TD Analyse

Thomas Goossaert-Cosyn

28 février 2026

1 Suites et séries

Exercice 9. (Recherche d'équivalent) On se donne $u_0 > 0$ et on construit par récurrence la suite $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour $n \geq 0$. Donner un équivalent à la suite u_n.

Démonstration. Par une récurrence immédiate on voit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
Ainsi on a une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour la fonction $f \mapsto x + \frac{1}{x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et au-dessus de l'identité. Donc $(u_n)_n$ est croissante.
Soit elle diverge vers $+\infty$, soit elle converge vers une limite l solution de :

$$l = l + \frac{1}{l}$$

Cela n'est pas possible donc $u_n \to +\infty$
Pour trouver un équivalent, calculons :

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$$

On a donc :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \sim 2$$

Par le théorème de Césaro :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \sim 2$$

Et par télescopage :

$$u_n^2 \sim 2n$$

Conclusion :

$$u_n^2 \sim \sqrt{2n}$$

□

Exercice 24. Soit $u = (u_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels ou complexes, non nuls. On lui associe la suite des produits partiels $(p_n)_{n \geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $p_n = \prod_{k=1}^n u_k$. On dira que le produit infini de terme général u_n (ou de manière abrégée $\prod u_n$) converge lorsque la suite (p_n) admet une limite **finie non nulle**.

1. Montrer que si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 1. Étudier la réciproque en simplifiant $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$.
   (a) Calculer $(1 - z^2) \prod_{k=1}^n (1 + z^{2^k})$.
   (b) En déduire que le produit infini $\prod (1 + z^{2^n})$ converge et donner la valeur du produit.
3. On suppose $u = (u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle avec $u_n > 0$ pour tout n. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \log u_n$ converge.
4. On suppose $u = (u_n)_{n \geq 1}$ est une suite qui converge vers 1 avec $u_n > 1$ pour tout n. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum (u_n - 1)$ converge.

Démonstration. 1. — Si $\prod u_n$ converge, alors $p_n \to L \in \mathbb{C}^*$. Pour $n > 1$, on a $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$. Par passage à la limite, $u_n \to \frac{L}{L} = 1$.

— Soit $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a bien $u_n \to 1$. Cependant par télescopage :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = n + 1$$

Comme $p_n \to +\infty$, le produit infini diverge. La réciproque est donc fausse.

2. (a) Notons $P_n = (1-z^2)\prod_{k=1}^{n}(1+z^{2^k})$. Par récurrence : Pour $n=1$, $(1-z^2)(1+z^2) = 1-z^4 = 1-z^{2^2}$. En supposant $P_n = 1-z^{2^{n+1}}$, on a $P_{n+1} = P_n(1+z^{2^{n+1}}) = (1-z^{2^{n+1}})(1+z^{2^{n+1}}) = 1-(z^{2^{n+1}})^2 = 1-z^{2^{n+2}}$. L'expression vaut donc $1-z^{2^{n+1}}$.

   (b) Comme $|z|<1$, $z^{2^{n+1}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Ainsi $P_n \to 1$. Le produit infini converge vers $\frac{1}{1-z^2}$.

3. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log u_k$. On a $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = \exp(S_n)$. Par continuité de l'exponentielle et du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, (p_n) converge vers $L > 0$ si et seulement si (S_n) converge vers $\log L$.

4. Posons $a_n = u_n - 1 > 0$. On a $u_n \to 1 \implies a_n \to 0$. D'après la question précédente, le produit converge ssi $\sum \log(1+a_n)$ converge. Or, au voisinage de 0, $\log(1+a_n) \sim a_n$. Comme ce sont des séries à termes positifs, par théorème de comparaison, elles sont de même nature. Ainsi, $\prod u_n$ converge ssi $\sum(u_n - 1)$ converge.

$\square$

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 24. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que pour tout $x \in I$ on a

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h} > 0.$$

Montrer que f est convexe sur I.

Le résultat reste vrai si on suppose seulement que la $\liminf$ est ≥ 0. Voyez-vous comment faire ?

Démonstration. Posons les fonctions pentes

$$s_+(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, s_-(x,h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

L'hypothèse de l'énoncé se réécrit alors

$$\forall x \in I, \liminf_{h \to 0^+} s_+(x,h) - s_-(x,h) > 0$$

Pour passer de cette propriété locale à une inégalité globale, considérons $[a,c] \subset I$ et $[x_0 = a, ..., x_n = c]$ une subdivision de pas $\Delta = \frac{c-a}{n}$.
On définit la suite de pentes locales par :

$$s_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta}$$

L'hypothèse donne don que $s_0 < s_1 < ... < s_{n-1}$
Soit $b \in [a,c]$, n suffisamment grand et k tel que $x_k \leq b < x_{k+1}$, alors la croissance des pentes entraine

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq s_k < \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

D'où la convexité de f. □

3 Analyse complexe

Exercice 11. 1. Soit φ une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On peut la voir comme une application de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Montrer que son déterminant jacobien au point z vaut $|\varphi'(z)|^2$.

2. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Vérifier que la formule $\varphi(z) = \frac{2z-i}{iz+2}$ définit une bijection holomorphe de D sur D.

3. Utiliser la formule de changement de variables pour en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{(x^2 + (y-2)^2)^2}.$$

Démonstration. 1. Déterminant Jacobien : Posons $z = x + iy$ et $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. La matrice jacobienne de φ vue comme application de $\mathbb{R}^2$ est :

$$J_\varphi(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Comme φ est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Le déterminant vaut donc :

$$\det(J_\varphi(z)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Or, par définition de la dérivée complexe, $\varphi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Ainsi, $|\varphi'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$. On a bien $\det(J_\varphi(z)) = |\varphi'(z)|^2$.

