TD Analyse

Thomas Goossaert-Cosyn

20 février 2026

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 24. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que pour tout $x \in I$ on a

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h} > 0.$$

Montrer que f est convexe sur I.

Le résultat reste vrai si on suppose seulement que la $\liminf$ est ≥ 0. Voyez-vous comment faire ?

Démonstration. Posons les fonctions pentes

$$s_+(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, s_-(x,h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

L'hypothèse de l'énoncé se réécrit alors

$$\forall x \in I, \liminf_{h \to 0^+} s_+(x,h) - s_-(x,h) > 0$$

Pour passer de cette propriété locale à une inégalité globale, considérons $[a,c] \subset I$ et $[x_0 = a, ..., x_n = c]$ une subdivision de pas $\Delta = \frac{c-a}{n}$.
On définit la suite de pentes locales par :

$$s_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta}$$

L'hypothèse donne don que $s_0 < s_1 < ... < s_{n-1}$
Soit $b \in [a,c]$, n suffisamment grand et k tel que $x_k \leq b < x_{k+1}$, alors la croissance des pentes entraine

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq s_k < \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

D'où la convexité de f. □

4 Topologie

Exercice 3. Soit K, L deux espaces métriques compact et $\pi : K \to L$ une bijection continue. Montrer que π est un homéomorphisme entre K et L

Démonstration. Pour prouver que π est un homéomorphisme, il suffit de montrer que sa réciproque $\pi^{-1} : L \to K$ est continue.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L convergeant vers un élément $y \in L$. Posons :

$$x_n = \pi^{-1}(y_n) \quad \text{et} \quad x = \pi^{-1}(y)$$

Montrons que la suite (x_n) converge vers x dans K.

La suite (x_n) est une suite d'éléments de l'espace métrique compact K. Par Bolzano-Weierstrass, de toute suite d'un compact, on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(x_{\phi(n)})$ une telle sous-suite, et notons $z \in K$ sa limite :

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} z$$

L'application π est continue sur K. Par caractérisation séquentielle de la continuité, l'image de la sous-suite doit converger vers l'image de sa limite :

$$\pi(x_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(z)$$

Or, par construction, $\pi(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$.

Comme la suite parente (y_n) converge vers y, toute sous-suite extraite converge également vers y. On a donc, par unicité de la limite dans L :

$$\pi(z) = y$$

Puisque π est une bijection, chaque élément possède un unique antécédent. Sachant que $\pi(x) = y$, l'injectivité de π impose :

$$z = x$$

Nous avons montré que toute sous-suite convergente de (x_n) converge nécessairement vers x. Dans un espace compact, si une suite possède une unique valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.

Ainsi, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, ce qui prouve que π^{-1} est continue en tout point $y \in L$.

Conclusion : π est une bijection continue dont la réciproque est continue, c'est donc un homéomorphisme. □

5 Intégration

Exercice 4. On travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on se donne une fonction continue par morceaux (par exemple) sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que si f est positive, on a, lorsque $R \to +\infty$,

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) Montrer que si f est intégrable, on a, lorsque $R \to +\infty$,

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g intégrable, bornée et à support compact telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. **(1)** Supposons f mesurable positive. Pour $R > 0$, posons

$$f_R = f \mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors $(f_R)_{R>0}$ est une famille croissante de fonctions mesurables positives et

$$f_R(x) \uparrow f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{\mathbb{R}} \lim_{R \to +\infty} f_R = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{-R}^{R} f.$$

On en déduit

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) Supposons maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $|f|$ est intégrable. On applique le résultat précédent à la fonction positive $|f|$:

$$\int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f = \int_{|x|>R} f(x)\,dx.$$

Donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f \right| \leq \int_{|x|>R} |f|.$$

Or

$$\int_{|x|>R} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f| - \int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
Étape 1 : troncature du support.
D'après le point (2), il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{|x|>R} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons

$$f_1 = f\mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_1| = \int_{|x|>R} |f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Étape 2 : troncature des valeurs.
Pour $M > 0$, posons

$$f_{1,M}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } |f_1(x)| \leq M, \\ M\,\mathrm{sgn}(f_1(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_{1,M}$ est bornée par M et a toujours son support dans $[-R, R]$.
Comme $f_1 \in L^1$, on a

