

# TD d'analyse 11 : équations différentielles

*version du 12 février 2026 à 16:33*

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

(1)  $y'(t) = t^2y(t) + t^2$ , avec  $y(0) = 1$ .

(2)  $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$ , avec  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

(3)  $y'(t) = A y(t)$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(4)  $y'(t) + e^{t-y(t)} = 0$ , avec  $y(0) = 0$ .

**Exercice 2.** Soit une fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de l'équation  $y'(t) = F(t, y(t))$  pour  $t \in ]-1, 1[$ . Montrer que, si  $y_1(0) < y_2(0)$ , alors  $y_1(t) < y_2(t)$  pour tout  $t \in ]-1, 1[$ .

**Exercice 3.** Parmi les deux problèmes différentiels suivants sur  $\mathbb{R}$ ,

$$2x^2 y' = 1 - y^2$$

ou

$$y' = \frac{1 - y^2}{2x^2}$$

choisir celui que vous préférez et le résoudre *rigoureusement*, i.e. en faisant appel à la théorie de Cauchy-Lipschitz (on représentera également graphiquement les solutions).

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ .

- (1) Supposons qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f(x)\| \geq \delta$ . Montrer que les solutions  $y$  de l'équation différentielle

$$y'(t) = \frac{\nabla f(y(t))}{\|\nabla f(y(t))\|^2}$$

sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et calculer explicitement  $f(y(t))$ .

- (2) En déduire que si  $f$  est une fonction majorée sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe une suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\nabla f(x_i)$  tend vers 0 quand  $i \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 5.**

- (1) Lemme de Grönwall. Soit  $C \in \mathbb{R}_+$ . Soient  $y$  et  $\phi$  des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}_+$  telles que

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq C + \int_a^t \phi(s)y(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq C \exp \left( \int_a^t \phi(s) ds \right).$$

- (2) Soit une fonction continue  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe une constante  $L > 0$  telle que, pour tous  $t \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}^n, x_2 \in \mathbb{R}^n$  :

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle  $y'(t) = F(t, y(t))$  sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.** Soit une fonction continue  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ . On note  $(y_1, \dots, y_n)$  une base de solutions de l'équation différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On notera aussi  $M(t)$  la matrice de  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) Calculer le wronskien  $W(t) = \det M(t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- (2) On suppose maintenant que  $\|A(\cdot)\|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - (a) Montrer que toute solution  $y$  admet une limite en  $+\infty$ .
  - (b) Soit  $\theta$  l'application qui à  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  associe la limite en  $+\infty$  de la solution  $y$  telle que  $y(0) = y_0$ . Montrer que  $\theta$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 7.** Soient  $p$  et  $q$  deux fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0.$$

- (1) Prouver que les zéros d'une solution  $y$  non identiquement nulle sont isolés.
- (2) Soient  $f$  et  $g$  deux solutions linéairement indépendantes. Montrer que la fonction  $w = fg' - f'g$  ne s'annule pas et vérifie la relation
 
$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}, \quad w(t) = w(t_0) e^{- \int_{t_0}^t p(s) ds}.$$
- (3) Soient  $a$  et  $b$  deux zéros consécutifs de  $f$ . Prouver que  $g$  s'annule en un point de  $]a, b[$ .

**Exercice 8.** Considérons deux équations différentielles homogènes :

$$(E_1) : y'' + p(x)y = 0, \quad (E_2) : z'' + q(x)z = 0,$$

où  $p, q$  sont continues sur un intervalle  $I = [a, b]$ , avec  $p(x) < q(x)$  sur  $I$ .

- (1) Montrer que toute solution non-nulle de  $(E_1)$ , ou de  $(E_2)$ , ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur  $[a, b]$ .
- (2) Montrer qu'entre deux zéros consécutifs d'une solution non-nulle  $y$  de  $(E_1)$  toute solution  $z$  de  $(E_2)$  admet un zéro.

**Exercice 9.** On se donne une fonction continue  $p$  sur  $[0, 1]$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère le problème suivant

$$-y'' + py = \lambda y \quad \text{sur } [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (\mathcal{E}_\lambda).$$

On note  $E_\lambda$  le sous-espace (OK ?), éventuellement réduit à  $\{0\}$ , des fonctions  $y$  qui sont  $C^2$  sur  $[0, 1]$  et qui sont solution de  $(\mathcal{E}_\lambda)$ .

- (1) Montrer que pour tout  $\lambda$ , l'espace  $E_\lambda$  est au plus de dimension 1.
- (2) Montrer que si  $y \in E_\lambda$  alors

$$\int_0^1 y'(t)^2 dt + \int_0^1 (p(t) - \lambda)y(t)^2 dt = 0.$$

- (3) Montrer qu'il existe  $\lambda_0$  tel que pour  $\lambda < \lambda_0$ , l'espace  $E_\lambda$  est réduit à  $\{0\}$ .
- (4) On considère  $\Psi : \mathcal{C}^2([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$  donné par

$$\Psi(y) = -y'' + py$$

On met par ailleurs sur  $\mathcal{C}([0, 1])$  le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ .

Montrer que pour  $y, z \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  vérifiant  $y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0$ ,

$$\langle \Psi(y), z \rangle = \langle y, \Psi(z) \rangle.$$

- (5) Montrer que si  $y \in E_\lambda$  et  $z \in E_\mu$  avec  $\mu \neq \lambda$ , alors  $y$  et  $z$  sont orthogonaux.