2. Bijection de D sur D : φ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$. Comme $2i \notin D$, φ est holomorphe sur D.
Son inverse est donnée par $\varphi^{-1}(z) = \frac{2z+i}{2-iz}$
Pour le bord $|z| = 1$, on calcule $|\varphi(z)|^2 = \frac{|2z-i|^2}{|iz+2|^2}$.

$$|2z - i|^2 = (2z - i)(2\bar{z} + i) = 4|z|^2 + 2zi - 2\bar{z}i + 1 = 5 + 2i(z - \bar{z})$$

$$|iz + 2|^2 = (iz + 2)(-i\bar{z} + 2) = |z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} + 4 = 5 + 2i(z - \bar{z})$$

Ainsi, si $|z| = 1$, alors $|\varphi(z)| = 1$. Par le principe du maximum (et comme $\varphi(i/2) = 0$), φ envoie D dans D. C'est une bijection car par les mêmes arguments, son inverse est envoie également D sur D.

3. Calcul de l'intégrale : Remarquons que $|iz + 2|^2 = |i(z - 2i)|^2 = |z - 2i|^2 = x^2 + (y - 2)^2$. L'intégrande est donc $\frac{1}{|iz+2|^4}$. Calculons la dérivée : $\varphi'(z) = \frac{2(iz+2)-i(2z-i)}{(iz+2)^2} = \frac{2iz+4-2iz+i^2}{(iz+2)^2} = \frac{3}{(iz+2)^2}$. On en déduit que $|\varphi'(z)|^2 = \frac{9}{|iz+2|^4}$, soit $\frac{1}{(x^2+(y-2)^2)^2} = \frac{1}{9}|\varphi'(z)|^2$. Par changement de variables $w = \varphi(z)$:

$$I = \iint_D \frac{1}{9}|\varphi'(z)|^2 dxdy = \frac{1}{9}\iint_{\varphi(D)} dudv$$

Comme $\varphi(D) = D$, l'intégrale devient :

$$I = \frac{1}{9}\text{Aire}(D) = \frac{\pi}{9}$$

□

Exercice 13. 1. Soient $R > \epsilon > 0$ et γ un lacet qui paramètre le bord de l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon < |z| < R \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ dans le sens trigonométrique. Montrer que l'intégrale $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$ est nulle.

2. En déduire la formule classique $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. 1. On pose $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'ouvert Ω est un demi-anneau situé dans le demi-plan supérieur. Son adhérence $\overline{\Omega}$ est un compact qui ne contient pas l'origine ($0 \notin \overline{\Omega}$ car $\epsilon > 0$). Ainsi, f est holomorphe sur un ouvert simplement connexe contenant le compact $\overline{\Omega}$. D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un lacet fermé (ici le bord de Ω orienté positivement) est nulle :

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

2. Le lacet γ se décompose en quatre chemins :
 - γ_1 : le segment réel $[\epsilon, R]$, paramétré par $z(t) = t$ avec $t \in [\epsilon, R]$.
 - γ_R : le grand demi-cercle, paramétré par $z(\theta) = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi]$.
 - γ_2 : le segment réel $[-R, -\epsilon]$, paramétré par $z(t) = t$ avec $t \in [-R, -\epsilon]$.
 - γ_ϵ : le petit demi-cercle parcouru dans le sens anti-trigonométrique (pour fermer le lacet), paramétré par $z(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$ avec θ allant de π à 0.

 L'équation de la question 1 s'écrit :

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz = 0$$

 a) Regroupement des intégrales sur l'axe réel :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_\epsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{it}}{t} dt \\ &= \int_\epsilon^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_R^\epsilon \frac{e^{-iu}}{-u} (-du) \quad \text{(changement de variable } u = -t) \\ &= \int_\epsilon^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} dt = 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin(t)}{t} dt \end{aligned}$$

 b) Majoration sur le grand cercle γ_R (Lemme de Jordan) :

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} e^{iR\cos\theta} d\theta$$

 Majorons le module de cette intégrale :

$$|I_R| \leq \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

 Sur $[0, \pi/2]$, la concavité du sinus donne $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$, d'où :

$$|I_R| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta = 2 \left[\frac{-\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{R} \left(1 - e^{-R}\right)$$

 On a donc bien $\lim_{R \to +\infty} I_R = 0$.
 c) Étude sur le petit cercle γ_ϵ : Autour de 0, on peut écrire $e^{iz} = 1 + iz + o(z)$. Donc $f(z) = \frac{1}{z} + i + o(1)$. L'intégrale devient :

$$I_\epsilon = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz$$

où g est une fonction bornée au voisinage de 0. La longueur du chemin γ_ϵ étant $\pi\epsilon$, l'intégrale de la fonction bornée tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$. Pour la partie singulière, on paramètre par $z(\theta) = \epsilon e^{i\theta}$ avec θ allant de π à 0 (sens horaire) :

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{1}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_\pi^0 d\theta = -i\pi$$

Ainsi, $\lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon = -i\pi$.

d) Conclusion : En passant à la limite quand $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$ dans l'équation de Cauchy initiale, on obtient :

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + 0 - i\pi = 0$$

En divisant par $2i$, on trouve finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

4 Topologie

Exercice 3. Soit K, L deux espaces métriques compact et $\pi : K \to L$ une bijection continue. Montrer que π est un homéomorphisme entre K et L

Démonstration. Pour prouver que π est un homéomorphisme, il suffit de montrer que sa réciproque $\pi^{-1} : L \to K$ est continue.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L convergeant vers un élément $y \in L$. Posons :

$$x_n = \pi^{-1}(y_n) \quad \text{et} \quad x = \pi^{-1}(y)$$

Montrons que la suite (x_n) converge vers x dans K.

La suite (x_n) est une suite d'éléments de l'espace métrique compact K. Par Bolzano-Weierstrass, de toute suite d'un compact, on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(x_{\phi(n)})$ une telle sous-suite, et notons $z \in K$ sa limite :

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} z$$

L'application π est continue sur K. Par caractérisation séquentielle de la continuité, l'image de la sous-suite doit converger vers l'image de sa limite :

$$\pi(x_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(z)$$

Or, par construction, $\pi(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$.

Comme la suite parente (y_n) converge vers y, toute sous-suite extraite converge également vers y. On a donc, par unicité de la limite dans L :

$$\pi(z) = y$$

Puisque π est une bijection, chaque élément possède un unique antécédent. Sachant que $\pi(x) = y$, l'injectivité de π impose :

$$z = x$$

Nous avons montré que toute sous-suite convergente de (x_n) converge nécessairement vers x. Dans un espace compact, si une suite possède une unique valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.

