

2 Finite-Elemente-Modellierung resonanter Sensoren

TH. FABULA

INSTITUT FÜR MIKRO- UND INFORMATIONSTECHNIK DER
HAHN-SCHICKARD-GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE FORSCHUNG E.V.,
VILLINGEN-SCHWENNINGEN

2.1 Einleitung

2.1.1 Funktionsprinzip resonanter Sensoren

Das Prinzip eines resonanten Sensors beruht auf der Abhängigkeit der Eigenfrequenz des Resonators von einer äußeren physikalischen Größe (z.B. Druck, Kraft, Temperatur), indem der Spannungszustand beeinflusst oder die Trägheit des Resonators über eine Massenbelegung verändert wird. Die Resonanzfrequenz stellt als Meßgröße ein quasi-digitales Ausgangssignal dar. Der Sensor wird einerseits durch seine passiven Resonatoreigenschaften wie Eigenfrequenz, Schwingungsmode und der Kopplung zur Meßgröße, andererseits durch die Eigenschaften der Schwingungsanregung und -detektion, beispielsweise der Modenselektivität, der Effizienz der Energieeinkopplung und der Auflösung des Abfragesystems charakterisiert. Im folgenden soll das frequenzanaloge Funktionsprinzip stellvertretend am Beispiel eines resonanten, mikromechanischen Drucksensors aufgezeigt werden, der in **Bild 2.1** schematisch dargestellt ist. Die Anregung wird durch eine piezoelektrische Dünnschicht (hier: Zinkoxid) bewerkstelligt, die mit Hilfe des transversalen piezoelektrischen Effektes bei Anlegen einer elektrischen Wechselspannung infolge Dehnungen und Kontraktionen auf der Membranoberfläche Biegemomente erzeugt und somit zu periodischen Membranauslenkungen führt. Infolge einer Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite der Membran wird der Siliziumresonator deformiert. Der Betrag der statischen Auslenkung ist ein vielfaches größer als die dynamische Schwingungsamplitude. Bei genügend großer statischer Auslenkung stellen sich durch Reaktionskräfte Membranspannungen ein, die zu einer Versteifung des Resonators führen, so daß sich die Resonanzfrequenz analog zur Meßgröße ändert. Wird umgekehrt der piezoelektrische Effekt auch zur Schwingungsdetektion genutzt, so kann mit einer geeigneten Auswerteschal-

1.4 Literaturverzeichnis

- [1] S.Middelhoek, P.J.French, J.H.Huijsing, W.J.Lian: Sensors with Digital or Frequency Output. Sensors and Actuators 15 (1988) 119
- [2] S.Büttgenbach: Frequenzanaloge Sensoren. In: Technologietrends in der Sensorik, VDI Bildungswerk: Düsseldorf 1991
- [3] S.Büttgenbach: Mikromechanik. B.G.Teubner: Stuttgart 1991
- [4] S.Büttgenbach: Frequenzanaloge Quarzsensoren. Hard and Soft 3 (1988) No. 10, Fachbeilage Mikroperipherik
- [5] K.E.Petersen: Silicon as a Mechanical Material. Proc. IEEE 70 (1982) 420
- [6] C.J.v.Mullem, F.R.Blom, J.H.J.Fluitman, M.Elwenspoek: Piezoelectrically Driven Silicon Beam-Force Sensor. Sensors and Actuators A25-A27 (1991) 379
- [7] H.Wohltjen: Surface Acoustic Wave Microsensors. Proc. 4th Int. Conf. Solid-State Sensors and Actuators, Tokio 1987, p.471
- [8] O.Yamazaki, T.Mitsuyu, K.Wasa: ZnO Thin-Film SAW Devices. IEEE Trans. Sonics Ultrason. SU-27 (1980) 369
- [9] B.A.Martin, S.W.Wenzel, R.M.White: Viscosity and Density Sensing with Ultrasonic Plate Waves. Sensors and Actuators A21-A23 (1990) 704

tung der Sensor in Eigenresonanz betrieben und die Frequenzänderung über einen Frequenzzähler ausgelesen werden.

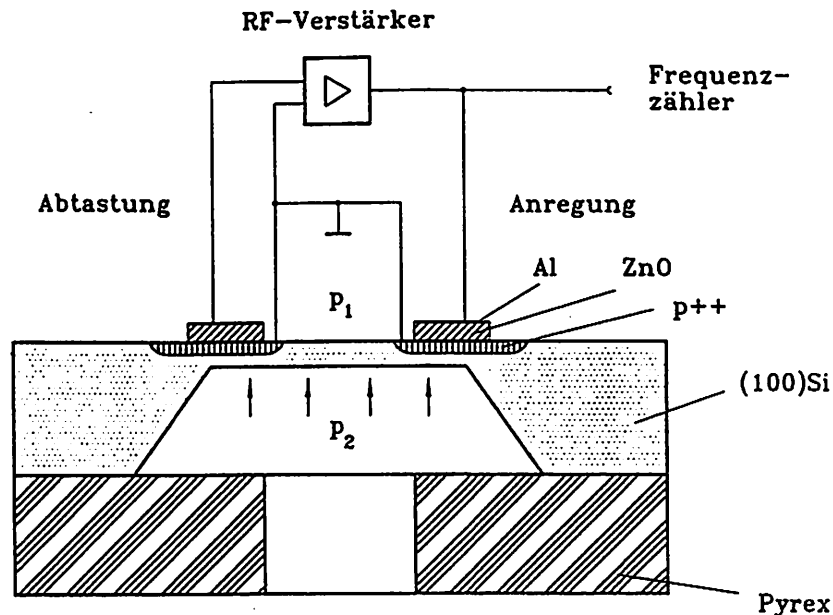


Bild 2.1: Resonanter Silizium-Drucksensor mit piezoelektrischem Antrieb

2.1.2 Materialeigenschaften mikromechanischer Werkstoffe

In **Tabelle 2.1** sind die mechanischen, thermischen, piezo- und dielektrischen Materialeigenschaften einiger wichtiger in der Mikromechanik verwendeter Werkstoffe zusammengestellt. Als Substratmaterial wird für resonante Sensoren neben einkristallinem Silizium auch einkristalliner Quarz verwendet. Da Silizium nicht piezoelektrisch ist, werden z.B. Aluminiumnitrid (AlN) und Zinkoxid (ZnO) als piezoelektrisch aktive Wandlerschichten eingesetzt. Im Vergleich zu den in Dünnschichttechnologie (Sputterprozeß) hergestellten polykristallinen Materialien AlN und ZnO zeichnen sich PZT-Piezokeramiken (Blei-Zirkon-Titanat) durch extrem hohe, einkristallines Quarz hingegen durch relativ niedrige piezoelektrische Kopplungskoeffizienten d_{ij} aus. Ein Maß für die Effizienz der Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie stellt der elektromechanische Kopplungsfaktor dar. Der effektive Kopplungsfaktor k^{eff} setzt sich aus einem material- und einem geometrieabhängigen Anteil zusammen und kann nur mit Hilfe gekoppelter FE-Berechnungen für eine gegebene Resonatorgeometrie ermittelt werden. Die materialabhängigen transversalen und planaren Kopplungsfaktoren k_{31} bzw. k_p^{mat} für reine Transversal- bzw. Planarschwinger sind von dem

