TD d'analyse 6 : espaces de Hilbert 1 et 2

Exercice 1. Soit $(H, \|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $x \in H$ on a $\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| = \sup_{\|y\| \leq 1} \mathrm{Re}\langle x, y \rangle$.

Exercice 2.

(1) Soit $(E, \|\cdot\})$ un espace vectoriel normé. Montrer que c'est un espace pré-hilbertien si et seulement si on a l'identité du parallélogramme :
$$\forall x, y \in E, \qquad \frac{1}{2}\|x+y\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(2) Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace pré-hilbertien. Montrer que pour $x, y \in H$ on a
$$\|x\| = \|y\| = \|\frac{x+y}{2}\| \Longrightarrow x = y.$$
Comment peut on interpréter géométriquement ce résultat ?

(3) Montrer que $L^p([0,1])$ n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$.
Indication. On pourra montrer l'énoncé général suivant : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe deux parties mesurables $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ qui sont disjointes et de mesure finie non-nulle. Montrer que $L^p(\mu)$ n'est pas un Hilbert si $p \neq 2$.

Exercice 3. (Base de Walsh) Soit $n \geq 1$ et $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$, que l'on muni de la mesure de comptage normalisée, $\mu_n(\{x\}) = \frac{1}{2^n}$, c'est-à-dire, pour $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$,
$$\int f d\mu_n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x_1, \ldots, x_n).$$

(1) Montrer que $L^2(\mu_n) = \mathbb{R}^{\Omega_n}$, et que c'est un espace de dimension finie que l'on précisera.

(2) Montrer que $\mu_n = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_1$ où μ_1 est la mesure sur $\{-1, 1\}$ définie par $\mu_1(\{1\}) = \mu_1(\{-1\}) = \frac{1}{2}$.

(3) Pour pour une partie $S \subset \{1, \ldots, n\} =: [n]$ une partie non vide, on introduit $\chi_S : \Omega_n \to \mathbb{R}$ qui est défini par $\chi_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$. Pour S vide on pose $\chi_\emptyset \equiv 1$. Montrer que $\{\chi_S, S \subset [n]\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mu)$.

Remarque : on peut vérifier que les $\{\chi_S, S \subset [n]\}$ sont les caractères sur le groupe (abélien) multiplicatif $(\{-1,1\}^n, \times)$. Ils forment le groupe dual (que l'on peut aussi identifier à $(\mathcal{P}([n], \Delta))$. On vient de voir un exemple de groupe dual G^* d'un groupe abélien (fini) G qui forme une base orthonormée de $L^2(G)$.

Exercice 4. (Espace de Bergman) On travaille avec les boréliens et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont holomorphes et de module au carré intégrable, i.e. $H(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \; ; \; f \text{ holomorphe}\}$.

(1) Pour $z \in \Omega$, l'évaluation $f \to f(z)$ est-elle continue sur $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$?

(2) Montrer que, si le disque $D(z,r)$ est inclus dans Ω, alors pour tout $f \in H(\Omega)$, $|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(z,r)} |f|^2$.

(3) En déduire que, si K est un compact inclus dans Ω, il existe une constante c_K telle que pour tout $f \in H(\Omega)$,

$$\sup_K |f| \leq c_K \, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(4) Montrer que $(H(\Omega), \|.\|_{L^2(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

(5) Décrire $H(\mathbb{C})$.

(6) Maintenant, on s'intéresse au cas du disque unité : $\Omega = D$. Montrer que les fonctions $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base hilbertienne de $H(D)$.

(7) En étudiant la forme linéaire $\phi_z : f \mapsto f(z)$, démontrer la formule :

$$\forall f \in H(D), \quad \forall z \in D, \quad f(z) = \int_D \frac{f(w)}{\pi(1-\bar{w}z)^2} d\lambda(w),$$

Exercice 5. (Partition finie, moyennes) Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Supposons que $A_1, \ldots, A_N$ soit une partition de Ω en ensembles de la tribu $\mathcal{A}$, tels que $\mu(A_j) > 0$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. Soit F l'ensemble des fonctions (réelles) qui sont constantes sur chaque ensemble de la partition.