Ainsi, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, ce qui prouve que π^{-1} est continue en tout point $y \in L$.

Conclusion : π est une bijection continue dont la réciproque est continue, c'est donc un homéomorphisme. $\square$

5 Intégration

Exercice 4. On travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on se donne une fonction continue par morceaux (par exemple) sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que si f est positive, on a, lorsque $R \to +\infty$,

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) Montrer que si f est intégrable, on a, lorsque $R \to +\infty$,

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g intégrable, bornée et à support compact telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. **(1)** Supposons f mesurable positive. Pour $R > 0$, posons

$$f_R = f \mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors $(f_R)_{R>0}$ est une famille croissante de fonctions mesurables positives et

$$f_R(x) \uparrow f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{\mathbb{R}} \lim_{R\to+\infty} f_R = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{-R}^{R} f.$$

On en déduit

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) Supposons maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $|f|$ est intégrable. On applique le résultat précédent à la fonction positive $|f|$:

$$\int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f = \int_{|x|>R} f(x)\,dx.$$

Donc

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f \right| \leq \int_{|x|>R} |f|.$$

Or

$$\int_{|x|>R} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f| - \int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
Étape 1 : troncature du support.
D'après le point (2), il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{|x|>R} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons

$$f_1 = f\mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_1| = \int_{|x|>R} |f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Étape 2 : troncature des valeurs.
Pour $M > 0$, posons

$$f_{1,M}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } |f_1(x)| \le M, \\ M\,\mathrm{sgn}(f_1(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_{1,M}$ est bornée par M et a toujours son support dans $[-R, R]$.
Comme $f_1 \in L^1$, on a

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } M \to +\infty.$$

Donc il existe $M > 0$ tel que

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$|f_1 - f_{1,M}| \le |f_1|\mathbf{1}_{\{|f_1|>M\}},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_{1,M}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclusion.
Posons $g = f_{1,M}$. Alors g est intégrable, bornée, à support compact et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \le \int_{\mathbb{R}} |f - f_1| + \int_{\mathbb{R}} |f_1 - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration. $\square$

6 Espaces de Hilbert

Exercice 10. (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) Soit H un espace de Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour $u \in B(H)$, on pose :

$$\|u\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} \|u(e_i)\|^2}, \text{ puis } \mathcal{HS}(H) = \{u \in B(H) \mid \|u\|_{HS} < +\infty\}.$$

1. Soient $u \in B(H)$ et (f_j) une (autre) base hilbertienne de H. Vérifier la formule :
$$\sum_{i,j} |\langle u(e_i), f_j\rangle|^2 = \|u\|_{HS}^2;$$
en déduire que $\|u^*\|_{HS} = \|u\|_{HS}$ et que $\|u\|_{HS}$ ne dépend pas de la base hilbertienne (e_i) choisie.
2. Montrer que $\mathcal{HS}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $B(H)$.
3. Montrer que tout $u \in \mathcal{HS}(H)$ vérifie $\|u\| \leq \|u\|_{HS}$.
4. Montrer que $(\mathcal{HS}(H), \|\cdot\|_{HS})$ est un espace de Banach.

Démonstration. 1. Fixons $i \in \mathbb{N}$. Comme (f_j) est une base hilbertienne, l'égalité de Parseval donne :
$$\|u(e_i)\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} |\langle u(e_i), f_j\rangle|^2.$$
En sommant sur i, on obtient :
$$\sum_{i,j} |\langle u(e_i), f_j\rangle|^2 = \sum_i \|u(e_i)\|^2 = \|u\|_{HS}^2.$$
Par ailleurs, on sait que $\langle u(e_i), f_j\rangle = \langle e_i, u^*(f_j)\rangle = \overline{\langle u^*(f_j), e_i\rangle}$. Donc :
$$\sum_{i,j} |\langle u(e_i), f_j\rangle|^2 = \sum_j \left(\sum_i |\langle u^*(f_j), e_i\rangle|^2\right).$$
En utilisant Parseval pour la base (e_i) cette fois, la somme intérieure vaut $\|u^*(f_j)\|^2$. On en déduit $\|u\|_{HS}^2 = \sum_j \|u^*(f_j)\|^2 = \|u^*\|_{HS}^2$ (calculé dans la base f). Cela prouve que la valeur ne dépend pas de la base de départ et que $\|u\|_{HS} = \|u^*\|_{HS}$.

2. Soit $u \in \mathcal{HS}(H)$ et $v \in B(H)$.
   — à gauche : $\|vu\|_{HS}^2 = \sum_i \|v(u(e_i))\|^2 \leq \sum_i \|v\|^2\|u(e_i)\|^2 = \|v\|^2\|u\|_{HS}^2 < \infty$.
   — à droite : en utilisant la question précédente : $\|uv\|_{HS} = \|(uv)^*\|_{HS} = \|v^*u^*\|_{HS}$. Comme $v^* \in B(H)$ et $u^* \in \mathcal{HS}(H)$, on se ramène au cas précédent : $\|uv\|_{HS} \leq \|v^*\|\|u^*\|_{HS} = \|v\|\|u\|_{HS} < \infty$.
3. Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. On peut compléter x en une base hilbertienne (g_i) telle que $g_0 = x$. Alors :
$$\|u(x)\|^2 = \|u(g_0)\|^2 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \|u(g_i)\|^2 = \|u\|_{HS}^2.$$
En prenant le supremum sur les x de norme 1, on obtient $\|u\| \leq \|u\|_{HS}$.
4. $\mathcal{HS}(H)$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $\langle u, v\rangle_{HS} = \sum_i \langle u(e_i), v(e_i)\rangle$. Montrons qu'il est complet. Soit (u_n) une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_{HS}$. D'après la Q3, elle est aussi de Cauchy pour $\|\cdot\|$, donc $u_n \to u$ dans $B(H)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^N \|(u_n - u_m)(e_i)\|^2 \leq \|u_n - u_m\|_{HS}^2$. En fixant n et en faisant tendre $m \to \infty$: $\sum_{i=0}^N \|(u_n - u)(e_i)\|^2 \leq \epsilon^2$. En faisant enfin tendre $N \to \infty$, on a $\|u_n - u\|_{HS} \leq \epsilon$. Ainsi $u_n - u \in \mathcal{HS}(H)$, donc $u \in \mathcal{HS}(H)$ et $u_n \to u$ pour la norme HS.