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } M \to +\infty.$$

Donc il existe $M > 0$ tel que

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$|f_1 - f_{1,M}| \leq |f_1|\mathbf{1}_{\{|f_1|>M\}},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_{1,M}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclusion.
Posons $g = f_{1,M}$. Alors g est intégrable, bornée, à support compact et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - f_1| + \int_{\mathbb{R}} |f_1 - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

7 Séries de Fourier

Exercice 6. (Critère d'équirépartition) On se donne une suite (x_n) de réels telle que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} = 0.$$

Montrer que pour toute fonction f continue 2π-périodique on a

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Démonstration. Étape 1 : Cas des polynômes trigonométriques
Soit P un polynôme trigonométrique. Par définition, il existe un entier $M \geq 0$ et des coefficients complexes $(c_k)_{-M \leq k \leq M}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx}.$$

Calculons la moyenne de P sur les N premiers termes de la suite (x_n) :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx_n} = \sum_{k=-M}^{M} c_k \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} \right).$$

Par hypothèse, pour tout $k \neq 0$, on a $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} = 0$. Pour $k = 0$, la moyenne vaut exactement 1 quel que soit N. Par linéarité de la limite (la somme étant finie), on obtient :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(x_n) = c_0.$$

Par ailleurs, calculons l'intégrale de P sur une période :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)dt = \sum_{k=-M}^{M} c_k \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt}dt \right) = c_0,$$

car l'intégrale de e^{ikt} sur $[0, 2\pi]$ est nulle pour $k \neq 0$, et vaut 2π pour $k = 0$. Le résultat est donc vérifié pour tout polynôme trigonométrique.

Étape 2 : Généralisation aux fonctions continues par densité
Soit f une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique (ou théorème de Stone-Weierstrass), il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Majorons la différence qui nous intéresse en insérant judicieusement le polynôme P et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (f(x_n) - P(x_n)) \right|}_{A_N} + \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P(x_n) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t)dt \right|}_{B_N} + \underbrace{\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P(t) - f(t))dt \right|}_{C} \end{aligned}$$

Majorons chaque terme :

1. Le terme A_N : $A_N \leq \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} |f(x_n) - P(x_n)| \leq \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon.$
2. Le terme C : $C \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |P(t) - f(t)| dt \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \|P - f\|_\infty dt \leq \varepsilon.$
3. Le terme B_N : Puisque le résultat a été démontré à l'étape 1 pour le polynôme P, on sait que $B_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$. Il existe donc un entier N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, on ait $B_N \leq \varepsilon$.

En regroupant ces majorations, on obtient que pour tout $N \geq N_0$:

$$\Delta_N \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

$\square$

8 Transformée de Fourier

Exercice 5. (Polynômes et fonctions de Hermite) On travaille dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ associé à la mesure (gaussienne standard) de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ définie par $d\mu(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$h_n(x) = e^{x^2/2} g^{(n)}(x), \quad \text{où} \quad g(x) = e^{-x^2/2}.$$

1. Montrer que les fonctions h_n sont polynomiales. Déterminer leurs degrés et coefficients dominants.
2. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale de H et calculer la norme λ_n de chaque élément h_n.
3. On veut montrer que la famille $(\lambda_n^{-1} h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
   (a) Expliquer pourquoi il suffit de montrer que les polynômes sont denses dans H.
   (b) Pour $f \in H$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0)$. En déduire que si f est orthogonale à tous les polynômes, alors f est nulle.
   (d) Conclure.

Démonstration. 1. Par récurrence, montrons que $g^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

— Pour $n = 0$, $g^{(0)}(x) = e^{-x^2/2}$, donc $P_0(x) = 1$. La propriété est vraie.

— Supposons $g^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$. Alors :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}(P_n(x)e^{-x^2/2}) = (P_n'(x) - xP_n(x))e^{-x^2/2}$$

Ainsi $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - xP_n(x)$. Si P_n est de degré n et de coefficient dominant a_n, alors $-xP_n$ est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $-a_n$. Le terme P_n' est de degré $n-1$, il ne modifie pas le degré dominant.

Par construction, $h_n(x) = e^{x^2/2}(P_n(x)e^{-x^2/2}) = P_n(x)$. **Conclusion :** h_n est un polynôme de **degré** n et de **coefficient dominant** $(-1)^n$.

