Conexidade(s)

Thomas Felipe Campos Bastos

17 de abril de 2020

O que é conexidade?

- Intuitivamente um espaço é conexo se não pode ser separado em duas partes (não-vazias) disjuntas

O que é conexidade?

- Intuitivamente um espaço é conexo se não pode ser separado em duas partes (não-vazias) disjuntas
- $\mathbb{R}$ deve ser conexo, mas $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$

O que é conexidade?

- Intuitivamente um espaço é conexo se não pode ser separado em duas partes (não-vazias) disjuntas

- $\mathbb{R}$ deve ser conexo, mas $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$

- Já $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ deve ser desconexo

O que é conexidade?

- Intuitivamente um espaço é conexo se não pode ser separado em duas partes (não-vazias) disjuntas
- $\mathbb{R}$ deve ser conexo, mas $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$
- Já $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ deve ser desconexo
- Não basta que sejam pedaços disjuntos, mas também **abertos** na topologia do espaço ambiente

O que é conexidade?

Definição

Um espaço topológico X é **desconexo** se existem abertos não-vazios disjuntos $A, B \in \tau_X$ tal que $X = A \cup B$. Ele é conexo se não for desconexo.

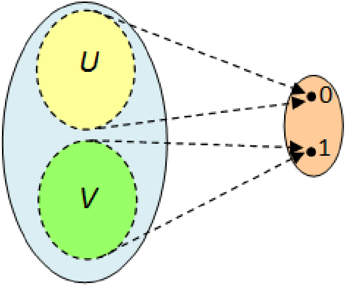
Definições equivalentes de Conexidade

1. X não é a união de dois abertos disjuntos não-vazios
2. X não é a união de dois fechados disjuntos não-vazios
3. $\varnothing$ e X são os únicos clopen do espaço topológico
4. Toda função contínua $f : X \to \{0, 1\}$ é constante

Definições equivalentes de Conexidade

1. X não é a união de dois abertos disjuntos não-vazios
2. X não é a união de dois fechados disjuntos não-vazios
3. $\varnothing$ e X são os únicos clopen do espaço topológico
4. Toda função contínua $f : X \to \{0, 1\}$ é constante

Prova:
$(1 \Rightarrow 3)$ Se existir algum $A \neq \varnothing, X$ clopen então tome $B = X \setminus A$ que também será clopen, e $X = A \cup B$.
$(3 \Rightarrow 4)$ Se existir uma função $f : X \to \{0, 1\}$ contínua não constante, tome $f^{-1}(0) \subset X$ subconjunto próprio que será clopen e não-vazio.
$(4 \Rightarrow 1)$ Se $X = A \cup B$ então a função característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ é contínua mas não é constante.



$X = U \cup V$

$\varnothing = U \cap V$

U, V open in X

É um invariante topológico

Seja X conexo e $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ uma função contínua e sobrejetora então Y é conexo:

É um invariante topológico

Seja X conexo e $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ uma função contínua e sobrejetora então Y é conexo:

Prova:

Se existe um clopen $B \subset Y$ não vazio então $f^{-1}(B) \subset X$ será um subconjunto próprio clopen e não vazio.

Exemplos

- Um espaço discreto é conexo se $|X| \leq 1$. Em particular $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são desconexos
- $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\}$ é desconexo
- Se $I \subset \mathbb{R}$ é conexo então é um intervalo.

Exemplos

- Um espaço discreto é conexo se $|X| \leq 1$. Em particular $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são desconexos
- $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\}$ é desconexo
- Se $I \subset \mathbb{R}$ é conexo então é um intervalo.

Prova:

Se I não é um intervalo, existem $a, b \in I$ e $z \notin I$ tal que $a < z < b$. Temos então que o conjunto $C = \{x \in I : x < z\} = \{x \in I : x \leq z\}$ é clopen não vazio na topologia do subespaço de I.

Teorema do Valor Intermediário

Seja X um espaço conexo e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, então $Im(f)$ é um intervalo.

Propriedades

Se X é desconexo e $Y \subset X$ conexo então ou $Y \subset A$ ou $Y \subset B$ onde A, B são uma separação de X.

Propriedades

Se X é desconexo e $Y \subset X$ conexo então ou $Y \subset A$ ou $Y \subset B$ onde A, B são uma separação de X.