□

7 Séries de Fourier

Exercice 6. (Critère d'équirépartition) On se donne une suite (x_n) de réels telle que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} = 0.$$

Montrer que pour toute fonction f continue 2π-périodique on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Démonstration. Étape 1 : Cas des polynômes trigonométriques
Soit P un polynôme trigonométrique. Par définition, il existe un entier $M \geq 0$ et des coefficients complexes $(c_k)_{-M\leq k\leq M}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx}.$$

Calculons la moyenne de P sur les N premiers termes de la suite (x_n) :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx_n} = \sum_{k=-M}^{M} c_k \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n}\right).$$

Par hypothèse, pour tout $k \neq 0$, on a $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} = 0$. Pour $k = 0$, la moyenne vaut exactement 1 quel que soit N. Par linéarité de la limite (la somme étant finie), on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) = c_0.$$

Par ailleurs, calculons l'intégrale de P sur une période :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)dt = \sum_{k=-M}^{M} c_k \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}dt\right) = c_0,$$

car l'intégrale de e^{ikt} sur $[0, 2\pi]$ est nulle pour $k \neq 0$, et vaut 2π pour $k = 0$. Le résultat est donc vérifié pour tout polynôme trigonométrique.

Étape 2 : Généralisation aux fonctions continues par densité
Soit f une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique (ou théorème de Stone-Weierstrass), il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Majorons la différence qui nous intéresse en insérant judicieusement le polynôme P et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\Delta_N &= \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(f(x_n) - P(x_n))\right|}_{A_N} + \underbrace{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(x_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)dt\right|}_{B_N} + \underbrace{\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P(t) - f(t))dt\right|}_{C}
\end{aligned}$$

Majorons chaque terme :

1. Le terme A_N : $A_N \leq \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}|f(x_n) - P(x_n)| \leq \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$.
2. Le terme C : $C \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|P(t) - f(t)|dt \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\|P - f\|_\infty dt \leq \varepsilon$.
3. Le terme B_N : Puisque le résultat a été démontré à l'étape 1 pour le polynôme P, on sait que $B_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Il existe donc un entier N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, on ait $B_N \leq \varepsilon$.

En regroupant ces majorations, on obtient que pour tout $N \geq N_0$:

$$\Delta_N \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

$\square$

8 Transformée de Fourier

Exercice 2. (Variante) Soit f une fonction intégrable nulle en dehors du segment $[-a, a]$, $a > 0$. Montrer que $\hat{f}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui de plus vérifie

$$|\hat{f}(iy)| \leq Ce^{2a|y|}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. 1. Extension holomorphe sur $\mathbb{C}$: La transformée de Fourier de f pour $\xi \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi}\, dt = \int_{-a}^{a} f(t)e^{-it\xi}\, dt$$

Pour étendre cette fonction au plan complexe, on définit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$F(z) = \int_{-a}^{a} f(t)e^{-itz}\, dt$$

Vérifions les conditions du théorème de dérivation sous le signe intégral (version holomorphe) :

— Pour presque tout $t \in [-a, a]$, la fonction $z \mapsto f(t)e^{-itz}$ est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$).

— La fonction $t \mapsto f(t)e^{-itz}$ est mesurable (et intégrable car $f \in L^1$ et l'exponentielle est bornée sur le segment $[-a, a]$ pour z fixé).

— Domination locale : Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $z \in K$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq M$. Pour $t \in [-a, a]$ et $z \in K$:

$$|f(t)e^{-itz}| = |f(t)| \cdot |e^{-it(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))}| = |f(t)|e^{t\mathrm{Im}(z)} \leq |f(t)|e^{aM}$$

La fonction $t \mapsto |f(t)|e^{aM}$ est intégrable sur $[-a, a]$.

Ainsi, F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncide avec $\hat{f}$ sur l'axe réel.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On calcule $\hat{f}(iy)$ en utilisant l'extension précédente :

$$|\hat{f}(iy)| = \left| \int_{-a}^{a} f(t)e^{-it(iy)}\, dt \right| = \left| \int_{-a}^{a} f(t)e^{ty}\, dt \right|$$

En utilisant l'inégalité triangulaire intégrale :

$$|\hat{f}(iy)| \leq \int_{-a}^{a} |f(t)|e^{ty}\, dt$$

Comme $t \in [-a, a]$, on a $ty \leq |t| \cdot |y| \leq a|y|$. L'exponentielle étant croissante :

$$e^{ty} \leq e^{a|y|}$$

D'où :

$$|\hat{f}(iy)| \leq \left(\int_{-a}^{a} |f(t)|\, dt \right) e^{a|y|}$$

En posant $C = \|f\|_1 = \int_{-a}^{a} |f(t)|\, dt$, on obtient $|\hat{f}(iy)| \leq Ce^{a|y|}$.

Enfin, puisque $a > 0$ et $|y| \geq 0$, on a $a|y| \leq 2a|y|$, ce qui implique $e^{a|y|} \leq e^{2a|y|}$. On a donc bien la majoration demandée :

$$|\hat{f}(iy)| \leq Ce^{2a|y|}$$

□

Exercice 5. (Polynômes et fonctions de Hermite) On travaille dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ associé à la mesure (gaussienne standard) de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ définie par $d\mu(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$h_n(x) = e^{x^2/2} g^{(n)}(x), \quad \text{où} \quad g(x) = e^{-x^2/2}.$$

1. Montrer que les fonctions h_n sont polynomiales. Déterminer leurs degrés et coefficients dominants.
2. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale de H et calculer la norme λ_n de chaque élément h_n.
3. On veut montrer que la famille $(\lambda_n^{-1}h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
   (a) Expliquer pourquoi il suffit de montrer que les polynômes sont denses dans H.
   (b) Pour $f \in H$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0)$. En déduire que si f est orthogonale à tous les polynômes, alors f est nulle.
   (d) Conclure.

