TD d'analyse 4 : topologie

version du 20 octobre 2025

Exercice 1. On dit qu'une partie A d'un espace métrique (X, d) est relativement compacte dans X si son adhérence est compacte. Montrer que A est relativement compacte si et selement si toute suite de A admet un sous-suite convergente (dans X).

Exercice 2. Montrer qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice 3. Soit K, L deux espaces métriques compact et $\pi : K \to L$ une bijection continue. Montrer que π est un homéomorphisme entre K et L.

Exercice 4. (Précompacité) Un espace métrique (X, d) est pré-compact si pour tout $\varepsilon > 0$, X peut s'écrire comme une réunion finie de boule de rayon $\varepsilon > 0$. Comme d'habitude, une partie $A \subset X$ est dite préc-compacte (dans X), si l'espace métrique (A, d) est pré-compact.

(1) Montrer qu'une partie A est précompacte dans (X, d) si et seulement si pour tout ε, A est inclus dans une réunion finie de boule (de X) de rayson ϵ.

(2) Montrer qu'un espace métrique compact est pré-compact.

Qu'en est-il de la réciproque ? (On pourra décrire quelle sont les parties pré-compactes de $\mathbb{R}$, par exemple).

(3) Montrer que si (X, d) est précompact, alors de toute suite de X on peut extraire une sous-suite de Cauchy.

Il s'agit d'une question délicate qui repose sur le principe d'extraction diagonale.

(4) Montrer que si (X, d) est précompact et complet, alors il est compact.

(5) Montrer que si (X, d) est un espace complet, alors pour toute partie $A \subset X$ on a

$$A \text{ pré-compacte} \iff A \text{ relativement compacte.}$$

(6) Proposer une approche altérnative du théorème d'Ascoli.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie non vide de X. Pour tout $x \in X$, on pose

$$d(x, A) := \inf\{d(a, x) \ ; \ a \in A\}.$$

(1) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $A_n = \{x \in X \ ; \ d(x, A) < 1/n\}$ est un ouvert de X. Qu'est-ce que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$? En déduire que tout fermé est une intersection dénombrable d'ouvert.

(3) Montrer que la fonction $d(\cdot, A)$ est continue.

(4) Montrer que si A est fermé, 1_A est limite simple de fonction continues.

(5) Soit $K \subset X$ un compact et V un ouvert de X tels que $K \subset V$. Montrer que pour δ suffisamment petit on a $\{d(\cdot, K) \le \delta\} \subset V$. Est-ce que $\{d(\cdot, K) \le \delta\}$ est nécessairement compact ?

(6) Pour deux ensembles $A, B \subset X$ on note $d(A, B) = \inf\{d(x, y) \ ; \ (x, y \in A \times B)\}$.

(a) On suppose que A et B sont fermés avec $A \cap B = \emptyset$. A-t-on nécessairement que $d(A, B) > 0$?

(b) On suppose que A est fermé et B est compact, avec $A \cap B = \emptyset$. A-t-on nécessairement que $d(A, B) > 0$?

Exercice 6. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 7. (Connexité dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$)

(1) Soit B une boule fermée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \backslash B$ est connexe.

(2) Soit A une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \backslash A$ est connexe par arcs.

Exercice 8. On considère le sous-ensemble $G = \{(x, \sin(1/x))\ ;\ x > 0\}$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer l'intérieur et l'adhérence de G.

(2) Montrer que $\overline{G}$ est connexe.

(3) Montrer que $\overline{G}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 9. Soit X un espace métrique compact. On se donne une suite de fermés non vides $F_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'elle est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{n+1} est inclus dans F_n.

(1) Montrer que $F = \bigcap\limits_n F_n$ est un compact non vide.

(2) Soit W un ouvert contenant F. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, F_n est inclus dans W.

(3) Soient A et B deux compacts disjoints de X. Montrer qu'il existe des ouverts disjoints A' et B' de X tels que A est inclus dans A' et B est inclus dans B'.

(4) Montrer que si les F_n sont connexes, alors F est connexe.

Exercice 10. Soit ℓ_∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la norme uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}$, on pose

$$\|x\| = \sup_{k \geq 0} |x(k)|.$$

Montrer que ℓ_∞ est complet.

Exercice 11. Soient X un espace métrique complet et $f \colon X \to X$ une application telle que l'une des composées f^k soit contractante ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12.

(1) Vérifier que l'on définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ en posant

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\|_\infty = \sup_{[0,1]} |P|.$$

(2) Pour quels réels a la forme linéaire $\delta_a : P \mapsto P(a)$ est-elle continue pour cette norme ?

(3) Et si on remplace $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{R}_d[X]$ pour un certain $d \in \mathbb{N}$?

Exercice 13. Soit $p \in [1, +\infty[$. On considère l'espace $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ des suites p-sommables (réelles ou complexes). Soit B la boule unité de ℓ_p et

$$B' := \{(x_k) \in B \ ; \ x_k = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}$$

les éléments de B de support fini. Montrer que B' est dense dans B. Et pour $p = +\infty$?

