TD d'analyse : Transformée de Fourier

version du 29 janvier 2026

Exercice 1. (Une version du principe d'incertitude) Est-il possible d'avoir $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact (i.e. nulle en dehors d'un certain segment) et $\hat{f}$ à support compact ?

Exercice 2. (Variante) Soit f une fonction intégrable nulle en dehors du segment $[-a, a]$, $a > 0$. Montrer que $\hat{f}$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui de plus vérifie

$$|\hat{f}(iy)| \leq C\, e^{2a|y|}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Le théorème de Paley-Wiener (difficile) établit une réciproque de ce résultat.

Exercice 3. On se donne une variable aléatoire X, dont la loi admet une densité sur $\mathbb{R}$, et une variable gaussienne G. Montrer que si $X + G$ est une variable gaussienne, alors X est aussi gaussienne.

Exercice 4. Montrer que la transformée de Fourier L^2 de la fonction $t \to 2\dfrac{\sin(t)}{t}$ est égale à $1_{[-1,1]}$ presque partout.

Exercice 5. (Polynômes et fonctions de Hermite) On va travailler dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ associé à la mesure (gaussienne standard) de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ définie par $d\mu(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}}dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$h_n(x) = e^{x^2/2} g^{(n)}(x), \qquad \text{où} \qquad g(x) = e^{-x^2/2}.$$

(1) Montrer que les fonctions h_n sont polynômiales. Déterminer leurs degrés et coefficients dominants.

(2) Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale de H et calculer la norme λ_n de chaque élément h_n.

(3) On veut montrer que la famille $(\lambda_n^{-1} h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

  (a) Expliquer pourquoi il suffit de montrer que les polynômes sont denses dans H.

  (b) Pour $f \in H$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

  (c) Pour toute $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0)$. En déduire que si f est orthogonale à tous les polynômes, alors f est nulle.

  (d) Conclure.

(4) Montrer que les fonctions $\varphi_n : x \mapsto h_n(x)e^{-\frac{x^2}{4}}$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R}, dx)$, constituée de vecteurs propres de la transformée de Fourier.

À ξ fixé, on pourra faire intervenir l'intégrale $I(h) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{4}-(x+h)^2/2-ix\xi}dx.$

Exercice 6. (Échantillonnage de Shannon) On montrer que les signaux 'à bande limité' peuvent se reconstruire à partir de la donnée d'une suite de valeurs. Formellement, on s'intéresse aux fonctions dont la transformée de Fourier est à support compact.

(1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que (sans perte de généralité) $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $|x| > \pi$. Rappeler pourquoi f admet un représentant continu, qui est en fait C^∞, sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-\pi,\pi]} \hat{f}(x)e^{ixt}dx$$

(2) **Heuristique = à ne pas mettre sur une copie**. Sans chercher à justifier les calculs, montrez que :

$$\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{-2i\pi kx},$$

(On pourra considérer la fonction 2π-pérdioque g qui vaut $g(x) = \hat{f}(x)$ sur $[-\pi, \pi]$) puis que

$$f(t) = \sqrt{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) \frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}$$

(3) Soit u une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier L^2, encore notée $\hat{u}$, est nulle (presque partout) en dehors d'un segment de $\mathbb{R}$.
Montrer que $\hat{u}$ est intégrable et que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\hat{u}}(x) = u(-x),$$

et en déduire qu'il existe $v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $u = v$ presque partout.

(4) On introduit l'espace

$$B = \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}) \; ; \; \hat{u} = 0 \; pp \; \text{ sur } \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]\Big\}.$$

Montrer que B est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$, sur lequel $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$.

(5) On posera $\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ et pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$s_n(x) = \sqrt{2\pi}\operatorname{sinc}(\pi(x-n)).$$

Montrer que la famille $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de B.

(6) Montrer que pour tout $u \in B$ on a

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)s_n$$

dans $L^2(\mathbb{R})$, c-à-d avec convergence dans L^2 de la série, et que si on note encore u le représentant continu, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)s_n(x)$$

avec convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (Formule sommatoire de Poisson) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la classe de Schwartz.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n)$. Montrer que cette formule définit une fonction 2π-périodique et de classe C^∞.

(2) Exprimer les coefficients de Fourier de F en fonction de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f, définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

(3) En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

(4) À l'aide de cette formule, retrouver la formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

pour toute fonction g de la classe de Schwarz.
Indication : utiliser $f(x) = g(x)e^{-itx}$, où t est un paramètre réel.