

TD d'analyse 3 : Analyse complexe

Exercice 1. On pose pour $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = \bar{z} = x - iy \quad \text{et} \quad g(z) = |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Ces fonctions sont-elles \mathbb{C} -dérivables ?

Exercice 2. Soit $\sum u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal 1. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ la somme pour $x \in]-1, 1[$.

- (1) Peut-on dire que $\sum u_n$ CV ? Vous justifierez votre réponse.
- (2) Peut-on dire que $\sum u_n$ DV ? Vous justifierez votre réponse.
- (3) Peut-on dire que $f(x)$ a une limite lorsque $x \rightarrow 1^-$? Vous justifierez votre réponse.
- (4) On suppose que $\sum |u_n|$ CV. Démontrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[-1, 1]$.

Exercice 3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$. En déduire la valeur du rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 4. Notons $H_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière associée à la suite (H_n) ? Calculer explicitement sa somme, dans le disque de convergence.

Exercice 5. Etudier le développement en série entière autour de zéro de la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Exercice 6. Donner le rayon de convergence des séries ci-dessous, reconnaître si possible la somme et indiquer alors si cette somme admet un prolongement analytique sur un ouvert contenant le disque ouvert de convergence.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

Exercice 7. (Séries lacunaires et prolongement holomorphe)

- (1) On se donne une série entière $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence 1. On note $f(z)$ sa somme. On suppose que la série $\sum b_n$ diverge.

- (a) A-t-on que nécessairement que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1 ?
- (b) On suppose que les b_n sont réels et positifs ou nuls. Montrer que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1.
- (c) Montrer que le résultat précédent reste vrai lorsque les b_n sont réels positifs ou nuls à partir d'un certain rang.
- (2) On considère la série entière $\sum z^{2^k}$. On note f sa somme.
 - (a) Quel est son rayon de convergence ?
 - (b) Montrer que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1.
 - (c) Soit ξ une racine 2^n -ième de l'unité ($\xi^{2^n} = 1$), $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de ξ . *On pourra travailler avec la série entière $g(z) = f(\xi z)$.*
 - (d) Montrer que f n'admet de prolongement holomorphe au voisinage d'aucun point du cercle unité.

Exercice 8. (Un Tauber facile) Soit $\sum u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ sa somme pour $x \in]-1, 1[$. On fait les deux hypothèses suivantes :

- La suite nu_n tends vers zéro lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- La fonction $f(x)$ a une limite finie, notée $s \in \mathbb{R}$, lorsque $x \rightarrow 1^-$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors la série $\sum u_n$ converge et que sa somme vaut s .

- (1) Pour $x \in [0, 1[$ et $N \geq 1$, on pose $A(x, N) := f(x) - \sum_{n=0}^N u_n$.
 - (a) Montrer que pour $x \in [0, 1[$ et $n \geq 0$ on a $|x^n - 1| \leq n(1 - x)$.
 - (b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et $N \geq 1$

$$|A(x, N)| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^N |nu_n| + \frac{\sup\{|nu_n| ; n > N\}}{N(1 - x)}.$$

- (c) Montrer que $A(1 - \frac{1}{N}, N)$ tend vers zéro lorsque $N \rightarrow +\infty$.
- (2) En majorant $\sum_{n=0}^N u_n - s$ à l'aide de $f(x) - s$ et de $A(x, N)$ pour un x bien choisi, conclure.

Exercice 9.

- (1) Montrer que la formule $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-itz} dt$ définit une fonction entière.
- (2) Calculer $f(iy)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
- (3) En déduire la transformée de Fourier de la gaussienne.

Exercice 10.

- (1) Soit Log la détermination principale du logarithme, sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer qu'il existe une fonction g , holomorphe sur le disque unité, telle que, si $|z| < 1$, $\text{Log}(1+z) = z + z^2 g(z)$.
- (2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose $f_n(z) = (1 + z/n)^n$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers l'exponentielle sur les compacts de \mathbb{C} .

Exercice 11.

- (1) Soit φ une fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} . On peut la voir comme une application de $U \subset \mathbb{R}^2$ vers \mathbb{R}^2 . Montrer que son déterminant jacobien au point z vaut $|\varphi'(z)|^2$.
- (2) Soit $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. Vérifier que la formule $\varphi(z) = \frac{2z-i}{iz+2}$ définit une bijection holomorphe de D sur D .
- (3) Utiliser la formule de changement de variables pour en déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + (y-2)^2)^2}.$$

Exercice 12. On se donne une fonction $f(z) = \sum a_n z^n$ holomorphe sur le disque. Pour $r \in [0, 1]$ on pose $M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ et $S(r) = \sum |a_n| r^n$. Montrer que $M(r) \leq S(r)$ puis montrer que $S(r)$ est une fonction convexe de $\log(r)$, c'est-à-dire que la fonction $s \rightarrow S(e^s)$ est convexe.

