TD d'analyse : Séries de Fourier

version du 19 décembre 2025

Exercice 1. Soit f une fonction continue, et C^1 par morceaux sur $[a,b]$. On note $d(f)$ la fonction égale à f' sur les intervalles où est elle bien définie, et on prend n'importe quoi aux points de la subdivision où f n'est pas dérivable. Cette fonction est souvent encore notée f' plutôt que $d(f)$, et elle est continue par morceaux. Montrer que pour toute fonction g C^1 sur $[a,b]$ (par exemple pour $g=1$) on a

$$\int_a^b g\, d(f) = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b g'\, f.$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On suppose que $\sum |k\hat{f}(k)| < \infty$. Montrer que f est de classe C^1.

Exercice 3. On suppose que la série trigonométrique $\sum a_k e_k$ converge dans $L^1(\mathbb{T})$. On note f sa somme. A-t-on nécessairement que $a_k = \hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$?

Exercice 4. On note F_n le noyau de Fejér.

(1) Rappeler pourquoi, pour tout $\delta \in (0,\pi)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} F_n(x) = 0$$

(2) Montrer que pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, $x \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{C}$,

$$f * F_n(x) - \ell = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi F_n(y)\big(f(x-y) + f(x+y) - 2\ell\big)\, dy.$$

et en déduire une condition suffisante pour que $f * F_n(x)$ ait une limite.

(3) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$F_n * f(x_0) \to f(x_0)$$

et en déduire que si la série de Fourier de f converge en x_0, alors sa somme vaut $f(x_0)$.

Exercice 5. (Principe de localisation) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(1) On suppose qu'il existe $\delta \in (0,\pi)$ tel que

$$\int_{[-\delta,\delta]} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty.$$

Montrer que $S_n(f)(0)$ tend vers 0.

On pourra par ailleurs s'amuser à montrer que ce résultat contient le Théorème de Dirichlet.

(2) On suppose que si f est nulle presque partout sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{T}$. Montrer que $S_n(f)$ converge vers 0 en tout point de I.

(3) En déduire que si deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ sont égales (presque partout) au voisinage d'un point $t_0 \in \mathbb{T}$, alors la série de Fourier de f en t_0 converge si et seulement si celle de g en t_0 converge, et que dans ce cas leur sommes sont égales. *Incroyable !*

Exercice 6. (Critère d'équirépartition) On se donne une suite (x_n) de réels tel que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{ikx_n} = 0.$$

Montrer que pour toute fonction f continue 2π-périodique on a

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f.$$

Exercice 7.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - x$ pour $x \in [0, \pi]$.

(a) Calculer la série de Fourier de f.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

(2) Calculez les coefficients de Fourier de la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(3) Montrer que pour $x \in [-\pi, \pi]$ on a :

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

(4) Que vaut la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

(5) Calculez la série de Fourier de la fonction valant $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

(6) Calculez la série de Fourier de la fonction $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ et utilisez-la pour retrouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 8. ('Critère de Dini') Montrer que le principe de localisation entraine le résultat suivant : si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ sont tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta]} \left| \frac{f(t+t_0)) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty$$

pour un $\delta \in (0, \pi)$, alors la série de Foruier de f converge en t_0 et sa somme vaut $f(t_0)$.

On peut aussi en donner une version non-symétrique, en regardant les intégrales à gauche et à droite de zéro, et donner ainsi un renforcement ponctuel du théorème de Dirichlet.

Exercice 9. (Inégalité de Wirtinger-Poincaré) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, de classe C^1 et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Démontrer l'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 10. Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Prouver qu'il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

— u est C^∞ et vérifie l'équation de la chaleur $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$;

— pour tout $t > 0$, $u(t, .)$ est 2π-périodique ;

— $u(t, .)$ converge vers u_0 quand $t \to 0$, dans $L^2([0, 2\pi])$.

Pour l'unicité, prouver que les coefficients de Fourier de $u(t, .)$ vérifient une équation différentielle et la résoudre ; pour l'existence, vérifier que la formule ainsi obtenue pour u convient.

Exercice 11. (Développement Eulérien de sinus)

(1) Etant donné un nombre $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, calculer la série de Fourier de la fonction $2\pi-$périodique $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in]-\pi, \pi], \qquad f_a(t) = \cos(at).$$

(2) En déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

(3) On souhaite établir le développment Eulérien suivant
$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad \sin(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$
où le produit infini désigne la limite (dont on justifiera l'existence) quand $N \to \infty$ des produit partiels $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(...)$.