Exercice 14. (Classique convergence uniforme) On travaille sur $\ell_\infty = \ell_\infty^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$, l'espace des suites réelles bornées muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. On considère le sous-espace c_0 des suites tendant vers zero,

$$c_0 = \left\{ a = (a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ ; \ \lim_{+\infty} a_k = 0 \right\} \subset \ell_\infty.$$

Montrer que c_0 est un sous-espace fermé de ℓ_∞.
Soit c_{00} le sous-espace de ℓ_∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Exercice 15. Donnez les meilleures constantes dans les équivalences entre les normes $\| \cdot \|_p$ et $\| \cdot \|_q$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 16. Pour une fonction numérique g définie sur $[0, 1]$ on note $\|g\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g|$. On suppose que E est un sous-espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^1 sur $[0, 1]$ et que pour tout $f \in E$,

$$\|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty \, .$$

Montrer que E est de dimension finie.

Exercice 17. On munit $X = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme et on pose, pour $f \in X$:

$$L(f) = \int_0^1 f \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(1) Montrer que L et les L_n sont des formes linéaires continues sur X et calculer leurs normes.

(2) Montrer que, pour tout $f \in X$, $L_n(f)$ tend vers $L(f)$, alors que $\|L_n - L\| = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18. Soit une fonction continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$. Montrer que f est nulle.

Exercice 19. (Ensemble et fonction de Cantor)

(1) On considère les intervalles triadiques $\mathcal{T} = \bigcup_n \mathcal{T}_n$ de $[0, 1]$ définis comme suit. Pour $n \geq 0$ on regarde la subdivision de $[0, 1]$ de pas 3^{-n} on on appelle $\mathcal{T}_n$ les segments qui la compose.

  (a) Combien d'éléments contient $\mathcal{T}_n$? Expliquer le lien entre les éléments de $\mathcal{T}_n$ et ceux de $\mathcal{T}_{n+1}$.

  (b) Montrer que l'on peut écrire $\mathcal{T}_n = \bigcup_{a \in \{0,1,2\}^n} I_a^n$ où $I_a^n = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^n} \, , \, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right]$.

(c) Montrer que tout réel $x \in [0,1]$ s'écrit :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \quad \text{avec } a_k \in \{0,1,2\}$$

et qui si on demande à la suite des a_k de ne pas être à support fini, alors tout réel de $[0,1]$ admet une et une seule telle écriture.

(2) On définit l'ensemble de Cantor $C \subset [0,1]$ par une procédure de retrait successif d'intervalles ouverts au tiers. On commence avec $C_0 = [0,1]$, et on définit récursivement une suite d'ensembles $(C_n)_{n\geq 0}$: à chaque étape $n \geq 1$, C_n est obtenu à partir de C_{n-1} en retirant, dans chaque intervalle de C_{n-1}, le tiers ouvert central.On définit alors : $C := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n$.

(a) Donner les expressions explicites de C_1, C_2 et C_3.

(b) Montrer que chaque C_n est réunion finis de segments appartenant à $\mathcal{T}_n$, que l'on précisera. Combien d'intervalles contient C_n ?

(c) Montrer que la longueur totale de C_n, notée ℓ_n, est donnée par $\ell_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et en déduire que C est de mesure nulle.

(3) Montrer que :

$$x \in C \quad \Leftrightarrow \quad \text{le (ou les) développement en base 3 de } x \text{ ne contient pas le chiffre 1}$$

(4) Montrer que C est un compact d'intérieur vide (donner deux arguments : un avec la mesure, l'autre sans).

(5) Montrer que C n'est pas dénombrable, et qu'il est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et avec $[0,1]$.

(6) Montrer que tout point de C est point d'accumulation de C (on dit que C est parfait).

(7) Montrer que pour tout $c \in C$, la composante connexe de c dans C est égale à $\{c\}$ (on dit que C est totalement discontinu).

(8) Ici on revient à la définition de l'ensemble de Cantor, précisée dans la question (2). On définit une suite de fonctions f_n avec $f_0(x) = 0$ et pour $n \geq 1$, f_n continue, affine par morceaux, telle que :

— Sur chaque intervalle $I_{n,k} \subset C_n$, $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, la fonction f_n est affine, et vérifie $f_n(a_{n,k}) = \dfrac{k-1}{2^n}$ et $f_n(b_{n,k}) = \dfrac{k}{2^n}$

— Sur les intervalles retirés (composantes connexes de $[0,1] \setminus C_n$), f_n est constante, égale à la valeur atteinte à la borne gauche (= borne à droite). On pourra remarquer que $f_{n+1} = f_n$ sur ces intervalles.

(a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f, croissante, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. *On pourra estimer* $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty$.

(b) Montrer que f n'est nulle part strictement croissante, au sens où pour tout $[a,b] \subset [0,1]$, $a \neq b$, il existe un intervalle ouvert (non vide) de $[a,b]$ sur lequel f est constante.

(c) Plus généralement, montrer que f est dérivable sur l'ouvert $[0,1] \setminus C$, de dérivée nulle sur cet ouvert.