Démonstration. 1. Par récurrence, montrons que $g^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

— Pour $n = 0$, $g^{(0)}(x) = e^{-x^2/2}$, donc $P_0(x) = 1$. La propriété est vraie.

— Supposons $g^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$. Alors :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}(P_n(x)e^{-x^2/2}) = (P_n'(x) - xP_n(x))e^{-x^2/2}$$

Ainsi $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - xP_n(x)$. Si P_n est de degré n et de coefficient dominant a_n, alors $-xP_n$ est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $-a_n$. Le terme P_n' est de degré $n-1$, il ne modifie pas le degré dominant.

Par construction, $h_n(x) = e^{x^2/2}(P_n(x)e^{-x^2/2}) = P_n(x)$. **Conclusion :** h_n est un polynôme de **degré** n et de **coefficient dominant** $(-1)^n$.

2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. Le produit scalaire dans H est :

$$\langle h_n, h_m\rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{x^2/2}g^{(n)}(x)\right)h_m(x)e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g^{(n)}(x)h_m(x)dx$$

Par intégrations par parties successives (n fois), les termes de bord s'annulent car les dérivées de la gaussienne tendent vers 0 :

$$\langle h_n, h_m\rangle_\mu = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)h_m^{(n)}(x)dx$$

Comme $\deg(h_m) = m < n$, on a $h_m^{(n)}(x) = 0$, donc $\langle h_n, h_m\rangle_\mu = 0$. La famille est orthogonale.

Pour la norme $\lambda_n^2 = \langle h_n, h_n\rangle_\mu$:

$$\lambda_n^2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)h_n^{(n)}(x)dx$$

Or $h_n(x) = (-1)^n x^n + \dots$, donc $h_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$. D'où :

$$\lambda_n^2 = \frac{(-1)^n(-1)^n n!}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = n!$$

Conclusion : $\lambda_n = \sqrt{n!}$.

3.a) Puisque $\deg(h_n) = n$, toute combinaison linéaire des h_k ($k \leq n$) décrit l'espace des polynômes de degré au plus n. Si les polynômes sont denses dans H, alors l'adhérence de $\mathrm{Vect}(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est H. Comme la famille est orthonormale (après division par λ_n), c'est une base hilbertienne.

3.b) $f \in H$ signifie $\int |f|^2 d\mu < \infty$. $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$.
Par Cauchy-Schwarz, sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}(\xi) = \int f(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}dx$ est bien définie car $\psi_f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int |f(x)|e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}\int |f(x)|e^{-x^2/4}\frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}}dx \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_H\|e^{-x^2/4}\|_H < \infty$$

L'extension holomorphe $F(z) = \int f(x)e^{-x^2/2}e^{-ixz}dx$ pour $z \in \mathbb{C}$ est justifiée par le fait que pour $z = u + iv$, $|e^{-ixz}| = e^{xv}$. Le terme $e^{-x^2/2}$ assure la convergence et la domination pour tout $z \in \mathbb{C}$ (croissance exponentielle vs décroissance gaussienne).

3.c) On a

$$\widehat{\psi_f}^{(n)}(0) = \int f(x)e^{-x^2/2}(-ix)^n dx = (-i)^n\sqrt{2\pi}\int f(x)x^n\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = (-i)^n\sqrt{2\pi}\langle f, x^n\rangle_\mu$$

Si f est orthogonale à tous les polynômes, alors $\langle f, x^n\rangle_\mu = 0$ pour tout n, donc $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0) = 0$. Comme $\widehat{\psi_f}$ est une fonction analytique (holomorphe sur $\mathbb{C}$), ses coefficients de Taylor en 0 sont tous nuls, donc $\widehat{\psi_f} \equiv 0$. Par injectivité de la transformée de Fourier, $\psi_f = 0$ p.p., donc $f = 0$ p.p.

3.d) L'orthogonal de l'espace des polynômes est $\{0\}$, donc les polynômes sont denses dans H. La famille $(\lambda_n^{-1}h_n)$ est donc une base hilbertienne. $\square$

Exercice 6. (Échantillonnage de Shannon) On montre que les signaux à bande limitée peuvent se reconstruire à partir de la donnée d'une suite de valeurs. Formellement, on s'intéresse aux fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que (sans perte de généralité) $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $|x| > \pi$.
   (a) Rappeler pourquoi f admet un représentant continu, qui est en fait C^∞, sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)e^{ixt}dx.$$
   (b) **Heuristique** = à ne pas mettre sur une copie. Sans chercher à justifier les calculs, montrer que :
   $$\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-2i\pi kx},$$
   (On pourra considérer la fonction 2π-périodique g qui vaut $g(x) = \hat{f}(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ puis que
   $$f(t) = \sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}.$$
2. Soit u une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier L^2, encore notée $\hat{u}$, est nulle (presque partout) en dehors d'un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{u}$ est intégrable et que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\hat{\hat{u}}(x) = u(-x),$$
   et en déduire qu'il existe $v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $u = v$ presque partout.
3. On introduit l'espace
   $$B = \left\{u \in L^2(\mathbb{R});\ \hat{u} = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R}\setminus[-\pi, \pi]\right\}.$$
   Montrer que B est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$, sur lequel $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$.

4. On posera $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$,
$$s_n(x) = \sqrt{2\pi}\mathrm{sinc}(\pi(x-n)).$$
Montrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de B.
5. Montrer que pour tout $u \in B$ on a
$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)s_n$$
dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire avec convergence dans L^2 de la série, et que si on note encore u le représentant continu, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)s_n(x)$$
avec convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. (a) Comme $\hat{f}$ est à support compact, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\hat{f}| = o(\frac{1}{|x^n|})$ en $|x| \to \infty$, donc $f \in \mathcal{C}^\infty$.
En particulier, $\hat{f} \in L$ donc la formule d'inversion de Fourier donne
$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \hat{f}(x)e^{ixt}dx$$
(b) **Heuristique :** Sur $[-\pi,\pi]$, $\hat{f}$ peut être développée en série de Fourier. Les coefficients sont : $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(x)e^{-ikx}dx$. D'après la formule d'inversion en $t = k$, on voit que $c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(-k)$. Le développement est $\hat{f}(x) = \sum \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(-k)e^{ikx}$. En changeant k en $-k$, on obtient la formule de l'énoncé. En injectant cette somme dans l'intégrale d'inversion :
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-ikx}\right)e^{ixt}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(t-k)}dx$$
L'intégrale vaut $\left[\frac{e^{ix(t-k)}}{i(t-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sin(\pi(t-k))}{t-k}$. D'où le résultat.

