TD Analyse

Thomas Goossaert-Cosyn

19 février 2026

5 Intégration

Exercice 4. *On travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on se donne une fonction continue par morceaux (par exemple) sur $\mathbb{R}$.*

(1) *Montrer que si f est positive, on a, lorsque $R \to +\infty$,*

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) *Montrer que si f est intégrable, on a, lorsque $R \to +\infty$,*

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) *On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g intégrable, bornée et à support compact telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. **(1)** Supposons f mesurable positive. Pour $R > 0$, posons

$$f_R = f\mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors $(f_R)_{R>0}$ est une famille croissante de fonctions mesurables positives et

$$f_R(x) \uparrow f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{\mathbb{R}} \lim_{R\to+\infty} f_R = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{-R}^{R} f.$$

On en déduit

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) S upposons maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $|f|$ est intégrable. On applique le résultat précédent à la fonction positive $|f|$:

$$\int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f = \int_{|x|>R} f(x)\, dx.$$

Donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f\right| \le \int_{|x|>R} |f|.$$

Or

$$\int_{|x|>R} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f| - \int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

Étape 1 : troncature du support.

D'après le point (2), il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{|x|>R} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons

$$f_1 = f\mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_1| = \int_{|x|>R} |f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Étape 2 : troncature des valeurs.

Pour $M > 0$, posons

$$f_{1,M}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } |f_1(x)| \le M, \\ M\,\mathrm{sgn}(f_1(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_{1,M}$ est bornée par M et a toujours son support dans $[-R, R]$.

Comme $f_1 \in L^1$, on a

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } M \to +\infty.$$

Donc il existe $M > 0$ tel que

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$|f_1 - f_{1,M}| \le |f_1|\mathbf{1}_{\{|f_1|>M\}},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_{1,M}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclusion.

Posons $g = f_{1,M}$. Alors g est intégrable, bornée, à support compact et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \le \int_{\mathbb{R}} |f - f_1| + \int_{\mathbb{R}} |f_1 - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration. □

10 Equations différentielles

Exercice 3. *Résoudre le problème différentiel suivant sur* $\mathbb{R}$

$$2xy' = 1 - y$$

Démonstration. — On travaille sur $I \subset \mathbb{R}$. Posons $f(x, y) = \frac{1-y}{2x}$. f est :

— continue sur $I \times \mathbb{R}$

— $\mathcal{C}$ en y donc localement lipschitzienne en y

Par le théorème de Cauchy Lipschitz, pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution définie sur I.

□

Exercice 6. ***Exercice 6.*** *Soit une fonction continue $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$. On note $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de solutions de l'équation différentielle*

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On notera aussi $M(t)$ la matrice $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. *Calculer le wronskien $W(t) = \det M(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
2. *On suppose maintenant que $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*
   (a) *Montrer que toute solution y admet une limite en $+\infty$.*
   (b) *Soit θ l'application qui à $y_0 \in \mathbb{R}^n$ associe la limite en $+\infty$ de la solution y telle que $y(0) = y_0$. Montrer que θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. 1. La matrice fondamentale $M(t)$ vérifie

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

On pose $W(t) = \det M(t)$. Par la formule de dérivation du déterminant,

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

On obtient donc une équation différentielle scalaire :

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

En intégrant,

$$W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds \right).$$

En particulier, si $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base de solutions, alors $W(0) \neq 0$, donc

$$W(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2.a) Soit y une solution. Elle vérifie

$$y(t) = y(0) + \int_0^t A(s)y(s)\, ds.$$

Pour $t \geq s \geq 0$,

$$y(t) - y(s) = \int_s^t A(\tau)y(\tau)\, d\tau.$$

On en déduit

$$\|y(t) - y(s)\| \le \int_s^t \|A(\tau)\| \, \|y(\tau)\| \, d\tau.$$

Par ailleurs on a également,

$$\|y(t)\| \le \|y(0)\| + \int_0^t \|A(s)y(s)\| ds$$

Donc en appliquant le lemme de Gronwall pour $\|A(\cdot)\|$ positive et $\|y(\cdot)\|$ continue, pour $t \ge 0$,

$$\|y(t)\| \le \|y(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right).$$

Comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la quantité

$$C = \exp\left(\int_0^{+\infty} \|A(\sigma)\| \, d\sigma \right)$$

est finie, et donc

$$\|y(t)\| \le C\|y(0)\| \quad \text{pour tout } t \ge 0.$$

Ainsi y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Dès lors,

$$\|y(t) - y(s)\| \le C\|y(0)\| \int_s^t \|A(\tau)\| \, d\tau.$$

Comme $\|A\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $s, t \to +\infty$.

Donc $y(t)$ est de Cauchy lorsque $t \to +\infty$, et comme $\mathbb{R}^n$ est complet, $y(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$.

2.b) On définit

$$\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \theta(y_0) = \lim_{t \to +\infty} y(t),$$

où y est l'unique solution telle que $y(0) = y_0$.

D'après la question précédente, θ est bien définie. Elle est linéaire car l'équation différentielle est linéaire.

Montrons qu'elle est injective.

Si $\theta(y_0) = 0$, alors $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. On écrit, pour $t \ge 0$,

$$y(t) = y(T) - \int_t^T A(s)y(s) \, ds.$$

En faisant tendre $T \to +\infty$ et en utilisant que $y(T) \to 0$, on obtient

$$y(t) = -\int_t^{+\infty} A(s)y(s) \, ds.$$

On en déduit

$$\|y(t)\| \le \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, \|y(s)\| \, ds.$$

En posant

$$m(t) = \sup_{u \ge t} \|y(u)\|,$$

qui est bien défini car $\|y(\cdot)\|$ est continue et $y(t) \to 0$ en $+\infty$, on obtient

$$m(t) \le m(t) \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds.$$

Et comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable, on a pour t assez grand,

$$\int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds < 1,$$

donc nécessairement $m(t) = 0$. Ainsi $y(t) = 0$ pour t assez grand, puis par unicité des solutions, $y \equiv 0$. Donc $y_0 = 0$.

Ainsi θ est injective.

Comme θ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie n, elle est bijective.

Donc θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

$\square$