mechanischen Steifigkeitskoeffizienten S_{11}^E , der Poissonzahl ν ($= -S_{12}/S_{11}$), sowie den piezo- und dielektrischen Konstanten d_{31} bzw. e_{33}^T der piezoelektrischen Dünnschicht (Zusammenhänge siehe Tabelle 2.1) abhängig [VIB 81]. Da die Materialparameter mikrotechnisch hergestellter Schichtsysteme stark vom technologischen Herstellungsprozeß beeinflußt werden, unterscheiden sie sich u.U. erheblich von denen des Festkörpermateriale (Bulk) und weisen in der Regel prozeßtechnisch bedingte innere Spannungen auf. Die angegebenen Materialdaten beziehen sich lediglich für Aluminiumnitrid auf einige Mikrometer dünne Schichten [Fra 88], die anderen Angaben beziehen sich auf Bulk-Material [LB 82], [Tic 80], [VIB 81].

	ρ [kg/m ³]	S_{11}^E/S_{12}^E [10 ⁻¹² Pa ⁻¹]	ν	d_{31} [10 ⁻¹² C/N]	d_{32} [10 ⁻¹² C/N]	$\epsilon_{11}^T/\epsilon_0$	$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	α_{th} [10 ⁻⁶ K ⁻¹]	λ [W/mK]	k_p^{mat}
Si	2329	7.68 -2.14	0.28	—	—	11.2	11.2	2.3 - 2.6	156	—
Quarz	2650	12.78 -1.81	0.14	$d_{11} = 2.30$	$d_{14} = -0.67$	4.51	4.63	$7.48 \parallel z$ $13.7 \perp z$	12	(0.1)
AlN	3260	3.53 -1.01	0.29	-2.00	5.53	9.04	11.4	$4.15 \parallel z$ $5.27 \perp z$?	0.18
ZnO	5470	7.91 -3.30	0.42	-5.12	12.0	9.26	8.2	$2.92 \parallel z$ $4.75 \perp z$	54	0.40
PZT	7600	15.4 -5.70	0.37	-160	355	1600	1600	~ 7.0	1.2	0.61

$$k_p^{mat} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot k_{31} \approx 1,6 \dots 1,9 \cdot k_{31} \quad k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \cdot \epsilon_{33}^T}$$

Tabelle 2.1: Materialeigenschaften mikromechanischer Werkstoffe

2.1.3 Analytische Auslegung von resonanten Sensoren

Für die Anwendung als resonanter Kraft- und Drucksensor kommen insbesondere Biegebalken- und Membranresonatoren in Frage. Unter der Annahme idealer Einspannbedingungen und homogener, isotroper Materialeigenschaften lassen sich die Resonanzfrequenzen und lastabhängigen Frequenzänderungen des Resonators für einfache Schwingergeometrien analytisch ermitteln. Durch die analytischen Ansätze kann der Arbeitspunkt resonanter Sensoren, d.h. die Grundresonanzfrequenz und die Meßgrößenempfindlichkeit, über eine geeignete Wahl der geometrischen Abmessungen eingestellt werden.

Die Resonanzfrequenzen für die Biegeschwingungen sind von den geometrischen Dimensionen, Resonatorlänge l und -dicke h , der Einspannungsart sowie der Materialparameter, Elastizitätsmodul E , Poissonzahl ν und Materialdichte ρ abhängig. Für die Resonanzfrequenz der Grundbiegeschwingung gilt [Alb 82]:

$$f_1 \approx c_f \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} \quad (1)$$

Die Proportionalitätskonstante c_f ist von der Resonatorgeometrie und der Schwingungsmode abhängig und beträgt für doppelseitig eingespannte Biegebalken etwa 1,028. Die Kraftempfindlichkeit von Balkenresonatoren wird in Kapitel 5 diskutiert.

Die in der Literatur für Membranen angegebenen analytischen Zusammenhänge für den Auslenkungs- und Spannungszustand, sowie die Resonanzfrequenzen beruhen auf der Kirchhoffschen Platten- und Schalentheorie und gehen von der Annahme ebener Objekte aus, deren laterale Abmessungen wesentlich größer als deren Dicke ist. Bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen werden verschiedene Näherungsverfahren (z.B. [You 50]) verwendet. Für die Resonanzfrequenzen f_{ij} ebener Membranen gilt [Ble 84]:

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\sqrt{12}\pi} \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} \quad (2)$$

wobei: E, ν : isotroper Elastizitätsmodul, Poissonzahl
 a, h : Membranseitenlänge, -dicke
 i, j : Anzahl der Halbwellen in x- bzw. y- Richtung
 ρ : Dichte (Materialhomogenität angenommen)

Die Konstante λ ist von den Einspannbedingungen und dem Seitenverhältnis der Membran abhängig und wird auch als normierte Eigenfrequenz für den jeweiligen Schwingungsmode bezeichnet. **Tabelle 2.2** enthält eine Zusammenstellung der normierten Eigenfrequenzen λ_{ij}^2 einer fest eingespannten, quadratischen, homogenen Membran, wobei in [Pon 91] auch die Eigenfrequenzen für anisotropes Materialverhalten angegeben werden.

