Mathematica TD 1

Le texte écrit en police `Typewriter` correspond au langage mathématica

Les listes

A l'écriture mathématiques de liste (= uplet) L=(1,3,7,5,a) correspond l'écriture
`L={1,3,7,5,a}` en mathématica. L'ordre des éléments intervient.
`L[[k]]` : k° élément de L
`First[L]` ou `L//First` : premier élèment de L, `Last` : dernier

Q 1 Faire des essais

Les règles de substitution

`expression/.x->a` remplace le motif x par a dans expression mais x n'est pas affecté à la valeur a

Q2 On rentre `a=2 ; x² + x +1 /.x->a`
Que vaut a ? Que vaut x ?

On peut aussi rentrer une liste de règles :
Q3 Soit p un entier non nul, calculer avec mathématica $i = \int_0^{2\pi} x.\cos(px)\, dx$
et $j = \int_0^{2\pi} x.\sin(px)\, dx$ (note : x.cos(px) se note `x*Cos[p x]`, laisser un espace entre le p et le x sinon l'ordinateur croira que px est une variable)
Rentrer la liste de règles `R={Cos[2 p π] ->1,Sin[2 p π]->0 }` et simplifier le calcul de i et j à l'aide de R

Les équations

Q4 Lire et suivre pas à pas, avec mathématica, le texte suivant :
`eq=x==x ^2`
eq est le couple (x,x ^2) (noté {**x**,**x** ^**2**} en mathématica), x vaut donc `eq[[1]]`, x ^2 vaut `eq[[2]]`. Pour résoudre eq, on utilise `Solve` :

`sol=Solve[eq,x]` qui signifie résoudre l'équation eq d'inconnue x

On obtient une liste de règles de substitution appelée sol, la première règle étant sol[[1]] . x n'est affecté ni à la valeur 0, ni à la valeur 1, ce dont on peut se convaincre en validant x.

Pour récuperer les solutions de eq, que l'on va noter α et β, on tape :
`α = x/.sol[[1]]` (de même pour β)
En effet, schématiquement, α vaut x et le motif x est remplacé par 0 donc α vaut 0

Q5 Résoudre l'équation x ^3=1 et récupérer les solutions que l'on nommera α, β et γ

Q6 Résoudre l'équation x ^2+x-1=0, x étant positif et récupérer la solution que l'on nommera encore x

Système d'équations

Pour résoudre un système d'équations $eq1, eq2, ...$ et d'inconnues $x, y, ...$ on tape Solve[{eq1,eq2,...},{x,y,..}]

Q7 Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 4y + 9z = 3 \end{cases}$$

Exercice 1

Soit une suite (u_n) satisfaisant : (E) $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

(l'équation (E) est bien entendu vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$)

Q8 Rentrer l'équation (E) (pour u_n, utiliser la palette)
Q9 Ecrire une liste de règles, R : u_n remplacé par 1, u_{n+1} par r et u_{n+2} par r².
Q10 Donner l'équation caractéristique de E. On suppose que a et b sont réels et que $\Delta > 0$. Résoudre l'équation caractéristique , on appellera α et β les deux solutions
Q11 Taper $u_{n\_} := A\alpha^n + B\beta^n$. Trouver, grâce à un `Solve`, A et B pour que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$
Q12 On prend $a = 3$ et $b = -2$. Que vaut u_n ? Faire une représentation graphique des 6 premiers termes de (u_n) en utilisant `ListPlot`

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in N, v_n = (an^4 + bn^3 + cn^2)2^n$
Q 13 Rentrer la suite v comme une fonction de n, c'est à dire $\mathrm{v}_{n\_} := ...$
Q14 Développer $eq = v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n$

Q15 Regrouper les termes en n dans eq en tapant `Collect[eq,n]`
Q16 Choisir a, b, c pour que : $\forall n \in N, v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = n^2.2^n$

Q17 Trouver la suite (u_n) telle que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in N, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = n^2.2^n$

Q18 Vérifier la réponse à la question précédente en utilisant `RSolve`

Exercice 3

Q 19 Reprendre point par point l'exercice 1 pour résoudre les équadifs linéaires d'ordre 2, homogènes : $ay'' + by' cy = 0$ où a, b et c sont réels, a étant non nuls et $\Delta > 0$. On admet que la solution est dans ce cas $y(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$, α et β étant les solutions de l'équation $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue r

Q 20 Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0, y'(0) = 1$ avec votre méthode puis avec `DSolve` et comparer