Prova:

$Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$ e $(A \cap Y) \cap (B \cap Y) = \varnothing$. Como Y é conexo, então ou $A \cap Y = \varnothing$ ou $B \cap Y = \varnothing$

Propriedades

Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma coleção de conjuntos conexos tal que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$ para todo $\alpha, \beta \in I$. Então é verdade que $Y = \cup_\alpha A_\alpha$ é conexo.

Propriedades

Seja $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma coleção de conjuntos conexos tal que $A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$ para todo $\alpha, \beta \in I$. Então é verdade que $Y = \cup_\alpha A_\alpha$ é conexo.

Prova:

Por absurdo, se Y é desconexo então $Y = \cup_\alpha A_\alpha = C \cup D$. Então $A_\alpha \subset C$ ou $A_\alpha \subset D$. Escolhendo $A_\alpha \subset C$, sabemos que existe $A_\beta \subset D$. Mas $(A_\alpha \cap C) \cap (A_\beta \cap D) = \varnothing$.

Propriedades

Se $\forall x, y \in X$ existir um $C_{xy} \subset X$ conexo tal que $x, y \in C_{xy}$ então X é conexo.

Propriedades

Se $\forall x, y \in X$ existir um $C_{xy} \subset X$ conexo tal que $x, y \in C_{xy}$ então X é conexo.

Prova:

O caso $X = \varnothing$ é trivial. Se $X \neq \varnothing$ então fixe $a \in X$, e para todo $x \in X$ existe $C_{ax} \subset X$ conexo. Mas $X = \cup_{x \in X} C_{ax}$ com $C_{ax} \cap C_{ay} \neq \varnothing$ para todo $x, y \in X$.

Propriedades

$X \times Y$ é conexo se, e somente se, X e Y são conexos.

Propriedades

$X \times Y$ é conexo se, e somente se, X e Y são conexos.

Prova:

($\Rightarrow$) Se $X \times Y$ é conexo então a projeção $\pi_X : X \times Y \to X$, que é sobrejetora, mostra que X é conexo.
($\Leftarrow$) Para dois pontos qualquer $(a, b), (c, d) \in X \times Y$:

$$X \times \{b\} \cong X$$

$$\{c\} \times Y \cong Y$$

Como $(X \times \{b\}) \cap (\{c\} \times Y) = (c, b)$ o conjunto $(X \times \{b\}) \cup (\{c\} \times Y)$ é conexo.

Outra prova...

Prova:

Seja $F : X \times Y \to \{0, 1\}$ um mapa contínuo. A restrição $F' : \{x\} \times Y \to \{0, 1\}$ e o mapa $g : y \mapsto F'(x, y)$ também são contínuos. O mapa $g = F' \circ E$ é constante então F' também sera constante. Logo F é constante em cada restrição $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$.

Outra prova...

Prova:

Seja $F : X \times Y \to \{0, 1\}$ um mapa contínuo. A restrição $F' : \{x\} \times Y \to \{0, 1\}$ e o mapa $g : y \mapsto F'(x, y)$ também são contínuos. O mapa $g = F' \circ E$ é constante então F' também sera constante. Logo F é constante em cada restrição $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$.

Tome $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ então $F(x, y) = F(x, y') = F(x', y')$.

A reta, $\mathbb{R}^n$ e coisas estranhas

Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é conexo.

Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é conexo.

Prova:

Suponha que $I = [0, 1]$ seja desconexo. Existem $A, B \subset I$ fechados em I tal que $I = A \cup B$.

Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é conexo.

Prova:

Suponha que $I = [0, 1]$ seja desconexo. Existem $A, B \subset I$ fechados em I tal que $I = A \cup B$.

Seja $f : A \times B \to [0, 1]$ tal que $f(x, y) = |x - y|$. Como $A \times B$ é compacto (próximo seminário), f tem um ponto de mínimo (a_0, b_0).

Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é conexo.

Prova:

Suponha que $I = [0, 1]$ seja desconexo. Existem $A, B \subset I$ fechados em I tal que $I = A \cup B$.

Seja $f : A \times B \to [0, 1]$ tal que $f(x, y) = |x - y|$. Como $A \times B$ é compacto (próximo seminário), f tem um ponto de mínimo (a_0, b_0).

Tome o ponto $z = (a_0 + b_0)/2$. $|z - b_0| < |a_0 - b_0|$ então $z \notin A$. Da mesma forma $|z - a_0| < |a_0 - b_0|$ então $z \notin B$ e provamos que I não é intervalo.

A reta, $\mathbb{R}^n$ e coisas estranhas

Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é conexo.

