

## TD 9 : Calcul différentiel

*version du 29 janvier 2026*

**Exercice 1. Échauffement (cours)** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Pour  $x, u \in \mathbb{R}^n$  fixés, on pose  $\alpha(t) = f(x + tu)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\alpha'$  et  $\alpha''$  à l'aide des dérivées de  $f$ .

**Exercice 2.** Que peut-on dire d'une fonction  $f$  différentiable sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $\nabla f = 0$  sur  $U$  ?

**Exercice 3.** Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$  pour laquelle il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|F(x) - F(y)\| \geq \delta\|x - y\|$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

- (1) Montrer que  $F$  est injective et que  $F(\mathbb{R}^n)$  est fermé.
- (2) Montrer que  $dF$  est inversible en tout point de  $\mathbb{R}^n$ .
- (3) Montrer que  $F(\mathbb{R}^n)$  est ouvert, et en déduire que  $F$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $x, h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle Df_x(h), h \rangle \geq \delta\|h\|^2$ .

- (1) Montrer que, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq \delta\|y - x\|^2$ .
- (2) Montrer que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 5.** Soit une application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $\gamma(t) = f(\cos t, \sin t)$ . Exprimer  $\gamma''(0)$  en fonctions des dérivées partielles de  $f$ .

**Exercice 6.** Quelle est la valeur maximale de  $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ , pour  $x, y \geq 0$  ?

**Exercice 7.** Vérifier que le déterminant  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une application différentiable et calculer sa différentielle.

*On peut par exemple la calculer d'abord au point  $I_n$ , puis sur  $GL_n(\mathbb{R})$ , puis partout ; ou alors calculer les dérivées partielles.*

**Exercice 8.** Une fonction  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite (positivement)  $k$ -homogène pour  $k \in \mathbb{N}$ , si pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $\lambda > 0$ ,  $N(\lambda x) = \lambda^k N(x)$ . Montrer qu'une fonction  $N$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est  $k$ -homogène si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \nabla N(x) \cdot x = kN(x).$$

**Exercice 9.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p(x) = \|x\|^\alpha$ . Calculer  $\Delta p$  aux points où cela a bien un sens.

**Exercice 10. (Interprétations géométriques)**

- (1) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable et de gradient non nul en 0. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable en 0, avec  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma'(0)$  de norme 1. Comment doit-on choisir  $\gamma$  pour que la pente  $(f \circ \gamma)'(0)$  soit maximale ?
- (2) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , avec  $f(0) = 0$  et un déterminant jacobien vérifiant  $J_f(0) \neq 0$ . En notant  $B_r$  la boule fermée de rayon  $r$  centrée en 0 et  $\text{vol}$  la mesure de Lebesgue, montrer que le quotient  $\frac{\text{vol} f(B_r)}{\text{vol} B_r}$  tend vers  $|J_f(0)|$  quand  $r \rightarrow 0$ .

**Exercice 11.** Soit une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $C^2$ . On suppose qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tous  $x, h \in \mathbb{R}^n$ ,  $D^2 f_x(h, h) \leq M \|h\|^2$ .

- (1) Montrer que  $M$  est nécessairement positif.
- (2) Prouver l'inégalité  $\|Df_0\| \leq \sqrt{2Mf(0)}$ .

**Exercice 12.** Soit une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , telle que  $f(0) = 0$  et  $\nabla f(0) = 0$ . Montrer qu'il existe des fonctions  $g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j g_{ij}(x).$$

**Exercice 13.** Montrer que pour tout  $x\lambda > 0$  il existe un unique réel  $x(\lambda) > 0$  tel que  $2 - e^{\lambda x} = \log(x)$ , et que l'application  $\lambda \rightarrow x(\lambda)$  est de classe  $C^\infty$ .

**Exercice 14.** Montrer que si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est suffisamment proche de  $\text{Id}_n$ , alors il existe une matrice  $M$  tel que  $M^2 = A$ .

**Exercice 15.** On considère une application  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ .

- (1) Montrer que  $\phi$  est  $k$ -lipschitzienne si et seulement si, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\nabla \phi(x)\| \leq k$ .
- (2) On suppose que  $\phi$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ . Montrer que l'application  $\text{Id} + \phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 16.**

- (1) Soit  $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$  un polynôme admettant une racine simple  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Prouver qu'il existe une application  $\phi$  de classe  $C^\infty$  définie sur un voisinage  $U$  de  $P_0$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  et à valeurs dans un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall P \in U, \quad \forall x \in V, \quad P(x) = 0 \iff x = \phi(P).$$

- (2) En déduire que l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui ont  $n$  racines simples réelles est un ouvert de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 17.** Etant donné un endomorphisme symétrique  $u$  de  $\mathbb{R}^n$ , on considère la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , par :

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

- (1) Démontrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^n$  et calculer son gradient.
- (2) Soit  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ . Montrer qu'il existe un point  $x_0 \in S$  tel que  $f(x_0) = \max_S f$ .

- (3) Montrer que  $x_0$  est un vecteur propre de  $u$ .
- (4) En déduire le théorème spectral :  $u$  est diagonalisable en base orthonormée.

**Exercice 18.** Prouver que le groupe orthogonal  $O_n$  est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ .

**Exercice 19.** Soit  $f$  une fonction convexe sur le cube  $[0, 1]^n$ . Montrer qu'elle atteint son maximum en un des sommets du cube.

**Exercice 20. (Coercivité)** Soit  $\varphi$  une fonction convexe (continue) sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\varphi(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

- (1) Montrer qu'il existe un  $r > 0$  tel que

$$\inf_{|y|=r} \varphi(y) \geq \varphi(0) + 1.$$

- (2) Montrer que pour  $|x| > r$

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{r} |x| + \varphi(0).$$

- (3) Montrer qu'il existe  $c > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq c|x| + \alpha.$$

**Exercice 21. (Principe du maximum)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\overline{\Omega}$ , de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ .

- (1) Montrer que  $f$  est majorée et atteint sa borne supérieure.
- (2) On suppose que  $\Delta f(x) > 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Montrer que le maximum de  $f$  sur  $\overline{\Omega}$  ne peut pas être atteint en un point de  $\Omega$ .
- (3) On suppose que  $\Delta f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . Montrer que

$$\max_{\Omega} f = \max_{\partial\Omega} f.$$

*On pourra considérer  $f(x) + \epsilon|x|^2/2$*

- (4) Montrer que si  $f$  vérifie  $\Delta f = 0$  dans  $\Omega$  et  $f = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

**Exercice 22. (Une transformée de Legendre)** On se donne  $H$  une matrice  $n \times n$  et on pose  $\phi(x) = \|Hx\|^2/2$ . Donner une condition sur  $H$  pour que

$$\psi(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} x \cdot y - \phi(x)$$

soit fini pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , et donner une formule pour  $\psi$  (en fonction de  $H$ ) dans ce cas.