2. Si $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ est à support compact K, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\int_K |\hat{u}(x)|dx \leq \sqrt{\mathrm{mes}(K)}\left(\int_K |\hat{u}(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty$$
Donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Puisque $\hat{u} \in L^1 \cap L^2$, la formule d'inversion L^1 s'applique presque partout. On applique le résultat de la question 1 pour $f = u$, et on définit v comme la transformée de Fourier inverse de $\hat{u}$.
3. Posons $\Psi : L^2 \to L^2$ l'application définie par $\Psi : u \to \widehat{u}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$ qui est une application linéaire continue par propriétés de la transformée de Fourier. On a donc $B = \ker\Psi$ qui est donc fermé. B est l'image réciproque du sous-espace fermé $\{\phi \in L^2 \mid \phi = 0 \text{ sur } \mathbb{R}\setminus[-\pi,\pi]\}$ par la transformée de Fourier. Comme cette dernière est une isométrie de L^2 (théorème de Plancherel), B est fermé.
Pour l'inégalité, si $u \in B$, $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$. Par Cauchy-Schwarz : $|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$. Donc $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$.
4. Posons pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$f_n(t) = e^{int}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$
Alors pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{f_n(x)} = \int_{\mathbb{R}} e^{i(n-x)t}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(t)dt = 2\pi s_n(x)$$

On en déduit ainsi $\widehat{s_n(x)} = e^{-inx}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)$ pp.
Par Plancherel, pour $n, m \in \mathbb{Z}$ distincts :

$$\langle s_n, s_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{s_n}\widehat{s_m}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{-i(n-m)x}dx = \delta_{n,m}$$

Donc $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.
Soit $u \in B$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}, \langle u, s_n\rangle = 0$. Alors par Plancherel $\forall n \in \mathbb{Z}, \langle \widehat{u}, \widehat{s_n}\rangle = 0$, c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \int_{[-\pi,\pi]} \widehat{u}(x)e^{-inx}dx = 0$$

En considérant $\tilde{\widehat{u}}$ étendue par 2π périodicité, on a $\forall n \in \mathbb{Z}, \tilde{u}(n) = 0$, donc $\tilde{u} = 0$ pp et donc $u = 0$ pp sur $[\pi, \pi]$. Ainsi la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans L^2. C'est donc une base hilbertienne de B.

5. Comme (s_n) est une base hilbertienne de B, tout $u \in B$ s'écrit $u = \sum\langle u, s_n\rangle s_n$ avec convergence dans L^2. Le coefficient est $\langle u, s_n\rangle = \int u(x)s_n(x)dx$. Par Plancherel, c'est aussi :

$$\langle \hat{u}, \hat{s}_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{u}(x)e^{inx}dx = u(n)$$

En utilisant le résultat de la première question.
Enfin, la convergence uniforme découle de l'inégalité sur les normes obtenue à la question 3 :

$$\|u - \sum_{n=-N}^{N} u(n)s_n\|_\infty \leq \|u - \sum_{n=-N}^{N} u(n)s_n\|_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

6. (Lien avec le théorème de Shannon en physique) En physique, le théorème de Shannon dit que pour ne pas perdre d'information lors de l'échantillonage d'un signal, il faut échantillonner à une fréquence supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal. Dans l'exercice, la fréquence maximale du signal est π puisque sa transformée de Fourier (ses fréquences) sont nulles au-delà. On doit donc échantillonner à une fréquence d'au moins 2π, donc une période $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ pour ne pas perdre d'information (c'est bien le cas ici). Lorsque la condition n'est pas respectée, on perd de l'information et on parle de repliement de spectre.

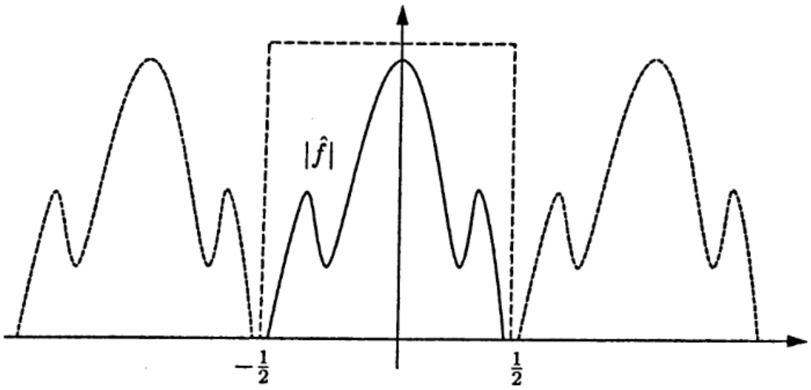

FIGURE 19. CAS FAVORABLE OÙ $2F \leq 1$.

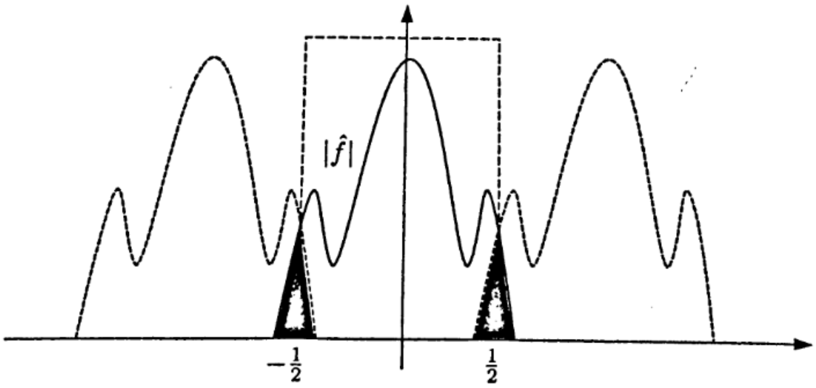

FIGURE 20. CAS DÉFAVORABLE OÙ $2F > 1$. REPLIEMENT DE SPECTRE.

