Université de Montpellier

Projet M1 SSD

Un modèle pour les nids de mouettes

Rédigé par

CARVAILLO Thomas

CÔME Olivier

PRALON Nicolas

Encadrante : Elodie BRUNEL-PICCININI

24 février 2022

Table des matières

Introduction

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Chapitre 1

Un peu de théorie

1.1 Modélisation du problème

Afin de modéliser commodément le problème, nous introduisons les variables aléatoires suivantes :

- La variable aléatoire X, modélisant la taille des nids
- La variable aléatoire Y, décrivant la taille du nid d'une espèce donnée
- Et Z, la variable aléatoire représentant l'espèce de mouette qui a construit le nid

Hypothèse 1. *Nous supposerons que la taille des nids d'une espèce j (i.e. X conditionnelement à $(Z = j)$) suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu_j, v_j)$.*

Proposition 1. *La variable Z est discrète et à valeur dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, elle suit donc une loi*

$$\sum_{j=1}^{J} \alpha(j)\delta_j$$

où J représente le nombre d'espèce de mouettes considéré et les $\alpha(j)$ sont des réels, positifs stricts, représentant la proportion de nids de l'espèce j, tels que $\sum_{i=1}^{J} \alpha(j) = 1$.

Il s'ensuit la proposition suivante, qui sera la racine du présent projet.

Proposition 2. *La distribution de la taille des nids de mouettes, i.e. X, admet pour densité ,au point x et par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la fonction f_θ définie comme suit*

$$f_\theta(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha(j)\gamma_{\mu_j,v_j}(x)$$

Le but de ce projet sera d'étudier des méthodes permettant l'estimation des divers paramètres de cette densité. Nous détonerons par $\theta := (\alpha_j, \mu_j, v_j)_{1\leq j\leq J}$ les vecteurs des ces dits paramètres.
Pour cela, nous nous placerons sous l'hypothèse suivante

Hypothèse 2. *Soit $\Theta := \{\theta = (\alpha_j, \mu_j, v_j)_{1\leq j\leq J}$ tels que $\alpha_j > 0 \forall j \in [\![1, J]\!]$ et $\sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1\}$. Soient $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon iid de même loi que X. On supposera qu'il existe un $\theta \in \Theta$ tel que les données récoltées, ici les tailles des nids, soient la réalisation du précédent échantillon.*

Notation 1 (Densités)**.** Le vecteur θ ayant été dûment introduit, nous noterons

1. $g_\theta(z) = \alpha(z)$ la densité de la variable aléatoire Z
2. $f_\theta(x|Z = j) := \gamma_{\mu_j,v_j}(x)$ la densité de la loi de X sachant Z, i.e. de la variable aléatoire Y

qui sont, respectivement, contre la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, et par rapport à la mesure de $\mathscr{L}$ebesgue sur $\mathbb{R}$,

Introduisons deux dernières densités, qui nous seront fort utile quant à l'expression des Log-vraisemblances conditionnelles :

Proposition 3 (Densité de Z sachant X)**.** $g_\theta(z|X=x) = \dfrac{\alpha(z)\gamma_{\mu_j,v_j}(x)}{\sum_{j=1}^{J}\alpha(j)\gamma_{\mu_j,v_j}(x)}$*, pour* $z \in \{1, \cdots, J\}$

Démonstration. En effet, BLABLABLA Nicolas le fera ❧

Proposition 4 (Densité du vecteur (X,Z))**.** *Soit le vecteur aléatoire* (X,Z)*; sa densité nous est donnée par*

$$h_\theta(x,z) := \alpha(z)\gamma_{\mu_j,v_j}(x)$$

Démonstration. En effet, si on note par F la fonction de répartition de ce vecteur aléatoire, on obtient

$$\begin{aligned} F(x,z) &= \mathbb{P}(X \leq x, Z = z) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x | Z = z) \times \mathbb{P}(Z = z) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \gamma_{\mu_z,v_z}(t)dt \times \alpha(z) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{\mathbb{N}} \alpha(z)\gamma_{\mu_z,v_z}(t)dt\delta_z \end{aligned}$$

La densité de (X,Z) s'ensuit. ❧

1.2 Le cas simple

1.3 Le cas réel

Bibliographie

Annexe A

Annexe