(1) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions finies d'ensembles A_j, $j = 1, \ldots, N$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous tribu de $\mathcal{A}$, et qu'une fonction $\mathcal{A}$-mesurable est $\mathcal{C}$-mesurable si et seulement elle appartient à F.

(2) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(3) Montrer que la famille de fonctions $f_j = \mu(A_j)^{-1/2}\, 1_{A_j}, \quad j = 1, \ldots, N$ est une base orthonormée de F.

(4) Donner une formule pour la projection d'une fonction $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur F.

Exercice 6. (Shift à droite sur ℓ_2) Soit $T : \ell_2(\mathbb{Z}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ l'application définie par

$$T((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

(1) Montrer que T est une application linéaire continue, et que c'est une isométrie de $\ell_2(\mathbb{Z})$ sur $\ell_2(\mathbb{Z})$.

(2) Quel est l'inverse de T ? On note $S = T^{-1}$ cet inverse. Montrer que pour $x, y \in \ell_2(\mathbb{Z})$ on a $Tx \cdot y = x \cdot Sy$.

(3) Que valent, pour $n \in \mathbb{Z}$, $T^n e_0$ et $S^n e_n$? (Ici les puissances sont définies par compositions successives, avec la convention qu'une puissance $k < 0$ est la puissance $|k|$ de l'inverse). En déduire que pour $a \in \ell_2(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T^n a \cdot e_n = a_0.$$

(4) Montrer que T n'a pas de valeur propre. (En d'autre termes, T n'a pas de sous-espace stable de dimension 1).

(5) Soit

$$H = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \; ; \; a_k = 0, \; \forall k \leq 0\}$$

Montrer que H est un sous espace fermé de $\ell_2(\mathbb{Z})$, et que $TH \subset H$. A-t-on $TH = H$?

Exercice 7. Montrer qu'un endomorphisme continu sur un espace de Hilbert H est déterminé par son action sur une base hilbertienne de H.

Notation : Si $(H, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert, on note $B(H) = L(H)$ l'espace des endomorphismes continus de H dans H, muni de la norme d'opérateur associé, notée également, avec un petit abus d'écriture, $\|\cdot\|$, i.e. $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$.

Exercice 8. Montrer que si H est un espace de Hilbert de dimension ≥ 2, alors $B(H)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 9. (Adjoint) Soit $(H, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On se donne $u \in B(H)$. Montrer que pour $y \in H$ donné, il existe un et un seul vecteur v tel que

$$\forall x \in H \qquad \langle u(x), y\rangle = \langle x, v\rangle.$$

On note $u^*(y)$ ce vecteur v.

Montrer qu'alors l'application $u^* : y \to u^*(y)$ est linéaire continue, i.e. $u^* \in B(H)$, et que $\|u\| = \|u^*\|$.

Montrer que pour $u, v \in B(H)$, on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

Exercice 10. (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour $u \in B(H)$, on pose : $\|u\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \|u(e_i)\|^2}$, puis

$$\mathcal{HS}(H) = \{u \in B(H) \; ; \; \|u\|_{HS} < +\infty\}.$$

(1) Soient $u \in B(H)$ et (f_j) une (autre) base hilbertienne de H. Vérifier la formule : $\sum\limits_{i,j} |\langle u(e_i), f_j\rangle|^2 = \|u\|_{HS}^2$; en déduire que $\|u^*\|_{HS} = \|u\|_{HS}$ et que $\|u\|_{HS}$ ne dépend pas de la base hilbertienne (e_i) choisie.

(2) Montrer que $\mathcal{HS}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $B(H)$.

(3) Montrer que tout $u \in \mathcal{HS}(H)$ vérifie $\|u\| \leq \|u\|_{HS}$.

(4) Montrer que $(\mathcal{HS}(H), \|.\|_{HS})$ est un espace de Banach.

Exercice 11. (Opérateurs à noyau L^2)

(1) Soit A l'ensemble des fonctions du type $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$, où f et g sont des éléments de $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que Vect A est dense dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(2) En déduire que si (e_i) est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$, les fonctions $e_{ij} : (x, y) \mapsto e_i(x)e_j(y)$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(3) Soit $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$$

définit un opérateur de Hilbert-Schmidt u_K sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, avec $\|u_K\|_{HS} = \|K\|_2$.

(4) Montrer que tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R})$ s'écrivent ainsi.