□

9 Calcul différentiel

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 pour laquelle il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|F(x) - F(y)\| \geq \delta \|x - y\| \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que F est injective et que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
2. Montrer que dF est inversible en tout point de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert, et en déduire que F est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. 1. Injectivité et caractère fermé :

- Injectivité : Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(x) = F(y)$. L'inégalité donne $0 = \|F(x) - F(y)\| \geq \delta\|x - y\|$. Comme $\delta > 0$, on a nécessairement $\|x - y\| = 0$, soit $x = y$. F est donc injective.
- Fermé : Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $F(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers $y \in \mathbb{R}^n$. Il existe une suite (x_k) telle que $y_k = F(x_k)$. L'inégalité de l'énoncé implique :

$$\|x_k - x_p\| \leq \frac{1}{\delta}\|F(x_k) - F(x_p)\| = \frac{1}{\delta}\|y_k - y_p\|.$$

  Comme (y_k) converge, elle est de Cauchy. Par l'inégalité ci-dessus, (x_k) est aussi une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n$ est complet, $x_k \to x \in \mathbb{R}^n$. F étant continue (car C^1), on a $F(x_k) \to F(x)$, d'où $y = F(x)$. Ainsi $y \in F(\mathbb{R}^n)$, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

2. Inversibilité de la différentielle : Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle :

$$F(a + th) = F(a) + D_aF(th) + \|th\|\epsilon(th) = F(a) + tD_aF(h) + t\|h\|\epsilon(th) \text{ quand } t \to 0.$$

En utilisant l'inégalité de l'énoncé pour $x = a + th$ et $y = a$:

$$\|F(a + th) - F(a)\| \geq \delta\|th\| = \delta|t|\|h\|.$$

En divisant par $|t| > 0$ et en faisant tendre t vers 0 :

$$\|D_aF(h) + \|h\|\epsilon(ht)\| \geq \delta\|h\| \implies \|D_aF(h)\| \geq \delta\|h\|.$$

Si $D_aF(h) = 0$, alors $\delta\|h\| \leq 0$, donc $h = 0$. L'application linéaire D_aF est donc injective. Comme elle va de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même (dimension finie), elle est bijective, donc inversible.

3. Difféomorphisme global :

- Ouvert : En tout point $x \in \mathbb{R}^n$, F est de classe C^1 et sa différentielle est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme local. En particulier, l'image de tout ouvert est un ouvert. Comme $\mathbb{R}^n$ est ouvert, $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.
- Surjectivité : $F(\mathbb{R}^n)$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ non vide, à la fois ouverte et fermée. $\mathbb{R}^n$ étant connexe, les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$. Donc $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et F est surjective.
- Conclusion : F est une bijection de classe C^1 dont la différentielle est partout inversible. D'après le théorème d'inversion globale, F est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

□

Exercice 21. (Principe du maximum) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, de classe C^2 sur Ω.

1. Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure.
2. On suppose que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que le maximum de f sur $\overline{\Omega}$ ne peut pas être atteint en un point de Ω.

3. On suppose que $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que

$$\max_{\overline{\Omega}} f = \max_{\partial\Omega} f.$$

On pourra considérer $g(x) = f(x) + \frac{\epsilon}{2}|x|^2$.

4. Montrer que si f vérifie $\Delta f = 0$ dans Ω et $f = 0$ sur $\partial\Omega$, alors f est identiquement nulle.

Démonstration. 1. L'ensemble $\overline{\Omega}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, c'est donc un compact. Comme la fonction f est continue sur ce compact, le théorème des bornes atteintes assure que f est majorée et qu'elle atteint ses bornes (supérieure et inférieure) en au moins un point de $\overline{\Omega}$.

2. Supposons par l'absurde que f atteigne son maximum en un point $x_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert et f est C^2, les conditions nécessaires d'optimalité du second ordre s'appliquent :
   - Le gradient est nul : $\nabla f(x_0) = 0$.
   - La matrice Hessienne $H_f(x_0)$ est symétrique négative (ses valeurs propres sont ≤ 0).

   Or, le Laplacien est la trace de la matrice Hessienne : $\Delta f(x_0) = \mathrm{tr}(H_f(x_0))$. La trace d'une matrice symétrique négative est nécessairement inférieure ou égale à 0. Cela contredit l'hypothèse $\Delta f(x_0) > 0$. Le maximum est donc nécessairement atteint sur le bord $\partial\Omega$.

3. Soit $\epsilon > 0$. Posons $g(x) = f(x) + \frac{\epsilon}{2n}|x|^2$ (en adaptant l'indication pour simplifier le calcul). On a :

   $$\Delta g(x) = \Delta f(x) + \frac{\epsilon}{2n}\Delta(|x|^2) = \Delta f(x) + \frac{\epsilon}{2n} \cdot (2n) = \Delta f(x) + \epsilon.$$

   Comme $\Delta f \geq 0$, on a $\Delta g(x) \geq \epsilon > 0$. D'après la question 2, le maximum de g sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur $\partial\Omega$:

   $$\forall x \in \overline{\Omega}, \quad f(x) \leq g(x) \leq \max_{\partial\Omega} g = \max_{y\in\partial\Omega}\left(f(y) + \frac{\epsilon}{2n}|y|^2\right)$$

   Soit $R = \max_{y\in\partial\Omega}|y|$. On a $f(x) \leq \max_{\partial\Omega} f + \frac{\epsilon R^2}{2n}$. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $f(x) \leq \max_{\partial\Omega} f$ pour tout x, d'où l'égalité des maximums.

4. — Comme $\Delta f \geq 0$, le principe du maximum (Q3) donne : $\forall x \in \Omega, f(x) \leq \max_{\partial\Omega} f = 0$.
   - En considérant $-f$, on a $\Delta(-f) = -\Delta f = 0 \geq 0$. Le principe du maximum appliqué à $-f$ donne : $\forall x \in \Omega, -f(x) \leq \max_{\partial\Omega}(-f) = 0$, soit $f(x) \geq 0$.

   Ainsi, pour tout $x \in \Omega$, $0 \leq f(x) \leq 0$, donc f est identiquement nulle.

