (a) Une fonction `homothetie[`$\omega\_, \lambda\_, m\_$`]` prenant en paramètre un point ω, un réel λ et un point m et renvoyant l'image du point m par l'homothétie de centre ω et de rapport λ.
   (b) Une fonction `rotation[`$\omega\_, \theta\_, M\_$`]` prenant en paramètres un point ω, un angle θ et un point m, et renvoyant l'image du point m par la rotation de centre ω et d'angle θ.

Étant donnés deux points a et b, on définit les points p_1, p_2 et p_3 par :

- Le point p_1 se situe au tiers du segment $[a, b]$.
- Le point p_3 se situe aux deux tiers du segment $[a, b]$.
- Le point p_2 est l'image du point p_3 par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre p_1.

On définit la transformée de Von Koch du segment $[a, b]$ comme la liste de points $\{a, p_1, p_2, p_3, b\}$. On définit également la transformée de Von Koch d'une liste de points $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ comme étant la liste obtenue en concaténant les transformées de Von Koch de chacun des segments $[a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 1 \dots, n-1$.

5. Écrire la fonction `transfo1[a_,b_]` calculant la transformée de Von Koch d'un segment $[a, b]$. Tester cette fonction avec $a = \{0, 1\}$ et $b = \{1, 0\}$. Tracer le résultat : si s est une liste de points, l'expression `ListPlot[s,Joined->True,AspectRatio->1]` trace les points à l'écran dans un repère orthonormé et relie les points successifs.
6. Écrire la fonction `transfo2[s_]` calculant la transformée de Von Koch d'une liste `s` de points.
7. On part de la liste de points $s_0 = \{b, a, c, b\}$ où a, b et c sont les points du plan d'affixes respectives 1, j et j^2. On définit ensuite par récurrence sur n la liste s_n : pour tout entier naturel n, s_{n+1} est la transformée de Von Koch de la liste s_n.
8. Cette question se traite avec un papier et un crayon. Combien la liste s_n contient-elle de points ? Que vaut la somme des longueurs des segments dont les extrémités sont les points successifs de la liste s_n ? Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini ?
9. Écrire une fonction `vonkoch[n_]` réalisant automatiquement cette itération, puis tracer s_n pour les premières valeurs de n. Les résultats précédents devraient vous inciter à une certaine prudence quant aux entiers n à tester.
10. Que se passe-t-il si l'on démarre de la liste $s_0 = \{b, c, a, b\}$?