Análise Semiclássica Aplicada a Física

Thomas F. C. Bastos

Institudo de Física
Universidade de São Paulo
SIICUSP 28

1. Objetivos
2. Operadores Pseudo-Diferenciais
3. Medidas de defeito semiclássicas

Objetivos

- Entender de que maneira a Mecânica Clássica emerge da Mecânica Quântica em um limite apropriado ($h \to 0$).
- Para tal usamos uma ferramenta matemática extremamente poderosa para esse tipo de problema: a Análise Microlocal.

Mecânica Clássica:
Espaço de fase é (M, Ω), os estados são pontos $p \in M$ e os observáveis são funções $a \in C(M, \mathbb{R})$. A evolução do sistema é gerada pelo fluxo hamiltoniano.

Mecânica Quântica:
Observáveis são operadores auto-adjuntos agindo em $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, e os estados são $\psi \in P(\mathcal{H})$. A evolução do sistema é dada pelo grupo unitário fortemente contínuo $U(t) = e^{\frac{iOp(H)t}{h}}$.

Mecânica Clássica:
Espaço de fase é (M, Ω), os estados são pontos $p \in M$ e os observáveis são funções $a \in C(M, \mathbb{R})$. A evolução do sistema é gerada pelo fluxo hamiltoniano.

Mecânica Quântica:
Observáveis são operadores auto-adjuntos agindo em $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, e os estados são $\psi \in P(\mathcal{H})$. A evolução do sistema é dada pelo grupo unitário fortemente contínuo $U(t) = e^{\frac{iOp(H)t}{h}}$.

Pergunta:

Dado uma família de funções $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem a equação de Schrödinger, como se comporta o valor médio $\langle Op(a)\psi_\varepsilon, \psi_\varepsilon \rangle$ de um observável $Op(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ no limite em que $\varepsilon \to 0$?

Análise Semiclássica

A Análise Semiclássica se propõe a responder essa pergunta de forma ainda mais geral: como se comportam uma família $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ que dependem de um certo parâmetro ε e são soluções de uma EDP num certo limite em que ε tende a algum valor?

Análise Semiclássica

A Análise Semiclássica se propõe a responder essa pergunta de forma ainda mais geral: como se comportam uma família $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ que dependem de um certo parâmetro ε e são soluções de uma EDP num certo limite em que ε tende a algum valor?

Mais adiante encontraremos uma solução elegante para o nosso problema. Em um limite apropriado de subsequências $\varepsilon_j \to 0$ o valor médio:

$$\langle Op(a)\psi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\rangle \to \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x,\xi)\mathrm{d}\mu$$

onde μ é uma medida de Radon positiva no espaço de fase $\mathbb{R}^{2n}$, ou seja, uma distribuição de probabilidades.

Como quantizar observáveis clássicos?

Vamos considerar um espaço de funções bem comportadas $S(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi| < \infty \ \forall \alpha, \beta\}$. Uma função $a \in S(\mathbb{R}^{2n})$ é chamada de símbolo.

Quantização de Weyl

Para todo $u \in S(\mathbb{R}^n)$ a quantização de Weyl do símbolo $a(x,\xi) \in S(\mathbb{R}^{2n})$ é um operador $Op(a)$ dado por:

$$Op(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}\langle x-y,\xi\rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi$$

Por vezes denotamos $a^w(x, hD) = Op(a)$ onde $D = \frac{\partial}{i}$.

Resultados importantes

- Dados dois símbolos $a, b \in S$ então a composição $a^w \circ b^w = c^w$ é um novo operador que advem do símbolo:

$$c = a \# b = e^{\frac{ih}{2}\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)} a(x,\xi) b(y,\eta)|_{(x,\xi)=(y,\eta)}$$

onde $\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta) = \langle D_\xi, D_y \rangle - \langle D_x, D_\eta \rangle$

- Após a expanção semiclássica temos que

$$a \# b = ab + \frac{h}{2i}\{a, b\} + O(h^2)$$

O que nos leva as relações de comutação $[a^w, b^w] = \frac{h}{i}\{a, b\}^w + O(h^2)$

Resultados importantes

- É possível ter essas propriedades numa classe mais geral de símbolos

$$S_\delta = \{a \in C^\infty; |\partial^\alpha a| < C_\alpha h^{-\delta|\alpha|} \ \forall\alpha\}$$

- Com $0 \leq \delta \leq 1/2$ e $a \in S_\delta$ o operador $Op(a) : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é limitado e

$$||Op(a)||_{L^2(\mathbb{R}^2)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{|\alpha|\leq M} |\partial^\alpha a|$$

Resultados importantes

Como as propriedades de um símbolo afetam a sua quantização?

Teorema: Desigualdade de Garding

Seja $a \in S$ um símbolo a valores reais tal que $a \geq 0$ então existem constante $h_0 > 0$ e $C \geq 0$ tal que vale a desigualdade:

$$\langle a^w(x, hD)u, u\rangle \geq -Ch||u||_{L^2}^2$$

para todo $0 < h \leq h_0$ e $u \in C_c^\infty$.