□

10 Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) = t^2 y(t) + t^2$, avec $y(0) = 1$.
2. $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$, avec $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
3. $y'(t) = Ay(t)$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. $y'(t) + e^{t-y(t)} = 0$, avec $y(0) = 0$.

Démonstration. 1. L'équation est $y'(t) - t^2 y(t) = t^2$. C'est une équation linéaire du premier ordre.

— Solution homogène : $y_h'(t) = t^2 y_h(t)$. Une primitive de t^2 est $\frac{t^3}{3}$. Donc $y_h(t) = Ce^{t^3/3}$.

— Solution particulière : On remarque la solution constante $y_p(t) = -1$ car $y_p' = 0$ et $t^2(-1) + t^2 = 0$.

— Solution générale : $y(t) = Ce^{t^3/3} - 1$.

— Condition initiale : $y(0) = 1 \implies Ce^0 - 1 = 1 \implies C = 2$.

La solution est $y(t) = 2e^{t^3/3} - 1$.

2. L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$. Les racines sont $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. La forme générale est $y(t) = e^{-t/2}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

— $y(0) = 0 \implies A = 0$. Donc $y(t) = Be^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

— $y'(t) = Be^{-t/2}\left[-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.

— $y'(0) = 1 \implies B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \implies B = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

La solution est $y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

3. Le système est $y'(t) = Ay(t)$. La solution est $y(t) = e^{tA}y(0)$. On décompose $A = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $2I$ et N commutent : $e^{tA} = e^{2tI}e^{tN} = e^{2t}e^{tN}$. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. Donc $e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur solution est $y(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $y(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ 1 + t \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. L'équation est $y'(t) = -e^t e^{-y(t)}$, ce qui s'écrit $e^{y(t)}y'(t) = -e^t$. En intégrant par rapport à t : $\int e^y dy = \int -e^t dt$. On obtient $e^{y(t)} = -e^t + C$. Condition initiale : $y(0) = 0 \implies e^0 = -e^0 + C \implies 1 = -1 + C \implies C = 2$. Ainsi $e^{y(t)} = 2 - e^t$. En passant au logarithme : La solution est $y(t) = \ln(2 - e^t)$, définie pour $t < \ln(2)$.

□

Exercice 3. Résoudre le problème différentiel suivant sur $\mathbb{R}$

$$2xy' = 1 - y$$

Démonstration. — On travaille sur $I \subset \mathbb{R}$. Posons $f(x, y) = \frac{1-y}{2x}$. f est :

— continue sur $I \times \mathbb{R}$

— $\mathcal{C}$ en y donc localement lipschitzienne en y

Par le théorème de Cauchy Lipschitz, pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution définie sur I.

$\square$

Exercice 6. Exercice 6. Soit une fonction continue $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$. On note $(y_1, \dots, y_n)$ une base de solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On notera aussi $M(t)$ la matrice $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer le wronskien $W(t) = \det M(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. On suppose maintenant que $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que toute solution y admet une limite en $+\infty$.
   (b) Soit θ l'application qui à $y_0 \in \mathbb{R}^n$ associe la limite en $+\infty$ de la solution y telle que $y(0) = y_0$. Montrer que θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. 1. La matrice fondamentale $M(t)$ vérifie

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

On pose $W(t) = \det M(t)$. Par la formule de dérivation du déterminant,

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

On obtient donc une équation différentielle scalaire :

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

En intégrant,

$$W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds \right).$$

En particulier, si $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de solutions, alors $W(0) \neq 0$, donc

$$W(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2.a) Soit y une solution. Elle vérifie

$$y(t) = y(0) + \int_0^t A(s)y(s)\, ds.$$

Pour $t \geq s \geq 0$,

$$y(t) - y(s) = \int_s^t A(\tau)y(\tau)\, d\tau.$$

On en déduit

$$\|y(t) - y(s)\| \leq \int_s^t \|A(\tau)\|\, \|y(\tau)\|\, d\tau.$$

Par ailleurs on a également,

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + \int_0^t \|A(s)y(s)\| ds$$

Donc en appliquant le lemme de Gronwall pour $\|A(\cdot)\|$ positive et $\|y(\cdot)\|$ continue, pour $t \geq 0$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma\right).$$

Comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la quantité

$$C = \exp\left(\int_0^{+\infty} \|A(\sigma)\| \, d\sigma\right)$$

est finie, et donc

$$\|y(t)\| \leq C\|y(0)\| \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ainsi y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Dès lors,

$$\|y(t) - y(s)\| \leq C\|y(0)\| \int_s^t \|A(\tau)\| \, d\tau.$$

Comme $\|A\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $s, t \to +\infty$.

Donc $y(t)$ est de Cauchy lorsque $t \to +\infty$, et comme $\mathbb{R}^n$ est complet, $y(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$.

2.b) On définit

$$\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \theta(y_0) = \lim_{t \to +\infty} y(t),$$

où y est l'unique solution telle que $y(0) = y_0$.

D'après la question précédente, θ est bien définie. Elle est linéaire car l'équation différentielle est linéaire.

Montrons qu'elle est injective.

Si $\theta(y_0) = 0$, alors $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. On écrit, pour $t \geq 0$,

$$y(t) = y(T) - \int_t^T A(s)y(s) \, ds.$$

En faisant tendre $T \to +\infty$ et en utilisant que $y(T) \to 0$, on obtient

$$y(t) = -\int_t^{+\infty} A(s)y(s) \, ds.$$

On en déduit

$$\|y(t)\| \leq \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, \|y(s)\| \, ds.$$

En posant

$$m(t) = \sup_{u \geq t} \|y(u)\|,$$

qui est bien défini car $\|y(\cdot)\|$ est continue et $y(t) \to 0$ en $+\infty$, on obtient

$$m(t) \leq m(t) \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds.$$

Et comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable, on a pour t assez grand,

$$\int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds < 1,$$

donc nécessairement $m(t) = 0$. Ainsi $y(t) = 0$ pour t assez grand, puis par unicité des solutions, $y \equiv 0$. Donc $y_0 = 0$.

Ainsi θ est injective.

Comme θ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie n, elle est bijective.

Donc θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

□