Material: Literatur: Mode ij	isotrop [Ble 84]	isotrop [Pon 91]	anisotrop [Pon 91]
1 11	35,99	35,99	35,16
2 21	73,41	73,39	71,91
3 12	73,41	73,39	71,91
4 22	108,30	108,22	104,35
5 31	131,60	131,78	130,09
6 13	132,20	132,41	130,67
7 32	165,15	165,16	159,73
8 23	165,15	165,16	159,73
9 33	---	220,32	211,34

Tabelle 2.2: Eigenfrequenzenverhältnisse einer Siliziummembran

Für die Eigenfrequenzverschiebung als Folge einer Druckeinwirkung ergibt sich eine Überlagerung eines statischen und dynamischen Problems. Im ersten Schritt wird die Membranmittenauslenkung als Funktion des einwirkenden Druckes ermittelt, im zweiten Schritt die Frequenzverschiebung als Funktion der Membranauslenkung. Die Überlagerung ergibt die Frequenzverschiebung als Funktion des einwirkenden Druckes. In der Literatur wird von verschiedenen Ansätzen ausgegangen, bei denen lineare Zusammenhänge für relativ dicke Membranen bei kleinen Auslenkungen bzw. nichtlineare Zusammenhänge für dünne Membranen bei großen Auslenkungen angegeben werden. Für quadratische, fest eingespannte Platten der Dicke h gilt für den nichtlinearen Zusammenhang zwischen einwirkendem Druck p und der Membranmittenauslenkung d nach [Cha 87]:

$$p = \frac{16 E}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \left[4,19847 \frac{d}{h} + 1,5816 \left(\frac{d}{h} \right)^3 \right] \quad (3)$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Lösungsformel nach Kardan aufgelöst und zur Berechnung der Resonanzfrequenzänderung in Abhängigkeit von der Auslenkung [Utt 87] herangezogen werden:

$$f = f_1 \sqrt{1 + c \left(\frac{d}{h} \right)^2} \quad (4)$$

Die Konstante c ist von der Einspannung und der Membranform abhängig. Für die Auslegung resonanter Siliziumsensoren, die bei Biegeschwingungen Dehnungen in $\langle 110 \rangle$ -Kri-

stallrichtung erfahren, wird für den Elastizitätsmodul $E = 168,9 \text{ GPa}$ und für die Poissonzahl $\nu = 0,063$ angenommen. Die Dichte ρ von Silizium beträgt 2329 kg/m^3 . Die angegebenen Materialdaten beziehen sich auf Zimmertemperatur.

2.1.4 Numerische Modellierverfahren für resonante Sensoren

Beim Entwurf von mikromechanischen Sensoren kommt der Simulation mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) eine wichtige Bedeutung zu, da sie bereits in der Entwurfsphase gestattet, auch komplexe Schwingergeometrien mit beliebigen Randbedingungen und die technologisch zu realisierenden Funktionsprinzipien unter Berücksichtigung prozeßtechnischer Einschränkungen zu modellieren. Als Ausgangswerte für die numerischen Modellrechnungen dienen analytische Abschätzungen, die in der Regel nur für einfache Strukturgeometrien durchgeführt werden können. Durch Parametervariationen des FE-Modells kann der Einfluß der Schwingergeometrie und der Materialeigenschaften der Dünnschichtsysteme vorab studiert werden. Die FE-Methode erlaubt somit resonante, mikromechanische Sensoren geeignet auszulegen und die Sensoreigenschaften gezielt zu optimieren.

Mit Hilfe **dynamischer FE-Berechnungen** werden die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen (Modalanalyse) verschiedener Sensorstrukturen (Einfach-, Dreifachbalken, Membranen) bestimmt und der Einfluß der zu untersuchenden Meßgröße ermittelt. Die Berechnung der Druck- bzw. Kraftempfindlichkeit erfolgt durch eine nichtlineare, **statische FE-Berechnung**, in welcher die durch die Meßgröße hervorgerufene Steifigkeitsänderung des Gesamtsystems bestimmt wird. Die geänderte Struktursteifigkeit wird anschließend herangezogen, um die Eigenfrequenzen des Sensors unter dieser Belastung zu ermitteln. Durch einen Vergleich der berechneten Sensorkennlinien mit experimentellen Daten mikromechanischer Resonatorstrukturen in Mehrlagenaufbau (sog. Multilayerstrukturen) kann auf die innere Spannung der Dünnschichten zurückgeschlossen werden.

Gekoppelte FE-Berechnungen unter Berücksichtigung der elektromechanischen Wechselwirkung ermöglichen eine gezielte Vorhersage des statischen und dynamischen Verhaltens von piezoelektrisch betriebenen Sensoren. Das Frequenzgangverhalten wird ermittelt, indem das mechanische Amplitudenspektrum und der elektrische Impedanz- und Phasenverlauf in Abhängigkeit der piezoelektrischen Anregung modelliert wird. Insbesondere wurde das

Schichtdickenverhältnis in Bezug auf die Anregungseffizienz optimiert und die Elektrodengeometrie für eine möglichst selektive Schwingungsanregung abgeleitet.

Der vorliegende Bericht dokumentiert die Möglichkeiten, gekoppelte dynamische FE-Berechnungen im Entwurfsprozeß von resonanten mikromechanischen Sensoren einzusetzen. Ein Vergleich von numerischen und experimentellen Ergebnisse zeigt die erreichbaren Modellierungsgenauigkeiten der FE-Berechnungsmethode auf. Für die Modellierung wurde das kommerziell verfügbare Finite-Elemente Programmsystem ANSYS eingesetzt [SASI].

2.2 Dynamische Eigenschaften mikromechanischer Resonatoren

Aufgrund der verschiedenen Schwingergeometrien und der spezifischen Resonatorcharakteristika resonanter Sensoren, wie Materialeigenschaften und Randbedingungen, treten unterschiedliche Schwingungsformen auf. Während bei dünnen Siliziummembranen aufgrund der Momentenanregung nur Biegeschwingungen und deren Oberwellen auftreten, sind bei Quarzmembranen aufgrund der Kristallstruktur auch überlagerte, komplexe Schwingungsformen (z.B. Dickenscherswingungen, Kapitel 3) möglich. Im Fall von Balkenresonatoren können bei beiden Materialien neben den Biegeschwingungen auch Longitudinal- und Torsionschwingungen, sowie Überlagerungen dieser Schwingungsformen auftreten.