2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. Le produit scalaire dans H est :

$$\langle h_n, h_m \rangle_\mu = \int_\mathbb{R} h_n(x)h_m(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R}\left(e^{x^2/2}g^{(n)}(x)\right)h_m(x)e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} g^{(n)}(x)h_m(x)dx$$

Par intégrations par parties successives (n fois), les termes de bord s'annulent car les dérivées de la gaussienne tendent vers 0 :

$$\langle h_n, h_m \rangle_\mu = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} g(x)h_m^{(n)}(x)dx$$

Comme $\deg(h_m) = m < n$, on a $h_m^{(n)}(x) = 0$, donc $\langle h_n, h_m\rangle_\mu = 0$. La famille est orthogonale.

Pour la norme $\lambda_n^2 = \langle h_n, h_n\rangle_\mu$:

$$\lambda_n^2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} g(x)h_n^{(n)}(x)dx$$

Or $h_n(x) = (-1)^n x^n + \dots$, donc $h_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$. D'où :

$$\lambda_n^2 = \frac{(-1)^n(-1)^n n!}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} e^{-x^2/2}dx = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = n!$$

Conclusion : $\lambda_n = \sqrt{n!}$.

3.a) Puisque $\deg(h_n) = n$, toute combinaison linéaire des h_k ($k \leq n$) décrit l'espace des polynômes de degré au plus n. Si les polynômes sont denses dans H, alors l'adhérence de $\mathrm{Vect}(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est H. Comme la famille est orthonormale (après division par λ_n), c'est une base hilbertienne.

3.b) $f \in H$ signifie $\int |f|^2 d\mu < \infty$. $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$.
Par Cauchy-Schwarz, sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}(\xi) = \int f(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}dx$ est bien définie car $\psi_f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int |f(x)|e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}\int |f(x)|e^{-x^2/4}\frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}}dx \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_H\|e^{-x^2/4}\|_H < \infty$$

L'extension holomorphe $F(z) = \int f(x)e^{-x^2/2}e^{-ixz}dx$ pour $z \in \mathbb{C}$ est justifiée par le fait que pour $z = u + iv$, $|e^{-ixz}| = e^{xv}$. Le terme $e^{-x^2/2}$ assure la convergence et la domination pour tout $z \in \mathbb{C}$ (croissance exponentielle vs décroissance gaussienne).

3.c) On a

$$\widehat{\psi_f}^{(n)}(0) = \int f(x)e^{-x^2/2}(-ix)^n dx = (-i)^n\sqrt{2\pi}\int f(x)x^n\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = (-i)^n\sqrt{2\pi}\langle f, x^n\rangle_\mu$$

Si f est orthogonale à tous les polynômes, alors $\langle f, x^n\rangle_\mu = 0$ pour tout n, donc $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0) = 0$. Comme $\widehat{\psi_f}$ est une fonction analytique (holomorphe sur $\mathbb{C}$), ses coefficients de Taylor en 0 sont tous nuls, donc $\widehat{\psi_f} \equiv 0$. Par injectivité de la transformée de Fourier, $\psi_f = 0$ p.p., donc $f = 0$ p.p.

3.d) L'orthogonal de l'espace des polynômes est $\{0\}$, donc les polynômes sont denses dans H. La famille $(\lambda_n^{-1}h_n)$ est donc une base hilbertienne. $\square$

Exercice 6. (Échantillonnage de Shannon) On montre que les signaux à bande limitée peuvent se reconstruire à partir de la donnée d'une suite de valeurs. Formellement, on s'intéresse aux fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que (sans perte de généralité) $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $|x| > \pi$.
   (a) Rappeler pourquoi f admet un représentant continu, qui est en fait C^∞, sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)e^{ixt}dx.$$
   (b) **Heuristique** = à ne pas mettre sur une copie. Sans chercher à justifier les calculs, montrer que :
   $$\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-2i\pi kx},$$
   (On pourra considérer la fonction 2π-périodique g qui vaut $g(x) = \hat{f}(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ puis que
   $$f(t) = \sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}.$$
2. Soit u une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier L^2, encore notée $\hat{u}$, est nulle (presque partout) en dehors d'un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{u}$ est intégrable et que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\hat{\hat{u}}(x) = u(-x),$$
   et en déduire qu'il existe $v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $u = v$ presque partout.

3. On introduit l'espace

$$B = \left\{u \in L^2(\mathbb{R});\ \hat{u} = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]\right\}.$$

Montrer que B est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$, sur lequel $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$.

4. On posera $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$s_n(x) = \sqrt{2\pi}\text{sinc}(\pi(x-n)).$$

Montrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de B.