Prova:

Suponha que $I = [0, 1]$ seja desconexo. Existem $A, B \subset I$ fechados em I tal que $I = A \cup B$.

Seja $f : A \times B \to [0, 1]$ tal que $f(x, y) = |x - y|$. Como $A \times B$ é compacto (próximo seminário), f tem um ponto de mínimo (a_0, b_0).

Tome o ponto $z = (a_0 + b_0)/2$. $|z - b_0| < |a_0 - b_0|$ então $z \notin A$. Da mesma forma $|z - a_0| < |a_0 - b_0|$ então $z \notin B$ e provamos que I não é intervalo.

De forma geral $[a, b] \cong [0, 1]$ então todo intervalo é conexo

A reta, $\mathbb{R}^n$ e coisas estranhas

É simples ver que $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$ é conexo. $\mathbb{R}^n$ é também conexo. (Ufa!)

A reta, $\mathbb{R}^n$ e coisas estranhas

É simples ver que $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ é conexo. $\mathbb{R}^n$ é também conexo. (Ufa!)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é desconexo, mas $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ é conexo para todo natural $n \geq 2$.

Mais invariantes topológicos

Cut Point

Um espaço topológico conexo X tem um ponto de corte se existe $p \in X$ tal que $X \setminus \{p\}$ é desconexo

A quantidade de pontos de corte é preservada por homeomorfismos.

Cut Point

Um espaço topológico conexo X tem um ponto de corte se existe $p \in X$ tal que $X \setminus \{p\}$ é desconexo

$\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}$ pois $\mathbb{R}$ tem um número infinito de pontos de corte, enquanto $\mathbb{R}^n$ não possui nenhum.

Mais invariantes topológicos

Cut Point

Um espaço topológico conexo X tem um ponto de corte se existe $p \in X$ tal que $X \setminus \{p\}$ é desconexo

$\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}$ pois $\mathbb{R}$ tem um número infinito de pontos de corte, enquanto $\mathbb{R}^n$ não possui nenhum.

$S^1 \ncong [0,1]$ pois $[0,1]$ tem um número infinito de pontos de corte, enquanto $S^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}$ é conexo

Mais invariantes topológicos

Componentes conexas

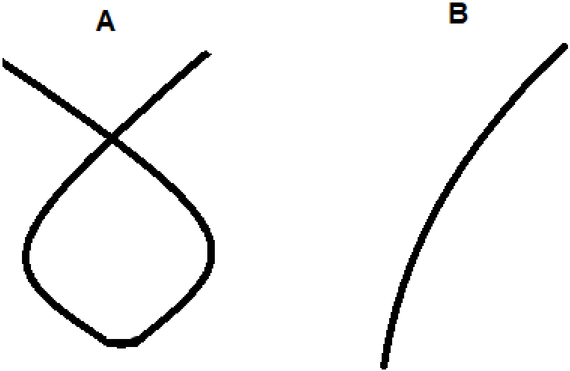
Uma componente conexa C de um espaço topológico X é um subconjunto conexo maximal, ou seja, um subconjunto conexo tal que para qualquer outro D conexo que $C \subset D \subset X$ vale que $C = D$

Componentes conexas

Uma componente conexa C de um espaço topológico X é um subconjunto conexo maximal, ou seja, um subconjunto conexo tal que para qualquer outro D conexo que $C \subset D \subset X$ vale que $C = D$

Também é preservado por homeomorfismos.

Gera uma partição em X com a relação de equivalência pRq se p e q estão na mesma componente conexa.


A
B

Conexidade por caminhos

Um espaço topológico X é conexo por caminhos se para todo $x, y \in X$ existe uma função contínua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Uma condição mais forte

Se X é conexo por caminhos então é também conexo.

Uma condição mais forte

Se X é conexo por caminhos então é também conexo.

Prova:

Para todo $x, y \in X$ existe um caminho $f : [0, 1] \to X$ unindo os dois pontos. O conjunto $C_{xy} = Im(f)$ é conexo pois f é contínua e contem x, y. Logo X é conexo.

Outras definições

Localmente conexo (por caminhos)

Um espaço topológico X é localmente conexo (por caminhos) se para todo ponto $x \in X$ e toda vizinhança $V_x \ni x$ existe um aberto conexo (por caminhos) $U \subset V_x$ que contém x.

Um espaço topológico X conexo e *localmente* conexo por caminhos é conexo por caminhos.

Um espaço topológico X conexo e *localmente* conexo por caminhos é conexo por caminhos.