2.2.1 Quarz-Doppelstimmgabeln

Die Berechnung der Eigenfrequenzen von Quarzschwingern erlaubt die Genauigkeit der FE-Methode zu testen, da die Materialeigenschaften von einkristallinem Quarz sehr genau bekannt sind [Bri 85] und keine Verspannungen infolge von Dünnschichten zu beachten sind. Die Biegeresonanzfrequenzen von Kraftsensoren auf der Basis von Quarz-Doppelstimmgabeln konnten mit einfachen, zweidimensionalen FE-Modellansätzen mit isotropen Materialverhalten berechnet werden, so daß die Abweichungen zu experimentell gemessenen Werten weniger als 2 % betrugen. Die Modellierung komplexer Schwingungsformen setzt allerdings eine dreidimensionale Formulierung unter Einschluß des anisotropen Materialverhaltens und der piezoelektrischen Eigenschaften, sowie die Berücksichtigung der elektrischen Abschlußbedingungen der Elektroden voraus. In Bild 2.2 ist das Modenspektrum einer idealisierten

Quarz-Doppelstimmgabel (Stimmgabellänge: 5,0 mm, Stimmgabelbreite: 0,2 mm) dargestellt. Um alle möglichen Bewegungsformen der Quarz-Doppelstimmgabel, also auch Torsions- und überlagerte Schwingungsformen zu berechnen, wurde ein 3D-Modell erstellt. Im unteren Frequenzbereich dominieren unterschiedliche Biegeschwingungen (y-, z-Richtung), während mit steigender Frequenz sich zunehmend Torsions- und überlagerten xyz-Schwingungszustände einstellen.

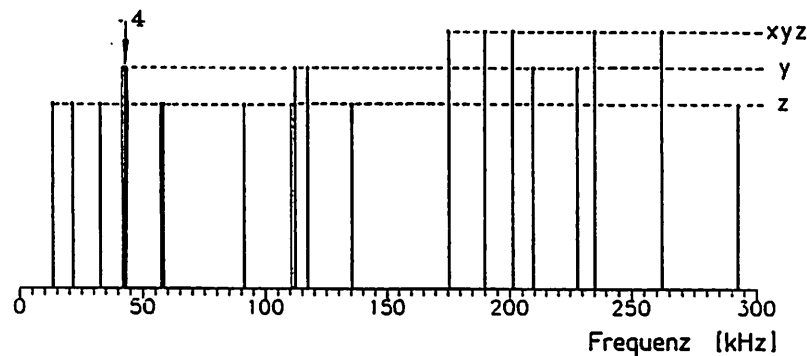


Bild 2.2: Modenspektrum einer Quarz-Doppelstimmgabel

In **Bild 2.3** sind die den ersten vier Eigenfrequenzen entsprechenden Schwingungsmoden der Quarz-Doppelstimmgabel dargestellt. In der Eigenschwingungsmode, in der die Doppelstimmgabel als Kraftsensor betrieben wird, schwingen die Stimmgabelstege gegenphasig zueinander, sodaß keine Momente in die Befestigungsbereiche ausgekoppelt werden. Die vierte Schwingungsmode weist aufgrund der gegenphasigen Stimmgabelbewegungen die höchste Schwingungsgüte verbunden mit der höchsten Kraftauflösung auf. Bei den höheren Schwingungsmoden wechseln sich symmetrische (phasengleich) und antisymmetrische (180° phasenverschoben) Stimmgabelbewegungen ab und die Anzahl der Schwingungsmaxima nimmt zu. Die Doppelstimmgabel ist in y-Richtung steifer als in z-Richtung, sodaß die transversalen z-Schwingungen bei 13,3 (gleichphasig) und 21,1 kHz (gegenphasig) frequenzmäßig am tiefsten liegen. Die beiden transversalen Grundschwingungen in y-Richtung bei 41,9 und 42,8 kHz liegen aufgrund der erhöhten Biegesteifigkeit in y-Richtung frequenzmäßig höher.

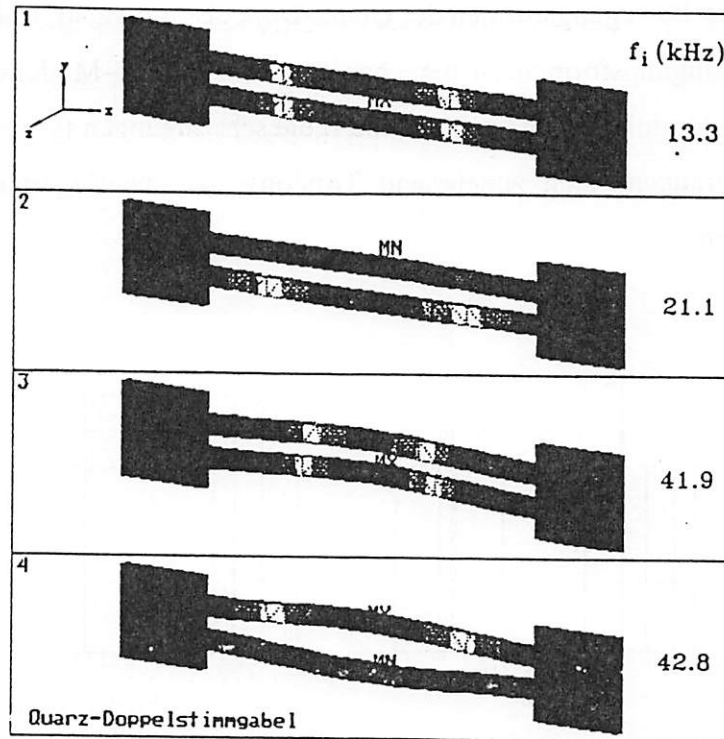


Bild 2.3: Biegeschwingungsmoden einer Quarz-Doppelstimmgabel

Bei der Berechnung der Kraftempfindlichkeit von Quarz-Doppelstimmgabeln wird der Sensor mit einer axialen Zugkraft beaufschlagt und die Resonanzfrequenzänderung berechnet. Die Kraftempfindlichkeit des Quarzsensors ist abhängig von dem Verhältnis der Stimmgabellänge zur Stimmgabelbreite. Die Kraftempfindlichkeiten wurden für verschiedene Schwingungsmoden berechnet. Die höchste Empfindlichkeit weist die y-A1-Mode mit etwa 1,83 ‰/N auf, während die Grundmode y-S1 bei 1,64 ‰/N (y-S1 : symmetrische Mode, y-A1 : gegenphasige Mode) liegt. Die Kraftempfindlichkeiten der höheren Biegeschwingungsmoden nehmen stark ab. Messungen an kommerziell erhältlichen Quarz-Doppelstimmgabeln (Micro Crystal, CH-Grenchen), die in der gegenphasigen Mode y-A1 angeregt werden, ergaben einen Wert von etwa 1,42 ‰/N.