5. Montrer que pour tout $u \in B$ on a

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)s_n$$

dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire avec convergence dans L^2 de la série, et que si on note encore u le représentant continu, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)s_n(x)$$

avec convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. (a) Comme $\hat{f}$ est à support compact, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\hat{f}| = o(\frac{1}{|x^n|})$ en $|x| \to \infty$, donc $f \in \mathcal{C}^\infty$.
En particulier, $\hat{f} \in L$ donc la formule d'inversion de Fourier donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \hat{f}(x)e^{ixt}dx$$

(b) **Heuristique :** Sur $[-\pi, \pi]$, $\hat{f}$ peut être développée en série de Fourier. Les coefficients sont : $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x)e^{-ikx}dx$. D'après la formule d'inversion en $t = k$, on voit que $c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(-k)$. Le développement est $\hat{f}(x) = \sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(-k)e^{ikx}$. En changeant k en $-k$, on obtient la formule de l'énoncé. En injectant cette somme dans l'intégrale d'inversion :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-ikx}\right)e^{ixt}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(t-k)}dx$$

L'intégrale vaut $\left[\frac{e^{ix(t-k)}}{i(t-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin(\pi(t-k))}{t-k}$. D'où le résultat.

2. Si $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ est à support compact K, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_K |\hat{u}(x)|dx \leq \sqrt{\text{mes}(K)}\left(\int_K |\hat{u}(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty$$

Donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Puisque $\hat{u} \in L^1 \cap L^2$, la formule d'inversion L^1 s'applique presque partout. On applique le résultat de la question 1 pour $f = u$, et on définit v comme la transformée de Fourier inverse de $\hat{u}$.

3. Posons $\Psi : L^2 \to L^2$ l'application définie par $\Psi : u \to \widehat{u}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$ qui est une application linéaire continue par propriétés de la transformée de Fourier. On a donc $B = \ker\Psi$ qui est donc fermé.
B est l'image réciproque du sous-espace fermé $\{\phi \in L^2 \mid \phi = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-\pi,\pi]\}$ par la transformée de Fourier. Comme cette dernière est une isométrie de L^2 (théorème de Plancherel), B est fermé.
Pour l'inégalité, si $u \in B$, $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Par Cauchy-Schwarz : $|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$. Donc $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$.

4. Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n(t) = e^{int}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f_n(x)} = \int_{\mathbb{R}} e^{i(n-x)t}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(t)dt = 2\pi s_n(x)$$

On en déduit ainsi $\widehat{s_n(x)} = e^{-inx}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)$ pp.
Par Plancherel, pour $n, m \in \mathbb{Z}$ distincts :

$$\langle s_n, s_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle\widehat{s_n}\widehat{s_m}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{-i(n-m)x}dx = \delta_{n,m}$$

Donc $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.
Soit $u \in B$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, \langle u, s_n\rangle = 0$. Alors par Plancherel $\forall n \in \mathbb{Z}, \langle\widehat{u}, \widehat{s_n}\rangle = 0$, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \int_{[-\pi,\pi]} \widehat{u}(x)e^{-inx}dx = 0$$

En considérant $\tilde{\widehat{u}}$ étendue par 2π périodicité, on a $\forall n \in \mathbb{Z}, \tilde{u}(n) = 0$, donc $\tilde{u} = 0$ pp et donc $u = 0$ pp sur $[\pi, \pi]$. Ainsi la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans L^2. C'est donc une base hilbertienne de B.

5. Comme (s_n) est une base hilbertienne de B, tout $u \in B$ s'écrit $u = \sum\langle u, s_n\rangle s_n$ avec convergence dans L^2. Le coefficient est $\langle u, s_n\rangle = \int u(x)s_n(x)dx$. Par Plancherel, c'est aussi :

$$\langle\hat{u}, \hat{s}_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{u}(x)e^{inx}dx = u(n)$$

En utilisant le résultat de la première question.
Enfin, la convergence uniforme découle de l'inégalité sur les normes obtenue à la question 3 :

$$\|u - \sum_{n=-N}^{N} u(n)s_n\|_\infty \leq \|u - \sum_{n=-N}^{N} u(n)s_n\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

6. (Lien avec le théorème de Shannon en physique) En physique, le théorème de Shannon dit que pour ne pas perdre d'information lors de l'échantillonage d'un signal, il faut échantillonner à une fréquence supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal. Dans l'exercice, la fréquence maximale du signal est π puisque sa transformée de Fourier (ses fréquences) sont nulles au-delà. On doit donc échantillonner à une fréquence d'au moins 2π, donc une période $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ pour ne pas perdre d'information (c'est bien le cas ici). Lorsque la condition n'est pas respectée, on perd de l'information et on parle de repliement de spectre.

