TD Analyse

Thomas Goossaert-Cosyn

19 février 2026

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 24. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que pour tout $x \in I$ on a*

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h} > 0.$$

Montrer que f est convexe sur I.

Le résultat reste vrai si on suppose seulement que la $\liminf$ *est* ≥ 0. *Voyez-vous comment faire ?*

Démonstration. Posons les fonctions pentes

$$s_+(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, s_-(x,h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

L'hypothèse de l'énoncé se réécrit alors

$$\forall x \in I, \liminf_{h \to 0^+} s_+(x,h) - s_-(x,h) > 0$$

Pour passer de cette propriété locale à une inégalité globale, considérons $[a,c] \subset I$ et $[x_0 = a, ..., x_n = c]$ une subdivision de pas $\Delta = \frac{c-a}{n}$.
On définit la suite de pentes locales par :

$$s_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\Delta}$$

L'hypothèse donne don que $s_0 < s_1 < ... < s_{n-1}$
Soit $b \in [a,c]$, n suffisamment grand et k tel que $x_k \leq b < x_{k+1}$, alors la croissance des pentes entraine

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq s_k < \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

D'où la convexité de f. $\square$

4 Topologie

Exercice 3. *Soit K, L deux espaces métriques compact et $\pi : K \to L$ une bijection continue. Montrer que π est un homéomorphisme entre K et L*

Démonstration. Pour prouver que π est un homéomorphisme, il suffit de montrer que sa réciproque $\pi^{-1} : L \to K$ est continue.

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L convergeant vers un élément $y \in L$. Posons :

$$x_n = \pi^{-1}(y_n) \quad \text{et} \quad x = \pi^{-1}(y)$$

Montrons que la suite (x_n) converge vers x dans K.

La suite (x_n) est une suite d'éléments de l'espace métrique compact K. Par Bolzano-Weierstrass, de toute suite d'un compact, on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $(x_{\phi(n)})$ une telle sous-suite, et notons $z \in K$ sa limite :

$$x_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} z$$

L'application π est continue sur K. Par caractérisation séquentielle de la continuité, l'image de la sous-suite doit converger vers l'image de sa limite :

$$\pi(x_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(z)$$

Or, par construction, $\pi(x_{\phi(n)}) = y_{\phi(n)}$.

Comme la suite parente (y_n) converge vers y, toute sous-suite extraite converge également vers y. On a donc, par unicité de la limite dans L :

$$\pi(z) = y$$

Puisque π est une bijection, chaque élément possède un unique antécédent. Sachant que $\pi(x) = y$, l'injectivité de π impose :

$$z = x$$

Nous avons montré que toute sous-suite convergente de (x_n) converge nécessairement vers x. Dans un espace compact, si une suite possède une unique valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.

Ainsi, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, ce qui prouve que π^{-1} est continue en tout point $y \in L$.

Conclusion : π est une bijection continue dont la réciproque est continue, c'est donc un homéomorphisme. $\square$

5 Intégration

Exercice 4. *On travaille avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et on se donne une fonction continue par morceaux (par exemple) sur $\mathbb{R}$.*

(1) *Montrer que si f est positive, on a, lorsque $R \to +\infty$,*

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) *Montrer que si f est intégrable, on a, lorsque $R \to +\infty$,*

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) *On suppose f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver g intégrable, bornée et à support compact telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. **(1)** Supposons f mesurable positive. Pour $R > 0$, posons

$$f_R = f\mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors $(f_R)_{R>0}$ est une famille croissante de fonctions mesurables positives et

$$f_R(x) \uparrow f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{\mathbb{R}} \lim_{R\to+\infty} f_R = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} f_R = \int_{-R}^{R} f.$$

On en déduit

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(2) Supposons maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $|f|$ est intégrable. On applique le résultat précédent à la fonction positive $|f|$:

$$\int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f = \int_{|x|>R} f(x)\,dx.$$

Donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f - \int_{-R}^{R} f\right| \le \int_{|x|>R} |f|.$$

Or

$$\int_{|x|>R} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f| - \int_{-R}^{R} |f| \longrightarrow 0.$$

Ainsi

$$\int_{-R}^{R} f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

(3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

Étape 1 : troncature du support.

D'après le point (2), il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{|x|>R} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons

$$f_1 = f\mathbf{1}_{[-R,R]}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_1| = \int_{|x|>R} |f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Étape 2 : troncature des valeurs.

Pour $M > 0$, posons

$$f_{1,M}(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } |f_1(x)| \le M, \\ M\,\mathrm{sgn}(f_1(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_{1,M}$ est bornée par M et a toujours son support dans $[-R, R]$.