Considere uma família $\{u(h)\}_{0<h\leq h_0}$ limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\sup_{0<h\leq h_0} ||h(h)||_{L^2} < \infty$$

O teorema a seguir garante a existência e unicidade da medida de defeito:

Teorema 1: Existência da medida semiclássica

Existe uma única medida de Radon μ em $\mathbb{R}^{2n}$ e uma sequência $h_j \to 0$ tal que:

$$\lim_{h_j\to 0} \langle a^w(x, hD)u(h_j), u(h_j)\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x, \xi)\mathrm{d}\mu$$

para todo $a \in S$.

Demonstração

Seja $\{a_k\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ densa em $S(\mathbb{R}^{2n})$. Tome uma sequência $h_j^1 \to 0$ tal que:

$$\left\langle a_1^w(x, h_j^1 D)u(h_j^1), u(h_j^1)\right\rangle \to \alpha_1$$

Podemos criar um processo iterativo tal que a k-ésima iteração extrai uma subsequência $\{h_j^k\} \subset \{h_j^{k-1}\}$ tal que $\left\langle a_k^w(x, h_j^k D)u(h_j^k), u(h_j^k)\right\rangle \to \alpha_k$

Pelo argumento da diagonal a sequência $h_j = h_j^j \to 0$ com

$$\langle a_k^w(x, h_j D)u(h_j), u(h_j)\rangle \to \alpha_k$$

Demonstração

Definindo $\Phi(a_k) = \alpha_k$ podemos usar a limitação do operadores pseudodiferenciais:

$$|\Phi(a_k)| = \lim_{h_j \to 0} |\langle a_k^w(x, hD)u(h_j), u(h_j)\rangle|$$
$$\leq C \lim_{h_j \to 0} \sup ||a_k^w||_{L^2 \to L^2} \leq C \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |a_k|$$

O que nos mostra que Φ é um mapa linear, limitado e com domínio denso. Pelo teorema de Hann-Banach Φ se extende de forma única para S com

$$|\Phi(a)| \leq C \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |a|$$

Demonstração

Por fim, o teorema da representação de Riesz nos diz que existe uma única medida de Radon μ em $\mathbb{R}^{2n}$ (possivelmente complexa) tal que:

$$\Phi(a) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x, \xi) \mathrm{d}\mu = \lim_{h_j \to 0} \langle a^w(x, hD) u(h_j), u(h_j) \rangle$$

Teorema 2: Positividade da medida

A medida descrita anteriormente é real e positiva.

Demonstração: Seja $a \geq 0$ então pela desigualdade de Gärding

$$\langle a^w(x, hD)u(h), u(h)\rangle \geq -Ch||u||_{L^2}^2$$

e no limite em que $h = h_j \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x, \xi)\mathrm{d}\mu = \lim_{h_j \to 0} \langle a^w(x, hD)u(h_j), u(h_j)\rangle \geq 0$$

Teorema 2: Positividade da medida

A medida descrita anteriormente é real e positiva.

Demonstração: Seja $a \geq 0$ então pela desigualdade de Gärding

$$\langle a^w(x, hD)u(h), u(h)\rangle \geq -Ch||u||^2_{L^2}$$

e no limite em que $h = h_j \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x,\xi)\mathrm{d}\mu = \lim_{h_j \to 0} \langle a^w(x, hD)u(h_j), u(h_j)\rangle \geq 0$$

É um candidato a medida de probabilidade! Perceba que não tivemos que supor que a família de funções $\{u(h)\}_h$ satisfaça uma EDP.

Impondo que a família de funções $\{u(h)\}_h$ seja uma solução aproximada de um certo operador pseudodiferencial $P(x, hD)$, temos uma equação de transporte para medida de defeito:

Teorema 3: Invariância pelo fluxo Hamiltoniano

Seja $p \in S(\langle\xi\rangle^m)$ um símbolo real em que $|p| > \delta$ para $|\xi| > C$ onde $\delta, C > 0$ são constantes. Dado que

$$\begin{cases} ||P(h)u(h)||_{L^2} = o(h) \\ ||u(h)||_{L^2} = 1 \end{cases}$$

Então $\int \{p, a\} \, \mathrm{d}\mu = 0$ para todo $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

Se Φ_t é o fluxo gerado pelo campo vetorial H_p então $\frac{d}{dt} \int \Phi_t^* a \, \mathrm{d}\mu = \int \{p, a\} \mathrm{d}\mu$

Conclusão

- No limite clássico vimos que existe uma medida de defeito finita e positiva associada a família de soluções de uma certa EDP. No caso de um sistema clássico a medida se conversa no fluxo hamiltoniano.
- Podemos interpreta-la como uma densidade de probabilidade no espaço de fase, análoga ao que vemos em Mecânica estatística.
- A análise microlocal é uma ferramente extremamente útil para o limite semiclássico.

Agradecimentos