Für verschiedene Stimmgabelbreiten wurden die Kraft-Frequenz-Kennlinien berechnet. In **Bild 2.4** sind die Kraftempfindlichkeiten η der beiden Biegeschwingungsmoden in der Balkenebene in Abhängigkeit der Stimmgabelbreite w dargestellt. Die Stimmgabelbreite wurde von 0,4 bis 0,08 mm variiert und führte zu einer maximalen Empfindlichkeit von etwa 42

$\% / N$ für die y -A1-Schwingungsmode. Die Nichtlinearität der Kennlinie beträgt allerdings bei der minimalen Balkenbreite etwa 2,5 % bezogen auf den maximalen Meßbereich (hier: 10 N).

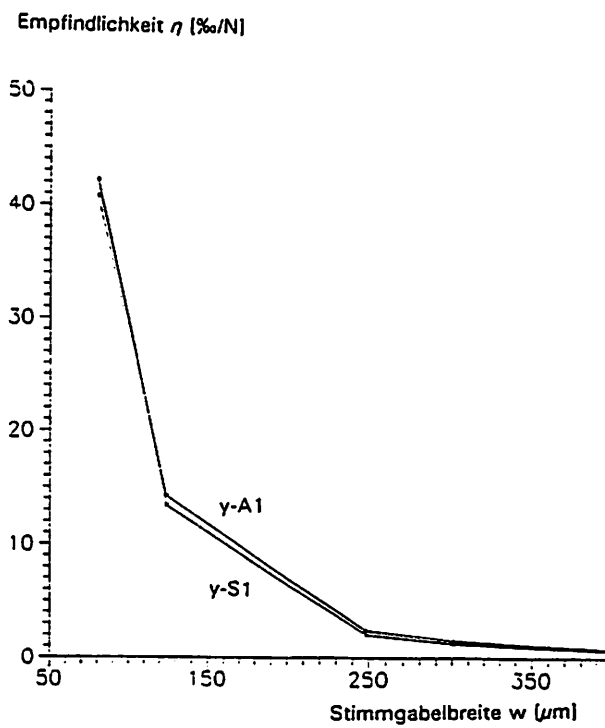


Bild 2.4: Abhängigkeit der Kraftempfindlichkeit von der Stimmgabelbreite

2.2.2 Silizium-Balkenresonatoren mit unterschiedlichen Querschnitten

Naßchemisch geätzte Balkenresonatoren in (100)-Silizium weisen einen prismatischen Querschnitt auf. Bei Kraftsensoranwendungen werden Stabilisierungsstege (sog. Shunts) in Waferdicke parallel zum schwingenden Balken als Überlastschutz vorgesehen. In Bild 2.5 sind die numerisch berechneten Kraft-Frequenz-Kennlinien von Silizium-Balkenresonatoren in Abhängigkeit der Balkendicke für die Grundmode dargestellt.

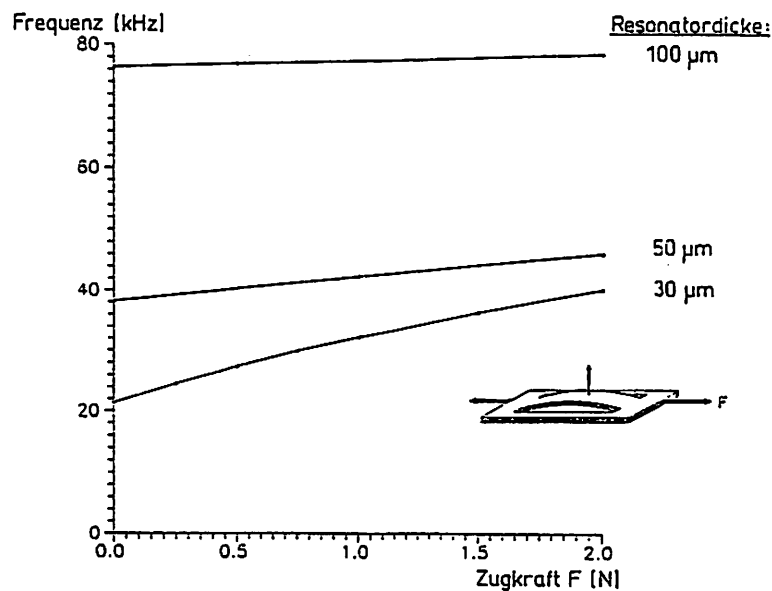


Bild 2.5: Kraft-Frequenz-Kennlinien von Silizium-Kraftsensoren

Tabelle 2.3 faßt die charakteristischen Kenngrößen, die Grundresonanzfrequenz f_1 , die Kraftempfindlichkeit η , die Kennlinien-Nichtlinearität NL und die maximale Zugspannung σ_x (bei $F = 2 \text{ N}$) der berechneten Silizium-Kraftsensoren zusammen.

Balkendicke:	f_1 [kHz]	η [%/N]	NL [%]	σ_x [MPa]
100 μm	76	1,41	$\pm 0,2$	31
50 μm	38	10,3	$\pm 1,3$	62
30 μm	23	43,8	$\pm 5,4$	111

Tabelle 2.3: Charakteristische Kenngrößen von Silizium-Kraftsensoren

Die Frequenzverschiebung ist abhängig von der Größe der mechanischen Spannung im Resonator, so daß durch eine Änderung des Resonatorquerschnitts die Kraftempfindlichkeit erhöht werden kann. Durch Laserstrukturierung von Silizium in Kombination mit anisotroper Naßätztechnik (siehe auch Kapitel 5) können dreiecksförmige Balkenquerschnitte mit einem spitzen Winkel von 35° in (110)-Silizium hergestellt werden, die bei einer gleichen Kraftbeaufschlagung eine höhere Resonatorverspannung als prismatische Balken aufweisen [Ala 92].

In **Tabelle 2.4** sind die numerisch berechneten Resonanzfrequenzvielfachen $c_i = f_i / f_1$ von Einfach-Balkenstrukturen mit verschiedenen Balkenquerschnitten aus Silizium aufgelistet und Meßwerten gegenübergestellt. Die Frequenzen sind auf die jeweilige Grundmode Z1 normiert. Die verschiedenen Oberschwingungen aus der Balkenebene heraus sind mit Z2 bis Z5 gekennzeichnet. Die Balkenlänge betrug 3 mm, die Breite $200 \mu\text{m}$, während die Dicke etwa $70 \mu\text{m}$ betrug (siehe auch Kapitel 6).

