TD d'analyse 1 : suites et séries

version du 17 septembre 2025

Exercice 1. (Une fois pour toute) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire de la série $\sum v_n$?

Exercice 2. Que pensez vous de l'affirmation suivante : *pour qu'une suite numérique converge, il suffit que la différence entre deux termes consécutifs tende suffisamment vite vers zéro.*

Exercice 3. (Facile ou pas facile ?) Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. A-t-on que la suite (u_n) converge ? Et si l'on suppose que la suite (u_n) est bornée ? *Ca a l'air plus difficile, puisque cela revient à trouver une série $\sum v_n$ qui soit divergente avec d'une part v_n qui tend vers zéro et d'autre part des sommes partielles bornées.*

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs entières. Prouver que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 5. (De D'Alembert à Cauchy) Soit (u_n) une suite strictement positive et $\ell \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$, alors $(u_n)^{1/n} \to \ell$.

Exercice 6. (Suite sous-additive) Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

On veut montrer qu'alors la suite $\dfrac{u_n}{n}$ a une limite. On pose $\alpha = \inf_n \dfrac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On va montrer que $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers α. *Sans cette suggestion, l'exercice est beaucoup plus difficile.*

1. Montrer que pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n > p \geq 1$, on a

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{\max\{u_0, \dots u_p\}}{n}.$$

   On pourra faire une division euclidienne de n par p.

2. Conclure, en traitant séparément le cas α fini ou égal à $-\infty$, en fixant un $\epsilon > 0$ et en fixant pertinemment un p.

Exercice 7. Justifier les affirmations suivantes.

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente.
2. Le reste de cette série vérifie : $\forall N \geq 1, \quad \left| \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{N!}$.

3. La série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ est convergente mais pas absolument convergente.
4. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est divergente.

Exercice 8. (Recherche d'équivalent : un classique) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que cette suite converge vers 0.
2. En considérant la série de terme général $u_{n+1}^a - u_n^a$ pour un bon choix du paramètre a, trouver un équivalent de la suite (u_n).

Exercice 9. (Recherche d'équivalent) On se donne $u_0 > 0$ et on construit par récurrence la suite $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour $n \geq 0$. Donner un équivalent à la suite u_n.

Exercice 10. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, puis convergentes.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11. (Recherche d'équivalent) On construit par récurrence (x_n) à partir de $x_0 > 0$ et de la relation $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_0 + x_1 + \ldots x_n}$.

1. Montrer que la suite x_n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que $\frac{S_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{S_n}{x_n}$ tend vers 1, où $S_n = x_0 + \ldots x_n$, et en déduire un équivalent à $\frac{S_n}{x_n}$.
3. Montrer que $x_{n+1}^2 - x_n^2 \sim \frac{2x_n}{S_n}$ et en déduire un équivalent à la suite x_n.

Exercice 12. Soit u_n une suite réelle décroissante tendant vers 0. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

Exercice 13. On veut montrer que la suite des $\sin(\log(n))$, $n \geq 1$, est dense dans $[-1, 1]$.

1. Montrer qu'il suffit d'établir que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(n_k)_k$ de réels strictement positifs tel que $\log(n_k) - 2k\pi \to \alpha$
2. Conclure en travaillant avec $n_k := \lfloor e^{\alpha+2k\pi} \rfloor$.

Exercice 14. (Recherche d'équivalent) Soit u_n une suite de $[0, 1]$ telle que

$$u_n + u_{2n} \sim \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que la suite $v_n = nu_n$ est bornée.

2. Montrer que pour que l'ensemble des valeurs d'adhérence de v_n soit borné, il faut qu'il soit réduit à un point.
3. En déduire un équivalent à u_n.

Exercice 15. (Développement asymptotique du nombre moyen de diviseurs) Soit τ_n le nombre de diviseurs d'un entier $n \geq 1$. On pose pour $x \geq 1$,

$$F(x) := \frac{1}{x} \sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n.$$

1. Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{1 \leq d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$.
2. En déduire que $F(x) \sim \log(x)$.