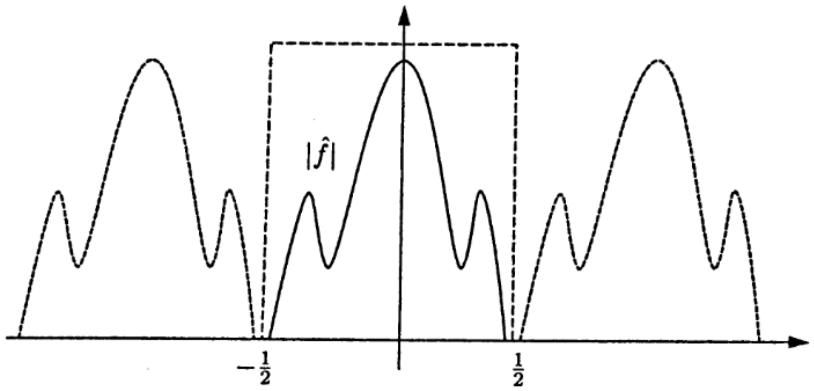

FIGURE 19. CAS FAVORABLE OÙ $2F \leq 1$.

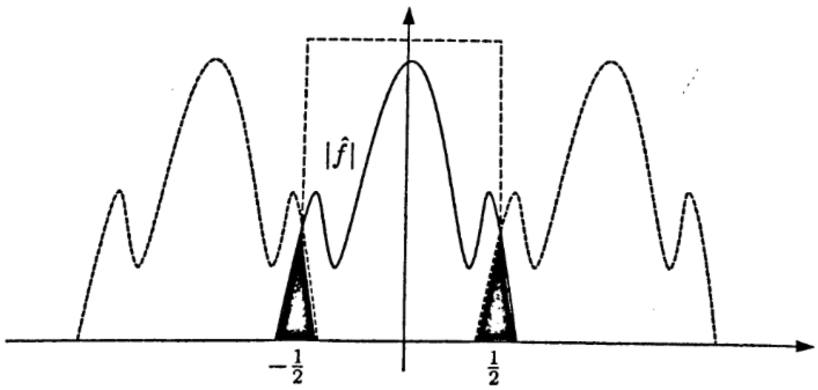

FIGURE 20. CAS DÉFAVORABLE OÙ $2F > 1$. REPLIEMENT DE SPECTRE.

□

10 Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) = t^2 y(t) + t^2$, avec $y(0) = 1$.
2. $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$, avec $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
3. $y'(t) = Ay(t)$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. $y'(t) + e^{t-y(t)} = 0$, avec $y(0) = 0$.

Démonstration. 1. L'équation est $y'(t) - t^2 y(t) = t^2$. C'est une équation linéaire du premier ordre.

— Solution homogène : $y_h'(t) = t^2 y_h(t)$. Une primitive de t^2 est $\frac{t^3}{3}$. Donc $y_h(t) = Ce^{t^3/3}$.

— Solution particulière : On remarque la solution constante $y_p(t) = -1$ car $y_p' = 0$ et $t^2(-1) + t^2 = 0$.

— Solution générale : $y(t) = Ce^{t^3/3} - 1$.

— Condition initiale : $y(0) = 1 \implies Ce^0 - 1 = 1 \implies C = 2$.

La solution est $y(t) = 2e^{t^3/3} - 1$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. Les racines sont $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. La forme générale est $y(t) = e^{-t/2}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

— $y(0) = 0 \implies A = 0$. Donc $y(t) = Be^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

— $y'(t) = Be^{-t/2}\left[-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

— $y'(0) = 1 \implies B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies B = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

La solution est $y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

3. Le système est $y'(t) = Ay(t)$. La solution est $y(t) = e^{tA}y(0)$. On décompose $A = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $2I$ et N commutent : $e^{tA} = e^{2tI}e^{tN} = e^{2t}e^{tN}$. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc $e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur solution est $y(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $y(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ 1 + t \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. L'équation est $y'(t) = -e^t e^{-y(t)}$, ce qui s'écrit $e^{y(t)}y'(t) = -e^t$. En intégrant par rapport à t : $\int e^y dy = \int -e^t dt$. On obtient $e^{y(t)} = -e^t + C$. Condition initiale : $y(0) = 0 \implies e^0 = -e^0 + C \implies 1 = -1 + C \implies C = 2$. Ainsi $e^{y(t)} = 2 - e^t$. En passant au logarithme : La solution est $y(t) = \ln(2 - e^t)$, définie pour $t < \ln(2)$.