(a) On pose pour $N \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$, $g_N(z) = \displaystyle\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$. Montrer que $g_N(z)$ a une limite quand $N \to \infty$, notée $g(z)$, et que la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(b) On se fixe dans la suite un $x \in (0, \pi)$ et on introduit $f : [0, x] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cot(t) - \dfrac{1}{t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$ converge normalement sur $[0, x]$ vers f.

(c) Montrer que $\int_0^x f = \log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

(d) En déduire la formule voulue pour $z = x$.

(e) Conclure.

Exercice 12.

(1) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est tel que $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n) \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, alors $\sum_{n>0} \frac{\hat{f}(n)}{n} < \infty$.

On pourra utiliser le noyau de Fejér, et son expression dans la base des e_n.

(2) Soit $(a_n)_{n>0}$ une suite strictement positive vérfiant $\sum_{n>0} \frac{a_n}{n} = \infty$. Montrer que la série trigonométrique $\sum a_n \sin(nt)$ n'est pas une série de Fourier, i.e. la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donnée par, $b_0 = 0$, $b_n = a_n$ pour $n > 0$ et $b_n = -a_{-n}$ pour $n < 0$, n'est la suite des coefficients de Fourier d'aucune fonction intégrable.

On peut de plus choisir a_n pour que la série $\sum_{n>0} \frac{a_n}{n} = \infty$ pour tout t.

(3) En déduire que l'application $f \to \hat{f}$ de $L^1(\mathbb{T})$ dans $c_0(\mathbb{Z})$ n'est pas surjective.

Exercice 13. (Noyau de Poisson et problème de Dirichlet dans le disque On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ et $\mathbb{T} = \{e^{i\theta}\,;\ \theta \in \mathbb{R}\}$,.Pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le *noyau de Poisson* par

$$P_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n \cos(n\theta).$$

(1) (a) Montrer que, pour r fixé, cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et que

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Montrer que $P_r \in C^\infty(\mathbb{T})$. Quels sont les coefficients de Fourier de P_r ?

(b) Montrer que $P_r(\theta) > 0$ pour tout θ et tout $0 \leq r < 1$ et que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1.$$

(2) Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $r \in [0, 1[$. On considère $(P_r * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \varphi) f(\varphi)\, d\varphi$.

(a) Montrer que $P_r * f \in C^\infty(\mathbb{T})$ et que

$$\|P_r * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

(b) Montrer que la série $=\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta}$ converge uniformément et que

$$(P_r * f)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Retrouver que $P_r * f \in C^\infty(\mathbb{T})$.

(3) On souhaite montrer que pour $f \in C(\mathbb{T})$ fixé, $P_r * f$ converge uniformément vers f, i.e. $\|P_r * f - f\|_\infty \to 0$, lorsque $r \to 1^-$, .

(a) Méthode 1. En utilisant la question précédente, montrer que si g est un polynôme trigonométrique, alors $P_r * g \xrightarrow[r \to 1^-]{} g$ uniformément sur $\mathbb{T}$. Conclure. Quelle propriété essentielle de P_r avez-vous utilisé ?

(b) Méthode 2. Montrer que $(P_r)_r$ est une approximation de l'identité positive (pour $r \to 1^-$). Conclure.

(4) Montrer que

$$P_r(\theta) = \Re\Big(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\Big)$$

et en déduire que pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, si on pose $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, alors

$$(P_r * f)(\theta) = \Re \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z}\, f(s)\, \frac{ds}{2\pi}.$$

(5) On se donne $f \in C(\mathbb{T})$ et on pose pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$,

$$u(z) = (P_r * f)(\theta)$$

et sur le bord $\partial\mathbb{D}$, on pose $u(e^{i\theta}) = f(\theta)$.

(a) Donner une expression de $u(z)$ en fonction de z.

(b) Montrer que $u \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap C^\infty(\mathbb{D})$ et que u est harmonique dans $\mathbb{D}$.

(c) Montrer que u est solution (unique) du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{D}, \\ u(e^{is}) = f(s) & \text{sur } \mathbb{T}. \end{cases}$$