Biegeschwin- gungsmode:	FEM-Berechnungen:		Messungen:	
	dreieckig	prismatisch	dreieckig	prismatisch
Z1	1,00	1,00	1,00	1,00
Z2	2,75	2,73	2,76	2,75
Z3	5,38	5,29	5,38	5,40
Z4	8,85	8,65	8,80	---
Z5	13,2	12,8	12,3	---

Tabelle 2.4: Vergleich der normierten Resonanzfrequenzen von Silizium-Balkenstrukturen mit unterschiedlichen Balkenquerschnitten

In **Bild 2.6** sind die normierten Resonanzfrequenzen von Balkenschwinger mit dreieckigen und prismatischen Balkenquerschnitt in Abhängigkeit der mechanischen Zugspannung im Biegebalken dargestellt. Bei den dreieckigen Balkenquerschnitten wird eine um etwa 30% höhere Kraftempfindlichkeit als bei den prismatischen erreicht [Ala 92].

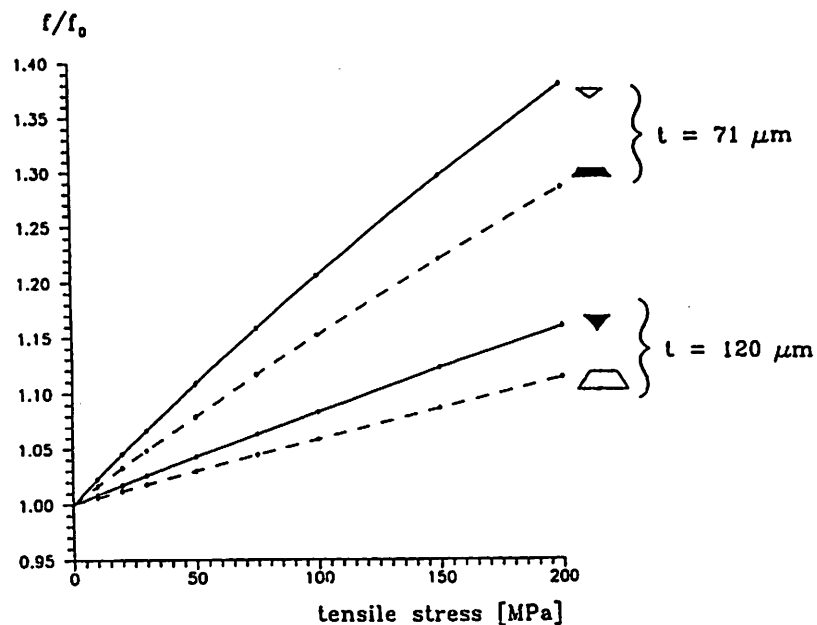


Bild 2.6: Vergleich der Kraftempfindlichkeit von Balkenresonatoren mit dreieckigem und prismatischem Balkenquerschnitt

Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Auslegung von resonanten Sensorgeometrien ist die Wahl der günstigsten Resonatorhalterung, um die inneren Dämpfungsbeiträge des Schwingers möglichst gering zu halten. In Kapitel 5 wird über die Realisierung eines resonanten Kraftsensors auf der Basis einer Dreifachbalkenstruktur aus Silizium berichtet. Durch eine Momentenkompensation wird eine erhöhte Schwingungsgüte erreicht. Zusätzlich hat eine geeignete Strukturierung der Resonatorbefestigung eine Modenentkopplung zur Folge, die sich durch eine verbesserte Modenselektivität, d.h. Unimodalität des Resonatorsystems ausdrückt.

2.2.3 Resonante Silizium-Membrandrucksensoren

Für die resonante Drucksensoranwendung kommen sowohl ebene als auch strukturierte Membranen aus Silizium (Kapitel 2.1.1) oder Quarz mit piezoelektrischer Anregung in Frage. In Zusammenarbeit mit dem HSG-IMIT hat der Verbundpartner MotoMeter GmbH einen reso-

nanten Quarzdrucksensor auf der Basis einer strukturierten Membran entwickelt, über dessen Entwurf und Realisierung in Kapitel 3 ausführlich berichtet wird.

Der Verbundpartner Robert Bosch GmbH hat resonante Drucksensoren in Silizium hergestellt, die in enger Kooperation mit dem HSG-IMIT modelliert und weiter optimiert wurden. Für die Modellierung von resonanten Silizium-Drucksensoren sind daher verschiedene FE-Modelle entwickelt und der Einfluß der Geometrie- und der Materialeigenschaften unter verschiedenen Einspannbedingungen untersucht worden. Es wurden sowohl zweidimensionale FE-Modelle mit isotropen Materialeigenschaften, als auch dreidimensionale FE-Modelle unter der Berücksichtigung der vollen Materialanisotropie des Siliziums mit der $54,7^\circ$ -Randeinspannung infolge der (111)-Ebenen untersucht. Die maximale Abweichung der Resonanzfrequenzen zwischen der analytischen und der numerischen Beschreibung beträgt etwa 10 %. Der Unterschied zwischen isotropem und anisotropem Materialansatz bei Siliziummembranen führt zu einer Abweichung von etwa 3 % bei den Eigenfrequenzen der Grundbiegeschwingungen. Eine weitere Erniedrigung der Resonanzfrequenzen tritt infolge verminderter Einspannungssteifigkeit durch die schräge Randeinspannung ein, die in der gleichen Größenordnung liegt. Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Modelleinflüsse ist in [Sch 92] enthalten. In Bild 2.7 sieht man die an einem 2D-Modell berechneten Schwingungsmoden M_{ij} und die zugehörigen Frequenzvielfachen $c_i = f_i / f_1$ einer ebenen Silizium-Membran. Die Indizes i, j entsprechen der Anzahl der Schwingungsmaxima in der x- bzw. y-Richtung.