Prova:

Se $X \neq \varnothing$ então existe $a \in X$ e o conjunto $C = \{x \in X : \text{existe um caminho de a até x}\}$ é não vazio.

Um espaço topológico X conexo e *localmente* conexo por caminhos é conexo por caminhos.

Prova:

Se $X \neq \emptyset$ então existe $a \in X$ e o conjunto $C = \{x \in X : \text{existe um caminho de a até x}\}$ é não vazio.

Se $x \in C$ existe um caminho f de a até x. Existe também um aberto conexo por caminhos $U \ni x$ de forma que para todo $y \in U$ existe um caminho g de x até y. Logo existe um caminho de a até y o que nos leva a conclusão que $U \subset C$. C é um aberto em X

Um espaço topológico X conexo e *localmente* conexo por caminhos é conexo por caminhos.

Prova:

Se $X \neq \varnothing$ então existe $a \in X$ e o conjunto $C = \{x \in X : \text{existe um caminho de a até x}\}$ é não vazio.

Se $x \in C$ existe um caminho f de a até x. Existe também um aberto conexo por caminhos $U \ni x$ de forma que para todo $y \in U$ existe um caminho g de x até y. Logo existe um caminho de a até y o que nos leva a conclusão que $U \subset C$. C é um aberto em X

Se $x \notin C$ existe um aberto conexo por caminhos $U \ni x$ de forma que para todo $y \in U$ existe um caminho g de x até y. Não poderia existir nenhum caminho de y até a então $U \subset X \setminus C$. C é fechado, clopen e não vazio. Por conexidade vemos que $C = X$.

Homotopia de caminhos

Seja X um espaço topológico e $f, g : I = [0,1] \to X$ caminhos que tem os mesmos pontos iniciais e finais (x e y). Dizemos que f e g sao homotópicos se exise um mapa contínuo $H : I \times I \to X$ tal que:

$$H(s,0) = f(s)$$

$$H(s,1) = g(s)$$

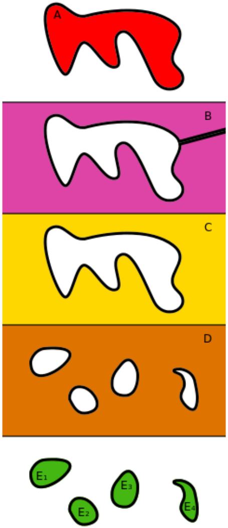
$$H(0,t) = x$$

$$H(1,t) = y$$

Simplesmente conexo

Um espaço topológico X é simplesmente conexo se é conexo por caminhos e todo *loop* é homotópico ao loop constante $(c(t) = x)$.

Final



$SO(n)$ é conexo por caminhos

- $SO(n)$ tem uma correspondência bijetiva com o conjunto das bases ortonormais de $\mathbb{R}^n$
- Basta provar que para qualquer base ortonomal $(a_i)_{i=1}^n$ existem uma deformação (rotação) contínua para a base ortonormal $(e_i)_{i=1}^n$.

$SO(n)$ é conexo por caminhos

Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$ unitários então

$$\gamma : [0,1] \to SO(n)$$

onde $\gamma(0)v = v$ e $\gamma(1)v = w$

$SO(n)$ é conexo por caminhos

Sejam $v, w \in \mathbb{R}^n$ unitários então

$$\gamma : [0,1] \to SO(n)$$

onde $\gamma(0)v = v$ e $\gamma(1)v = w$

Tome $u \in \mathbb{R}^n$ ortogonal a v tal que $u \in span(v, w)$. Agora se $V = span(u, v)$, então $w \in V$ e

$$w = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} v$$

$SO(n)$ é conexo por caminhos

Basta tomar o caminho

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\phi) & \sin(t\phi) & 0 \\ -\sin(t\phi) & \cos(t\phi) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

$SO(n)$ é conexo por caminhos

Basta tomar o caminho

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\phi) & \sin(t\phi) & 0 \\ -\sin(t\phi) & \cos(t\phi) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix}$$

Para uma base ortonomal qualquer $(a_i)_{i=1}^n$ basta aplicar $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ... \circ \gamma_{n-1}$ onde $\gamma_1 a_1 = e_1$, $\gamma_2\gamma_1 a_2 = e_2$ e assim por diante. Logo $\gamma(0) = I_n$ e $(\gamma a_1, ..., \gamma a_n) = (e_1, ..., e_n)$