Comme $f_1 \in L^1$, on a

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } M \to +\infty.$$

Donc il existe $M > 0$ tel que

$$\int_{\{|f_1|>M\}} |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$|f_1 - f_{1,M}| \leq |f_1| \mathbf{1}_{\{|f_1|>M\}},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_{1,M}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Conclusion.
Posons $g = f_{1,M}$. Alors g est intégrable, bornée, à support compact et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - f_1| + \int_{\mathbb{R}} |f_1 - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration. □

8 Transformée de Fourier

Exercice 5. *On travaille dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R}, \mu)$ associé à la mesure (gaussienne standard) de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ définie par $d\mu(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :*

$$h_n(x) = e^{x^2/2} g^{(n)}(x), \quad \text{où} \quad g(x) = e^{-x^2/2}.$$

1. *Montrer que les fonctions h_n sont polynomiales. Déterminer leurs degrés et coefficients dominants.*
2. *Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale de H et calculer la norme λ_n de chaque élément h_n.*
3. *On veut montrer que la famille $(\lambda_n^{-1} h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.*
   (a) *Expliquer pourquoi il suffit de montrer que les polynômes sont denses dans H.*
   (b) *Pour $f \in H$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*
   (c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n-ième $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0)$. En déduire que si f est orthogonale à tous les polynômes, alors f est nulle.*
   (d) *Conclure.*

Démonstration. 1. Par récurrence, montrons que $g^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

— Pour $n = 0$, $g^{(0)}(x) = e^{-x^2/2}$, donc $P_0(x) = 1$. La propriété est vraie.

— Supposons $g^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2/2}$. Alors :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}(P_n(x)e^{-x^2/2}) = (P_n'(x) - xP_n(x))e^{-x^2/2}$$

Ainsi $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - xP_n(x)$. Si P_n est de degré n et de coefficient dominant a_n, alors $-xP_n$ est de degré $n + 1$ et de coefficient dominant $-a_n$. Le terme P_n' est de degré $n - 1$, il ne modifie pas le degré dominant.

Par construction, $h_n(x) = e^{x^2/2}(P_n(x)e^{-x^2/2}) = P_n(x)$. **Conclusion :** h_n est un polynôme de **degré** n et de **coefficient dominant** $(-1)^n$.

2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. Le produit scalaire dans H est :

$$\langle h_n, h_m \rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{x^2/2} g^{(n)}(x)\right) h_m(x)e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g^{(n)}(x)h_m(x)dx$$

Par intégrations par parties successives (n fois), les termes de bord s'annulent car les dérivées de la gaussienne tendent vers 0 :

$$\langle h_n, h_m \rangle_\mu = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) h_m^{(n)}(x) dx$$

Comme $\deg(h_m) = m < n$, on a $h_m^{(n)}(x) = 0$, donc $\langle h_n, h_m \rangle_\mu = 0$. La famille est orthogonale.

Pour la norme $\lambda_n^2 = \langle h_n, h_n \rangle_\mu$:

$$\lambda_n^2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) h_n^{(n)}(x) dx$$

Or $h_n(x) = (-1)^n x^n + \dots$, donc $h_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$. D'où :

$$\lambda_n^2 = \frac{(-1)^n (-1)^n n!}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = n!$$

Conclusion : $\lambda_n = \sqrt{n!}$.

3.a) Puisque $\deg(h_n) = n$, toute combinaison linéaire des h_k ($k \leq n$) décrit l'espace des polynômes de degré au plus n. Si les polynômes sont denses dans H, alors l'adhérence de $\mathrm{Vect}(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est H. Comme la famille est orthonormale (après division par λ_n), c'est une base hilbertienne.

3.b) $f \in H$ signifie $\int |f|^2 d\mu < \infty$. $\psi_f(x) = f(x)e^{-x^2/2}$.
Par Cauchy-Schwarz, sa transformée de Fourier $\widehat{\psi_f}(\xi) = \int f(x)e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}dx$ est bien définie car $\psi_f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int |f(x)|e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi} \int |f(x)|e^{-x^2/4} \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_H \|e^{-x^2/4}\|_H < \infty$$

L'extension holomorphe $F(z) = \int f(x)e^{-x^2/2}e^{-ixz}dx$ pour $z \in \mathbb{C}$ est justifiée par le fait que pour $z = u + iv$, $|e^{-ixz}| = e^{xv}$. Le terme $e^{-x^2/2}$ assure la convergence et la domination pour tout $z \in \mathbb{C}$ (croissance exponentielle vs décroissance gaussienne).

3.c) On a

$$\widehat{\psi_f}^{(n)}(0) = \int f(x)e^{-x^2/2}(-ix)^n dx = (-i)^n \sqrt{2\pi} \int f(x) x^n \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = (-i)^n \sqrt{2\pi} \langle f, x^n \rangle_\mu$$

Si f est orthogonale à tous les polynômes, alors $\langle f, x^n \rangle_\mu = 0$ pour tout n, donc $\widehat{\psi_f}^{(n)}(0) = 0$. Comme $\widehat{\psi_f}$ est une fonction analytique (holomorphe sur $\mathbb{C}$), ses coefficients de Taylor en 0 sont tous nuls, donc $\widehat{\psi_f} \equiv 0$. Par injectivité de la transformée de Fourier, $\psi_f = 0$ p.p., donc $f = 0$ p.p.