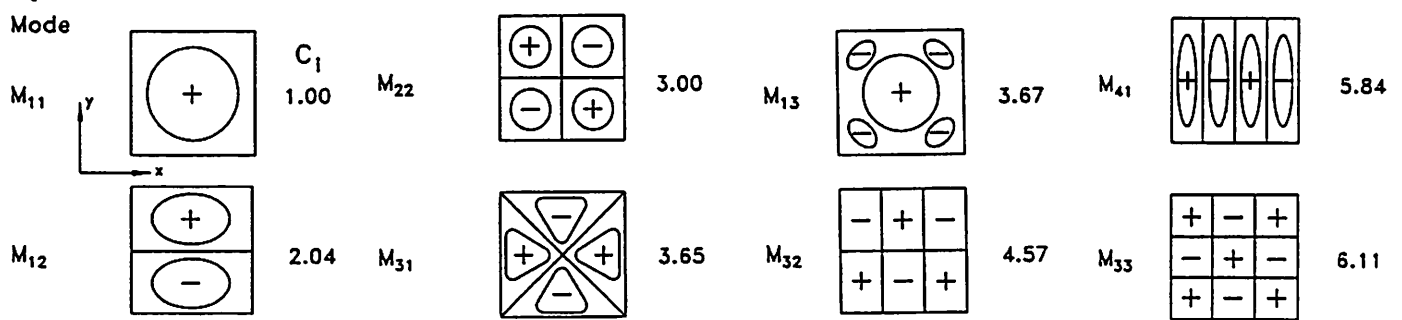


Bild 2.7: Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen und Schwingungsmoden einer ebenen Silizium-Membran

Um die piezoelektrisch angesteuerten Drucksensormembranen experimentell zu charakterisieren, wurden sie optisch mit Hilfe eines Laser-Doppler-Vibrometers (POLYTEC OFV1102) vermessen. In **Bild 2.8** ist das frequenz- und ortsabhängige Amplitudenspektrum $A(f,x)$ eines vom Verbundpartner Robert Bosch GmbH hergestellten Drucksensors abgebildet. Die Membranseitenlänge betrug 9,2 mm, die Siliziumdicke $50\text{ }\mu\text{m}$ und die ZnO-Schichtdicke etwa $15\text{ }\mu\text{m}$. Die Resonanzamplitude der Grundmode M_{11} lag bei etwa $1\text{ }\mu\text{m}$. Die Schwingungsgüte betrug bei Normalluftdruck bei der Grundmode etwa 100, bei den Moden M_{13} und M_{33} etwa 310 bzw. 360. Ein Vergleich der experimentell und numerisch ermittelten lateralen Modenverläufe entlang der Membranmitte zeigt eine gute Übereinstimmung. Bei genügend großen Schwingungsamplituden (einige hundert nm) konnten alle experimentell ermittelten Moden mit Hilfe der FEM-Ergebnisse zugeordnet werden.

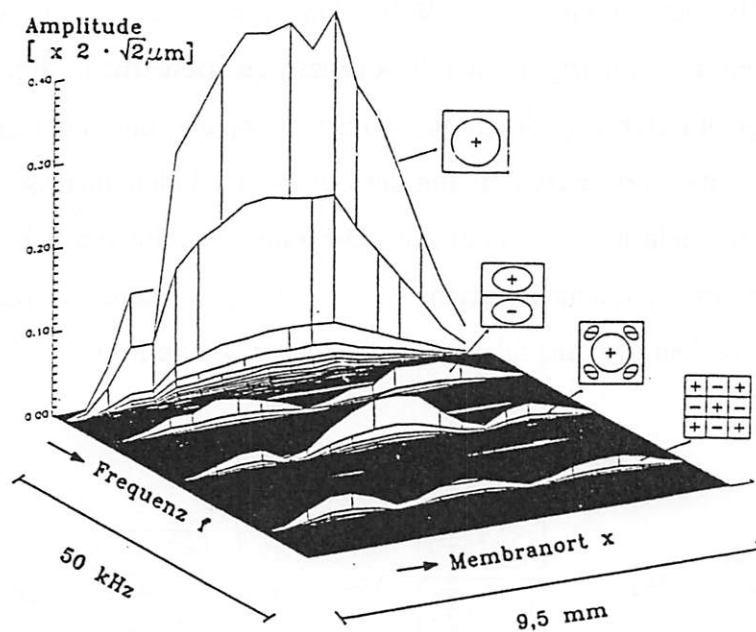


Bild 2.8: Frequenz- und ortsabhängiges Amplitudenspektrum $A(f,x)$ eines piezoelektrisch angetriebenen Silizium-Drucksensors

Das Resonanzverhalten von druckbeaufschlagten Membranen wird von den in der Membran induzierten Membranspannungen beeinflusst, die bei "großen" Auslenkungen auftreten. Die nichtlinearen Effekten sind abhängig vom Verhältnis der Membrandicke zur Kantenlänge, des einwirkenden Druckes und der Einspannungsart [Fab 92a]. Für den Zusammenhang zwischen

der Resonanzfrequenz f_0 einer unverspannten Membran und einer planaren Spannung σ in der Membran gilt [Bou 90]:

$$f(\sigma) = f_0 \sqrt{1 + 0,22 \frac{(1-\nu^2)}{E} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \sigma} \quad (5)$$

Diese Spannung kann durch äußere Lasten, z.B. Druckbeaufschlagung oder Temperaturbelastung oder durch prozeßbedingte innere Spannungen hervorgerufen werden. In Bild 2.9 sind die Ergebnisse verschiedener FE-Berechnungen und optischer Messungen einer 148 μm dicken Silizium-Membran mit einer etwa 15 μm ZnO-Schicht dargestellt. Aufgrund der Resonanzfrequenzabweichung von etwa 4 kHz zwischen Messung und Simulation kann auf eine innere Druckspannung der ZnO-Schicht von etwa $\sigma \approx -100 \text{ MPa}$ unter Zugrundelegung von Gleichung (5) geschlossen werden. Der Einfluß der Schichtspannung bewirkt eine erhebliche Erniedrigung der Resonanzfrequenz der unbelasteten Membran gegenüber dem theoretischen Wert. Die gemessene Druckempfindlichkeit des Sensors beträgt in dem Meßbereich bis 3 bar etwa 1 Hz/mbar. Bei Erniedrigung der Membrandicke auf 125 μm konnte zwar der richtige Frequenzwert reproduziert werden, jedoch ist dies mit einer erhöhten Druckempfindlichkeit verbunden [Sch 92].