Exercice 13.

- (1) Soient $R > \epsilon > 0$ et γ un lacet qui paramètre le bord de l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} / \epsilon < |z| < R \text{ et } \text{Im}(z) > 0\}$ dans le sens trigonométrique. Montrer que l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz$ est nulle.
- (2) En déduire la formule classique $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14. Soient $\Omega = \{x + iy / x, y \in \mathbb{R} \text{ et } |xy| < 1\}$ et f une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur Ω .

- (1) Vérifier qu'il existe une fonction h holomorphe sur Ω telle que $h' = \frac{f'}{f}$.
- (2) Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $f = e^g$.

Exercice 15.

- (1) Soit f une fonction entière sur \mathbb{C} à valeurs réelles. Montrer que f est constante.
- (2) Soit f une fonction entière telle que $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
- (3) Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| = O(|z|^\alpha)$ quand $|z| \rightarrow +\infty$, pour un certain réel α . Montrer que f est une fonction polynômiale.

- (4) Déterminer les fonctions entières f telle que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$. (On pourra étudier la singularité de $f(1/z)$ en $z = 0$.)

Exercice 16. Utiliser le théorème des résidus pour calculer $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$. Méthode : exprimer $\sin t$ en fonction de e^{it} afin de faire apparaître l'intégrale d'une fonction rationnelle sur un cercle.

Exercice 17. Retrouver que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ en utilisant la formule des résidus.

Exercice 18. Le but de cet exercice (difficile) est de montrer la formule, pour $x \in]0, 1[$,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Cette formule permet de montrer la formule dite *des compléments* pour la fonction Γ . On utilisera la représentation co-principale du logarithme, définie pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$, par $\text{Log}(z) = \log(r) + i\theta$. Ainsi pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$, on prendra $z^x = e^{x\text{Log}(z)}$.

Calculer l'intégrale précédente à l'aide de la formule des résidus pour la fonction $f(z) = \frac{1}{t^z(1+z)}$ et le contour définit comme suit : on commence à $i\epsilon$, puis on se déplace de $R > 0$ dans la partie réelle, jusqu'au point $(R, i\epsilon)$, donc, on repart ensuite 'vers la gauche' sur le cercle centré en zéro jusqu'à arriver au symétrique, à savoir $(R, -i\epsilon)$, puis on revient tout droit jusqu'à $-i\epsilon$, et enfin on retourne au point de départ en contournant (par la gauche) zéro, sur le demi-cercle de rayon ϵ donc. Vous avez compris quelque chose ? En séparant ce contour en quatre, on étudiera ce qui se passe lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$.

Exercice 19. (Transformation conforme du demi-plan sur le disque) Soit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

On s'intéresse à son comportement sur le **demi-plan supérieur** $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ et sa frontière $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$, ainsi que sur le **disque unité** $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et sa frontière $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- (1) Montrer que f est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
- (2) Soit $z \in \mathbb{H}$. Calculer $|f(z)|$ et en déduire que $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$.
- (3) Montrer que f est une bijection \mathbb{H} sur \mathbb{D} , trouver la fonction réciproque f^{-1} et vérifier qu'elle est aussi holomorphe sur \mathbb{D} .
- (4) Étudier le comportement de f sur la frontière \mathbb{R} : montrer que si $z \in \mathbb{R}$, alors $|f(z)| = 1$. Conclure que $f(\mathbb{R}) \subset \partial\mathbb{D}$.
- (5) Montrer que f est une bijection continue de $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ vers $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$.
- (6) Calculer l'image par f des ensembles ou points suivants :
 - a) $z = 0$, $z = i$
 - c) La droite $\Im(z) = y > 0$
 - d) Un demi-cercle centré sur l'axe réel

— e) Le segment $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$

Exercice 20. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité fermé \overline{D} . On suppose que $|f(z)| < 1$ pour tout nombre complexe z de module 1. Montrer qu'il existe un unique z_0 dans D tel que $z_0 = f(z_0)$.

Exercice 21. (Lemme de Schwarz) Soient $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$.

- (1) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. On pourra introduire la fonction g qui vaut $f'(0)$ en 0 et $g(z) = f(z)/z$ en dehors de zéro, et majorer g sur le cercle.
- (2) Montrer que $|f'(0)| \leq 1$ avec égalité si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in D$, $f(z) = e^{i\theta} z$.