3.d) L'orthogonal de l'espace des polynômes est $\{0\}$, donc les polynômes sont denses dans H. La famille $(\lambda_n^{-1} h_n)$ est donc une base hilbertienne. $\square$

10 Equations différentielles

Exercice 3. *Résoudre le problème différentiel suivant sur* $\mathbb{R}$

$$2xy' = 1 - y$$

Démonstration. — On travaille sur $I \subset \mathbb{R}$. Posons $f(x, y) = \frac{1-y}{2x}$. f est :

— continue sur $I \times \mathbb{R}$

— $\mathcal{C}$ en y donc localement lipschitzienne en y

Par le théorème de Cauchy Lipschitz, pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution définie sur I.

$\square$

Exercice 6. ***Exercice 6.*** *Soit une fonction continue $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$. On note $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de solutions de l'équation différentielle*

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On notera aussi $M(t)$ la matrice $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. *Calculer le wronskien $W(t) = \det M(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
2. *On suppose maintenant que $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.*
   (a) *Montrer que toute solution y admet une limite en $+\infty$.*
   (b) *Soit θ l'application qui à $y_0 \in \mathbb{R}^n$ associe la limite en $+\infty$ de la solution y telle que $y(0) = y_0$. Montrer que θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. 1. La matrice fondamentale $M(t)$ vérifie

$$M'(t) = A(t)M(t).$$

On pose $W(t) = \det M(t)$. Par la formule de dérivation du déterminant,

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

On obtient donc une équation différentielle scalaire :

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))\, W(t).$$

En intégrant,

$$W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))\, ds \right).$$

En particulier, si $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base de solutions, alors $W(0) \neq 0$, donc

$$W(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2.a) Soit y une solution. Elle vérifie

$$y(t) = y(0) + \int_0^t A(s)y(s)\, ds.$$

Pour $t \geq s \geq 0$,

$$y(t) - y(s) = \int_s^t A(\tau)y(\tau)\, d\tau.$$

On en déduit

$$\|y(t) - y(s)\| \leq \int_s^t \|A(\tau)\|\, \|y(\tau)\|\, d\tau.$$

Par ailleurs on a également,

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + \int_0^t \|A(s)y(s)\| ds$$

Donc en appliquant le lemme de Gronwall pour $\|A(\cdot)\|$ positive et $\|y(\cdot)\|$ continue, pour $t \geq 0$,

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| \exp\left(\int_0^t \|A(\sigma)\| \, d\sigma\right).$$

Comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la quantité

$$C = \exp\left(\int_0^{+\infty} \|A(\sigma)\| \, d\sigma\right)$$

est finie, et donc

$$\|y(t)\| \leq C\|y(0)\| \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ainsi y est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Dès lors,

$$\|y(t) - y(s)\| \leq C\|y(0)\| \int_s^t \|A(\tau)\| \, d\tau.$$

Comme $\|A\|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $s, t \to +\infty$.

Donc $y(t)$ est de Cauchy lorsque $t \to +\infty$, et comme $\mathbb{R}^n$ est complet, $y(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$.

2.b) On définit

$$\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \theta(y_0) = \lim_{t \to +\infty} y(t),$$

où y est l'unique solution telle que $y(0) = y_0$.

D'après la question précédente, θ est bien définie. Elle est linéaire car l'équation différentielle est linéaire.

Montrons qu'elle est injective.

Si $\theta(y_0) = 0$, alors $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. On écrit, pour $t \geq 0$,

$$y(t) = y(T) - \int_t^T A(s)y(s) \, ds.$$

En faisant tendre $T \to +\infty$ et en utilisant que $y(T) \to 0$, on obtient

$$y(t) = -\int_t^{+\infty} A(s)y(s) \, ds.$$

On en déduit

$$\|y(t)\| \leq \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, \|y(s)\| \, ds.$$

En posant

$$m(t) = \sup_{u \geq t} \|y(u)\|,$$

qui est bien défini car $\|y(\cdot)\|$ est continue et $y(t) \to 0$ en $+\infty$, on obtient

$$m(t) \leq m(t) \int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds.$$

Et comme $\|A(\cdot)\|$ est intégrable, on a pour t assez grand,

$$\int_t^{+\infty} \|A(s)\| \, ds < 1,$$

donc nécessairement $m(t) = 0$. Ainsi $y(t) = 0$ pour t assez grand, puis par unicité des solutions, $y \equiv 0$. Donc $y_0 = 0$.

Ainsi θ est injective.

Comme θ est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie n, elle est bijective.

Donc θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

$\square$