

TD 9 : Calcul différentiel

version du 29 janvier 2026

Exercice 1. Échauffement (cours) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Pour $x, u \in \mathbb{R}^n$ fixés, on pose $\alpha(t) = f(x + tu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Exprimer α' et α'' à l'aide des dérivées de f .

Exercice 2. Que peut-on dire d'une fonction f différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ telle que $\nabla f = 0$ sur U ?

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 pour laquelle il existe $\delta > 0$ tel que $\|F(x) - F(y)\| \geq \delta \|x - y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- (1) Montrer que F est injective et que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
- (2) Montrer que dF est inversible en tout point de \mathbb{R}^n .
- (3) Montrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert, et en déduire que F est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 . On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\langle Df_x(h), h \rangle \geq \delta \|h\|^2$.

- (1) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq \delta \|y - x\|^2$.
- (2) Montrer que f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

Exercice 5. Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = f(\cos t, \sin t)$. Exprimer $\gamma''(0)$ en fonctions des dérivées partielles de f .

Exercice 6. Quelle est la valeur maximale de $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$, pour $x, y \geq 0$?

Exercice 7. Vérifier que le déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable et calculer sa différentielle.

On peut par exemple la calculer d'abord au point I_n , puis sur $GL_n(\mathbb{R})$, puis partout ; ou alors calculer les dérivées partielles.

Exercice 8. Une fonction $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite (positivement) k -homogène pour $k \in \mathbb{N}$, si pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\lambda > 0$, $N(\lambda x) = \lambda^k N(x)$. Montrer qu'une fonction N de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est k -homogène si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \nabla N(x) \cdot x = kN(x).$$

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p(x) = \|x\|^\alpha$. Calculer Δp aux points où cela a bien un sens.

Exercice 10. (Interprétations géométriques)

- (1) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et de gradient non nul en 0. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable en 0, avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma'(0)$ de norme 1. Comment doit-on choisir γ pour que la pente $(f \circ \gamma)'(0)$ soit maximale ?
- (2) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , avec $f(0) = 0$ et un déterminant jacobien vérifiant $J_f(0) \neq 0$. En notant B_r la boule fermée de rayon r centrée en 0 et vol la mesure de Lebesgue, montrer que le quotient $\frac{\text{vol } f(B_r)}{\text{vol } B_r}$ tend vers $|J_f(0)|$ quand $r \rightarrow 0$.

Exercice 11. Soit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^2 . On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $D^2f_x(h, h) \leq M\|h\|^2$.

- (1) Montrer que M est nécessairement positif.
- (2) Prouver l'inégalité $\|Df_0\| \leq \sqrt{2Mf(0)}$.

Exercice 12. Soit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , telle que $f(0) = 0$ et $\nabla f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j g_{ij}(x).$$

Exercice 13. Montrer que pour tout $x\lambda > 0$ il existe un unique réel $x(\lambda) > 0$ tel que $2 - e^{\lambda x} = \log(x)$, et que l'application $\lambda \rightarrow x(\lambda)$ est de classe C^∞ .

Exercice 14. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est suffisement proche de Id_n , alors il existe une matrice M tel que $M^2 = A$.

Exercice 15. On considère une application $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

- (1) Montrer que ϕ est k -lipschitzienne si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\nabla \phi(x)\| \leq k$.
- (2) On suppose que ϕ est k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que l'application $\text{Id} + \phi$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

Exercice 16.

- (1) Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant une racine simple $x_0 \in \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe une application ϕ de classe C^∞ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et à valeurs dans un voisinage V de x_0 dans \mathbb{R} telle que

$$\forall P \in U, \quad \forall x \in V, \quad P(x) = 0 \iff x = \phi(P).$$

- (2) En déduire que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui ont n racines simples réelles est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 17. Etant donné un endomorphisme symétrique u de \mathbb{R}^n , on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par :

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

- (1) Démontrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer son gradient.
- (2) Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in S$ tel que $f(x_0) = \max_S f$.

- (3) Montrer que x_0 est un vecteur propre de u .
(4) En déduire le théorème spectral : u est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 18. Prouver que le groupe orthogonal O_n est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 19. Soit f une fonction convexe sur le cube $[0, 1]^n$. Montrer qu'elle atteint son maximum en un des sommets du cube.

Exercice 20. (Coercivité) Soit φ une fonction convexe (continue) sur \mathbb{R}^n telle que $\varphi(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$.

- (1) Montrer qu'il existe un $r > 0$ tel que

$$\inf_{|y|=r} \varphi(y) \geq \varphi(0) + 1.$$

- (2) Montrer que pour $|x| > r$

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{r} |x| + \varphi(0).$$

- (3) Montrer qu'il existe $c > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) \geq c|x| + \alpha.$$

Exercice 21. (Principe du maximum) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , et soit $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, de classe C^2 sur Ω .

- (1) Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure.
(2) On suppose que $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que le maximum de f sur $\overline{\Omega}$ ne peut pas être atteint en un point de Ω .
(3) On suppose que $\Delta f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega$. Montrer que

$$\max_{\Omega} f = \max_{\partial\Omega} f.$$

On pourra considérer $f(x) + \epsilon|x|^2/2$

- (4) Montrer que si f vérifie $\Delta f = 0$ dans Ω et $f = 0$ sur $\partial\Omega$, alors f est identiquement nulle.

Exercice 22. (Une transformée de Legendre) On se donne H une matrice $n \times n$ et on pose $\phi(x) = \|Hx\|^2/2$. Donner une condition sur H pour que

$$\psi(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} x \cdot y - \phi(x)$$

soit fini pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, et donner une formule pour ψ (en fonction de H) dans ce cas.