TD d'analyse 2 : Fonctions d'une variable réelle

version du 22 septembre 2025

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Prouver que f est uniformément continue.

Exercice 2. (Argument $\forall\forall$) Donnez le domaine de définition sur $\mathbb{R}$ et le sens de variation de la somme, notée $\zeta(x)$, de la série de fonctions $\sum \frac{1}{n^x}$, et en déduire que $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Exercice 3. (Subtil, à retenir) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ où $a \in I$. On suppose que f' a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a. Montrer que f est dérivable en a, avec $f'(a) = \ell$.

Exercice 4. (Variante) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' admet une limite finie en a. Prouver que f se prolonge en une fonction dérivable sur $[a, b[$.

Exercice 5. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant

— $f(x) = 1/q$ si $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$;

— $f(x) = 0$ si x est irrationnel.

Démontrer que f est continue en un point x si et seulement si x est irrationnel.

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}} \sin(1/x)$. Montrer que f admet un prolongement dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ce prolongement est-il lipschitzien ?

Exercice 7. Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\theta(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ et $\theta(x) = 0$ sinon. Montrer que θ est de classe C^∞.

Exercice 8.

(1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si f a une limite (finie) en $+\infty$, alors f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que f a une limite (finie) en b^-.

Exercice 9. Soit f continue et dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Calculez la limite de la suite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 10.

(1) Prouver que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(2) En déduire la formule suivante : pour tous réels strictements positifs $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$,

$$\left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

(3) Montrer que si A et B sont deux matrices $n \times n$ symétriques réelles positives, alors
$$\det^{1/n}(A+B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B).$$
En déduire qu'on a aussi $\det((1-t)A + tB) \geq \det(A)^{1-t}\det(B)^t$ pour $t \in [0,1]$.

Exercice 11. Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = x\,g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Pour plus tard : et si f est analytique ?)

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, majorée, deux fois dérivable et telle que $f'' \geq f$.

(1) Prouver que f est décroissante.
(2) Prouver que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.
(3) Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(0)e^{-x}$.
Indication : on pourra étudier la fonction $g : x \mapsto (f'(x) + f(x))e^{-x}$.

Exercice 13. (Théorèmes de Dini)

(1) (Deuxième Théorème de Dini). On considère une suite de fonctions continues $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction *continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
  (a) Donner un exemple où la convergence n'est pas uniforme.
  (b) On suppose ici que chaque fonction f_n est croissante. Prouver que la convergence est uniforme.
(2) (Deuxième Théorème de Dini : version générale)
  (a) Soit f_n, $n \geq 0$, et f des fonctions croissantes et continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ et que
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{-\infty} f_n = \lim_{-\infty} f \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{+\infty} f_n = \lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}.$$
  Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
  (b) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X. On suppose que les X_n et X n'ont pas d'atomes : pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\forall n \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X_n = a) = P(X = a) = 0.$$
  Montrer que les fonctions de répartitions des X_n convergent *uniformément* vers celle de X sur $\mathbb{R}$.
(3) (Premier Théorème de Dini) On se donne un espace (métrique) compact K, par exemple $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$, et une suite de fonctions continues $f_n : K \to \mathbb{R}$ qui convergent simplement vers une fonction f que l'on suppose aussi continue. On suppose de plus que la suite (f_n) est croissante. Montrer que la convergence de f_n vers f est uniforme sur K.

Exercice 14. Evaluer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + 3n^2}$, après avoir justifié l'existence de cette limite, évidemment.

Exercice 15. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour chaque entier $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$.

(1) Méthode des trapèzes : on considère la fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est affine sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et vérifie $\phi(x_i) = f(x_i)$ pour tout indice $i \in [\![0,n]\!]$. Calculer l'intégrale de ϕ et prouver qu'il existe une constante C dépendant de a, b et f telle que
$$\left| \int_a^b f - \int_a^b \phi \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$
(2) Méthode des points milieux : on considère une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est constante à la valeur $f((x_{i-1}+x_i)/2)$ sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Calculer l'intégrale de ϕ et prouver qu'il existe une constante C dépendant de a, b et f telle que
$$\left| \int_a^b f - \int_a^b \phi \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Exercice 16. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Prouver que, pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ converge.