□

Exercice 3. Résoudre le problème différentiel suivant sur $\mathbb{R}$

$$2xy' = 1 - y$$

Démonstration. — On travaille sur $I \subset \mathbb{R}$. Posons $f(x, y) = \frac{1-y}{2x}$. f est :

— continue sur $I \times \mathbb{R}$

— $\mathcal{C}$ en y donc localement lipschitzienne en y

Par le théorème de Cauchy Lipschitz, pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution définie sur I.

□

Exercice 6. Exercice 6. Soit une fonction continue $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$. On note $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On notera aussi $M(t)$ la matrice $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer le wronskien $W(t) = \det M(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. On suppose maintenant que $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que toute solution y admet une limite en $+\infty$.
   (b) Soit θ l'application qui à $y_0 \in \mathbb{R}^n$ associe la limite en $+\infty$ de la solution y telle que $y(0) = y_0$. Montrer que θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. 1. La matrice fondamentale $M(t)$ vérifie

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

On pose $W(t) = \det M(t)$. Par la formule de dérivation du déterminant,

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

On obtient donc une équation différentielle scalaire :

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

En intégrant,

$$W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds \right).$$

En particulier, si $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base de solutions, alors $W(0) \neq 0$, donc

$$W(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2.a) Soit y une solution. Elle vérifie

$$y(t) = y(0) + \int_0^t A(s)y(s)\, ds.$$

Pour $t \geq s \geq 0$,

$$y(t) - y(s) = \int_s^t A(\tau)y(\tau)\, d\tau.$$

On en déduit

$$\|y(t) - y(s)\| \leq \int_s^t \|A(\tau)\|\, \|y(\tau)\|\, d\tau.$$

Par ailleurs on a également,

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + \int_0^t \|A(s)y(s)\| ds$$

Donc en appliquant le lemme de Gronwall pour $\|A(\cdot)\|$ positive et $\|y(\cdot)\|$ continue, pour $t \geq 0$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(\sigma)\|\, d\sigma \right).$$

Comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la quantité

$$C = \exp\left(\int_0^{+\infty} \|A(\sigma)\| \, d\sigma\right)$$

est finie, et donc

$$\|y(t)\| \leq C\|y(0)\| \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ainsi y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Dès lors,

$$\|y(t) - y(s)\| \leq C\|y(0)\| \int_s^t \|A(\tau)\| \, d\tau.$$

Comme $\|A\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $s, t \to +\infty$.

Donc $y(t)$ est de Cauchy lorsque $t \to +\infty$, et comme $\mathbb{R}^n$ est complet, $y(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$.

2.b) On définit

$$\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \theta(y_0) = \lim_{t \to +\infty} y(t),$$

où y est l'unique solution telle que $y(0) = y_0$.

D'après la question précédente, θ est bien définie. Elle est linéaire car l'équation différentielle est linéaire.

Montrons qu'elle est injective.

Si $\theta(y_0) = 0$, alors $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. On écrit, pour $t \geq 0$,

$$y(t) = y(T) - \int_t^T A(s)y(s) \, ds.$$

En faisant tendre $T \to +\infty$ et en utilisant que $y(T) \to 0$, on obtient

$$y(t) = -\int_t^{+\infty} A(s)y(s) \, ds.$$

On en déduit

$$\|y(t)\| \leq \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, \|y(s)\| \, ds.$$

En posant

$$m(t) = \sup_{u \geq t} \|y(u)\|,$$

qui est bien défini car $\|y(\cdot)\|$ est continue et $y(t) \to 0$ en $+\infty$, on obtient

$$m(t) \leq m(t) \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds.$$

Et comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable, on a pour t assez grand,

$$\int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds < 1,$$

donc nécessairement $m(t) = 0$. Ainsi $y(t) = 0$ pour t assez grand, puis par unicité des solutions, $y \equiv 0$. Donc $y_0 = 0$.

Ainsi θ est injective.

Comme θ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie n, elle est bijective.

Donc θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

□