Exercice 16. Soit $\alpha > 0$. Discuter de la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 17. (Stirling)

1. Soit (u_n) une suite strictement positive. Montrez que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive si et seulement si la série de terme général $v_n = \log\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente.
2. En déduire qu'il existe une constante positive K tel que
$$n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}\ .$$
3. On considère les intégrales de John Wallis
$$W_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx.$$
Donner une formule pour W_{2n}, à l'aide d'une formule de récurrence, et en déduire que $K = \sqrt{2\pi}$. On a donc
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\ .$$

Exercice 18. Soit $u = (u_n)$ une suite positive σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence, elle ont même somme.

Le résultat reste vrai si l'on suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Sauriez-vous le montrer ?

Exercice 19. (Mini Stirling facile) A l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que

$$\log(n!) \sim n \log(n).$$

En déduire qu'il existe des constantes $c, C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$c\,n \leq (n!)^{1/n} \leq C\,n.$$

Exercice 20. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque les séries correspondantes convergent, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$.

1. Donner le domaine de définition de f et de g.
2. Montrer que ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que les fonctions f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elles tendent vers $+\infty$ en 0.
4. Démontrer l'encadrement
$$\forall x > 0, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du.$$
5. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
6. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
7. Soit $x > 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx}$ converge. Exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$.
8. Donner un équivalent simple de $h(x)$ quand x tend vers 0.
9. Montrer que $g(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 21. On se donne une suite complexe (u_n)

1. On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Que peut-on dire de la série de fonctions $\sum u_n \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$ et de sa somme ?
2. Proposer une condition sur la suite u_n pour que la série la somme de la série de fonction $\sum u_n \sin(nx)$ soit de classe C^2 et donner une formule pour cette dérivée seconde.

Exercice 22. (Transformation d'Abel)

(a) Quels sont les nombres complexes z tels que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge ?

(a') Etudier la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ et $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\cos n)^3}{n}$ converge.

Exercice 23. **(Lemme d'Abel)** Soient des nombres complexes a_n tels que la série $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$ converge pour un certain $w \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est bien définie si $|z| < |w|$.
2. Prouver que $f(rw)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^n$ quand le *réel* r tend vers 1^-.

   Indication : observer que $a_n w^n = R_n - R_{n+1}$*, où* $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k w^k$*, et effectuer une transformation d'Abel.*

Exercice 24. Soit $u = (u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels ou complexes, non nuls. On lui associe la suite des produits partiels $(p_n)_{n\geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. On dira que le produit infini de terme général u_n (ou de manière abrégée $\prod u_n$) converge lorsque la suite (p_n) admet une limite <u>finie non nulle</u>.

1. Montrer que si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 1. Etudier la réciproque en simplifiant $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$.
   (a) Calculer $(1 - z^2) \prod_{k=1}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right)$.
   (b) En déduire que le produit infini $\prod \left(1+z^{2^n}\right)$ converge et donner la valeur du produit.
3. On suppose $u = (u_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle avec $u_n > 0$ pour tout n. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \log u_n$ converge.
4. On suppose $u = (u_n)_{n\geq 1}$ est une suite qui converge vers 1 avec $u_n > 1$ pour tout n. Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum (u_n - 1)$ converge.

Exercice 25. **(Limsup/Liminf)** Soit (u_n) une suite réelle. On définit sa limite supérieure par

$$\limsup(u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

1. Montrer que $\limsup(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k$.
2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ telle que $\limsup(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)}$.
3. Montrer que s'il existe une sous-suite $(u_{\theta(n)})$ qui tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$l \leq \limsup(u_n).$$

4. Soit (a_n) une suite réelle convergeant vers $\alpha \in \mathbb{R}$. Prouver l'égalité

$$\limsup(u_n + a_n) = \limsup(u_n) + \alpha.$$

5. On définit de même la limite inférieure $\liminf(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k$. Montrer que (u_n) tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup(u_n) = \liminf(u_n) = l$.
6. Refaire l'exercice 3 en utilisant la $\limsup$ et la $\liminf$.