Exercice 17. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, telle que la suite $\displaystyle\int_0^n f$ a une limite finie, que peut-on en conclure pour l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty f$? Et si f est positive ?

Exercice 18. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ qui est paire. Montrer que f atteint son infimum sur $\mathbb{R}$ en zéro.

Exercice 19. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ dérivable. Si $f'(x_0) = 0$, que peut-on dire ?

Exercice 20. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 < x_1$ tels que $f(x_0) < f(x_1)$. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-f} < \infty$.

Exercice 21. Soit f une fonction strictement convexe sur $\mathbb{R}$ qui atteint son minimum. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$.

Exercice 22. La croissance du taux d'accroissement pour f sur I, i.e. pour tous $s, t, u \in I$
$$s < t < u \Longrightarrow \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t},$$
implique-t-elle la convexité de f sur I ?

Exercice 23. Soit I un interalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur I *ssi* pour tout $[a,b] \subset I$ et toute fonction affine ℓ, la fonction $f - \ell$ atteint son max sur $[a,b]$ en a ou b.

Exercice 24. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que pour tout $x \in I$ on a
$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h} > 0.$$

Montrer que f est convexe sur I.
Le résultat reste vrai si on suppose seulement que la $\liminf$ est ≥ 0. Voyez-vous comment faire ?

Exercice 25. (Une propriété extrémale des polynômes de Tchebychev) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ième polynôme de Tchebichev. On rappelle qu'il est donné, pour $x \in [-1, 1]$, par $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

Vous vérifierez que T_n est bien un polynôme de degré n et que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}

Dans la suite on fixe $n \geq 1$. On note

$$Q_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

le polynôme unitaire correspondant. On notera $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes qui sont de degré n et unitaires. On travaillera sur le segment $[-1, 1]$. Pour une fonction f continue sur $[-1, 1]$, on notera $\|f\|_\infty$ la norme du sup, c'est-à-dire $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

> *Le but de cet exercice est de montrer que les polynômes de Tchebychev ont la plus petite norme du sup parmi les polynômes à degré et à coefficient dominant fixés, c'est-à-dire, que*
>
> $$\|Q_n\|_\infty = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|P\|_\infty.$$

Si f est une fonction continue sur $[-1, 1]$, on dit que f *équioscille* sur $k + 1$ points s'il existe $k + 1$ réels $y_0 < y_1 < \ldots < y_k$ de $[-1, 1]$ tels que

$$\forall i \in \{0, \ldots, k\}, \quad |h(y_i)| = \|h\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{0, k-1\}, \quad h(y_{i+1}) = -h(y_i).$$

(On dit que les extrema sont alternés).

(1) (a) Rappeler ce que vaut $\|T_n\|_\infty$.
  (b) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Que vaut $T_n\Big(\cos\big(\frac{j\pi}{n}\big)\Big)$?
  (c) Montrer que T_n equioscille sur $n + 1$ points. Qu'en est-il pour Q_n ?

(2) Soit Q un élément de $\mathcal{P}_n$ qui equioscille sur $n + 1$ points notés $y_0 < \ldots < y_n$. Quitte à prendre $-Q$, on pourra supposer que $Q(y_0) = +\|Q\|_\infty$.
  Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|P\|_\infty < \|Q\|_\infty$.
  (a) Montrer que $P(y_i) < Q(y_i)$ pour i pair, et $P(y_i) > Q(y_i)$ pour i impair.
  (b) Aboutir à une contradiction. (On pourra étudier $Q - P$).

(3) Conclure.

Exercice 26. (Lemme de du Bois-Reymond) Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions qui sont C^∞ sur $[a, b]$ et qui sont nulles au voisinage de a et de b. On suppose que

$$\forall g \in \mathcal{D}, \qquad \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = 0.$$

Montrer que f est constante sur $[a, b]$.

On pourra commencer par dire que si f n'est pas constante, alors (quitte à considérer $-f$) on peut supposer qu'il existe $c < d$ tel que $f(c) < f(d)$, puis considérer des voisinages bien choisis de ces points, et construire g en faisant un dessin...