Le but des quelques exercices qui suivent est de se familiariser avec Mathematica. Quelques remarques importantes :

- Remarquer les crochets verticaux qui apparaissent sur la droite de l'écran. Tout le texte contenu dans le crochet où se trouve le curseur appartient à une *cellule*. Lorsque l'on ordonne à Mathematica une évaluation (en appuyant sur « Shift+Entrée »), c'est la cellule courante qui est évaluée.
- Pour passer à la ligne dans la cellule courante, il faut appuyer sur « Entrée ».
- L'aide de Mathematica est très bien faite : il ne faut pas (et on ne peut pas) hésiter à l'utiliser.
- L'étoile $*$, symbole de la multiplication, n'est pas obligatoire dans les expressions, mais il est obligatoire tant que je suis là.
- Le symbole `%` représente la valeur du dernier résultat calculé par Mathematica.
- Mathematica distingue entre majuscules et minuscules. Ainsi `maVariable` et `MaVariable` sont deux noms distincts.
- Il est bon de sauvegarder fréquemment son travail. Si vous perdez une heure de travail suite à une manipulation absurde, ce sera entièrement de votre faute.
- Point crucial : les arguments des fonctions doivent être mis *entre crochets* , et pas entre parenthèses. Ainsi, `Sin[Pi/3]` est une expression correcte, alors que `Sin(Pi/3)` ne l'est pas.

Répondre aux questions suivantes. La *valeur* de la réponse n'est pas aujourd'hui très importante. Cela dit, soyez critiques vis à vis de cette réponse (dans certains cas, elle sera apparemment inexacte).

1. Calculer
   (a) $1000!$, $\frac{31!}{74!} - \frac{82!}{97!}$.
   (b) Le plus grand commun diviseur de 2548998 et 2584711 (`GCD`).
   (c) $\sin(\frac{\pi}{15})$, $\sin(\frac{\pi}{17})$ (`FunctionExpand`). Le nombre π est noté `Pi` avec Mathematica. Parmi les entiers n entre 1 et 50, trouver ceux pour lesquels Mathematica sait calculer $\sin(\frac{\pi}{n})$ (`Table`).
2. Factoriser $F_5 = 2^{2^5} + 1$ (`FactorInteger`). Fermat pensait que ce nombre était un nombre premier. Avait-il raison ? Faire de même avec F_6, F_7, F_8 et F_9, définis de la même façon.
3. Soit `p = (X^2-Y)^10*(X+2*Y)^7` (tapez ceci tel quel : une nouvelle variable nommée `p` va être créée).
   (a) Regrouper `p` suivant les puissances de `X` (`Collect`).
   (b) Développer `p` et affecter le résultat à une nouvelle variable `q` (`Expand`).
   (c) Factoriser `q` (`Factor`).
4. Résoudre les équations ci-dessous (`Solve`)
   (a) $x^2 - x - 1 = 0$
   (b) $x^2 + x + 1 = 0$.
   (c) $x^3 = x + 1$.
   (d) $x^4 = x + 1$.
   (e) $x + 2y + z = 3, x - y - z = 1, 2x - 3y + 2z = 1$.
5. Sommes
   (a) Calculer $\sum_{i=1}^{n} i^3$, $\sum_{i=1}^{n} i^4$.
   (b) Calculer
   $$\sum_{k=0}^{n-1} X^k, \sum_{k=0}^{n-1} kX^k$$
   Que pensez-vous du résultat renvoyé ? Est-il exact pour n'importe quelle « valeur » de `X` ?
6. Produits
   (a) Calculer $\prod_{k=1}^{n} 2^k$

(b) Calculer

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right),\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^3}\right)$$

7. La fonction `N` permet de calculer une approximation numérique d'un réel.
   (a) Calculer $\pi, \sqrt{2}, e$ avec 10000 chiffres après la virgule.
   (b) Calculer $e^{\pi\sqrt{163}}$ avec 10,20,30,40 chiffres après la virgule.
   (c) Calculer une valeur approchée des racines de l'équation $x^4 = x + 1$.
8. Nombres complexes :
   (a) Calculer module, argument, partie réelle, partie imaginaire, exponentielle de $1 + i, \sqrt{3} - i$. Le nombre complexe i est noté `I` dans Mathematica.
   (b) Calculer une racine carrée de i, de $-i$. Un nombre complexe non nul possède 2 racines carrées : pourquoi Mathematica renvoie-t-il l'une plutôt que l'autre ? Laquelle des racines Consulter l'aide de la fonction `Sqrt` et de la fonction `Power`. En profiter pour se demander ce que renvoie la fonction `Arg`.
9. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\frac{\pi x}{2a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{\log_a x-\log_x a}$$

10. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x^3-2}$.
11. Calculer la dérivée 10ème de la fonction tangente. Qu veut dire `Sec` ? Essayer de simplifier ce résultat (`Simplify`).
12. Calculer les intégrales :

$$\int_0^x t^3\cos t\,dt,\quad \int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\quad \int_0^x\frac{\sin u}{u}du,\quad \int_0^x e^{-t^2}dt,\quad \int_0^x\frac{1}{t^4+1}dt$$

    Les intégrales comportant des paramètres (a, b, x) vont « résister ». Consulter l'aide de `Assuming`.
13. Calculer la limite des trois dernières intégrales ci-dessus lorsque $x \to +\infty$.
14. Tracer les courbes suivantes :
    (a) Courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sin x \sin 10x$.
    (b) La courbe paramétrée $x = \sin 3t, y = \sin 4t$.
    (c) La courbe en polaires $\rho = \sin 3\theta$.
15. Animer les courbes suivantes (`Animate`, `Manipulate`) :
    (a) Courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sin x \sin nx$.
    (b) La courbe paramétrée $x = \sin pt, y = \sin qt$.
    (c) La courbe en polaires $\rho = \sin k\theta$.
16. Tracer les surfaces suivantes :

$$(x,y)\mapsto x^2+y^2$$

$$(x,y)\mapsto x^2-y^2$$

$$(x,y)\mapsto\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(x,y)\mapsto\arg\left((x+iy)^3\right)$$