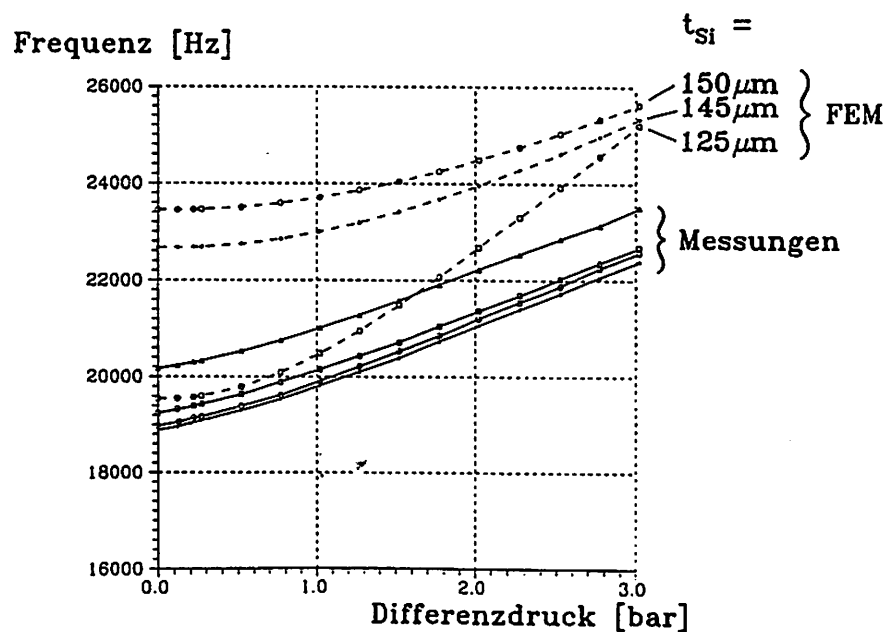


Bild 2.9: Frequenzverschiebung bei Druckbeaufschlagung

2.3 Piezoelektrische Anregung resonanter Sensoren

Für eine effiziente piezoelektrische Anregung durch ZnO-Dünnschichten sind geeignet ausgelegte Elektrodenformen und das optimale Dickenverhältnis von ZnO-Schicht zur Dicke der Siliziumstruktur ausschlaggebend. Die Effizienz der Anregung läßt sich durch den effektiven elektromechanischen Kopplungsfaktor k^{eff} bestimmen. Dieser hängt im Gegensatz zum materialabhängigen Anteil k^{mat} , d.h. den mechanischen und elektrischen Eigenschaften der piezoelektrischen ZnO-Schicht (Kapitel 2.1.2), von dem Schichtdickenverhältnis, der Bauteilgeometrie und den Randbedingungen ab. Es ist daher Ziel der piezoelektrischen FE-Berechnungen unter Einschluß der Kopplung der mechanischen Größen (Verschiebungen) und der elektrischen Größen (Potential) die Sensoreigenschaften gezielt vorherzusagen und zu optimieren. Die Modellierung des piezoelektrischen Effektes, der Wechselwirkung zwischen den räumlichen Verschiebungen und dem elektrischen Feld, erfolgt bei ANSYS durch eine Kopplung direkt auf der finiten Elementeebene. Der implementierte Ansatz erlaubt es, das statische und dynamische Verhalten von linear piezoelektrischen Medien mit anisotropen Materialeigenschaften zu untersuchen [AUM 92]. Es lassen sich mikromechanische Resonatoren modellieren, die durch piezoelektrische Dünnschichten angeregt werden. Im Gegensatz zu einer mechanischen Anregung erfolgt diese direkt durch die elektrischen Feldgrößen, so daß unter Berücksichtigung der elektromechanischen Wandlung das mechanische Strukturverhalten berechnet und verschiedene elektrische Kenngrößen abgeleitet werden können.

2.3.1 Modellierung des elektrischen Sensorverhaltens

Die piezoelektrisch angeregten Kraft- und Drucksensoren werden bei Applikation in einer Oszillatorschaltung betrieben, bei der das Impedanz- und Phasenverhalten (Zweipolbetrieb) bzw. das elektrische Übertragungsverhalten (Vierpolbetrieb) der Sensorelemente bekannt sein muß. Die Bestimmung des effektiven Kopplungsfaktors kann durch die Berechnung des frequenzabhängigen Impedanz- und Phasenverlaufes erfolgen. Für den effektiven Kopplungsfaktor k^{eff} einer Schwingungsmode eines piezoelektrischen Resonators gilt [VIB 81]:

$$k^{\text{eff}} = \sqrt{\frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2}} \approx \sqrt{2 \frac{f_p - f_s}{f_p}} \quad (5)$$

Unter Zugrundelegung des elektrischen Ersatzschaltbild für piezoelektrische Resonatoren [Tic 80], entspricht die Serienresonanzfrequenz f_s der elektrischen Kurzschluß-Bedingung ($E=0$) und die Parallelresonanzfrequenz f_p dem elektrischen Leerlauf bei offenen Elektroden ($D=0$). Zur Entwicklung geeigneter FE-Modelle und zur Verifikation der piezoelektrischen Berechnungsmöglichkeiten mit ANSYS wurde eine Bimorph-Struktur bestehend aus Silizium-Membran mit einer Piezokeramik ausgewählt. Für die Piezokeramik liegen genaue Angaben zu Materialeigenschaften [VIB 81] vor, so daß der Einfluß von unbekannten Parametern auf ein Mindestmaß beschränkt werden konnte. Bei der Bimorph-Struktur betrug die Membran-seitenlänge 9,2 mm, die Dicke der Silizium-Membran 20 μm und die Dicke der Piezokeramik 200 μm . Das Materialverhalten für die Piezokeramik (VIBRIT 420) wurde anisotrop modelliert. Die elektrische Anregungsspannung betrug an den ganzflächigen Elektroden 1 V. Für die mechanische Schwingungsgüte Q wurde ein mittlerer Wert von 1000 angenommen, die dielektrischen Dämpfungsbeiträge wurden vernachlässigt.

In Bild 2.10 ist der mit FEM berechnete frequenzabhängige Impedanzverlauf der Bimorph-Membran bis 100 kHz in logarithmischer Darstellung aufgetragen. Drei Schwingungsmoden sind deutlich ausgeprägt, deren elektromechanischen Kopplungsfaktoren mit zunehmender Frequenz abnehmen ($k^{\text{eff}} \approx 29 \%, 22 \%, 16 \%$). Die mechanische Schwingungsamplitude der Grundmode wurde zu etwa 2,5 μm berechnet. Ein Vergleich der FE-Berechnungen mit Messungen zeigt trotz einfacher Modellansätze eine gute Übereinstimmung. Die Abweichungen bei den Resonanzfrequenzen betragen etwa 1 - 4 %.

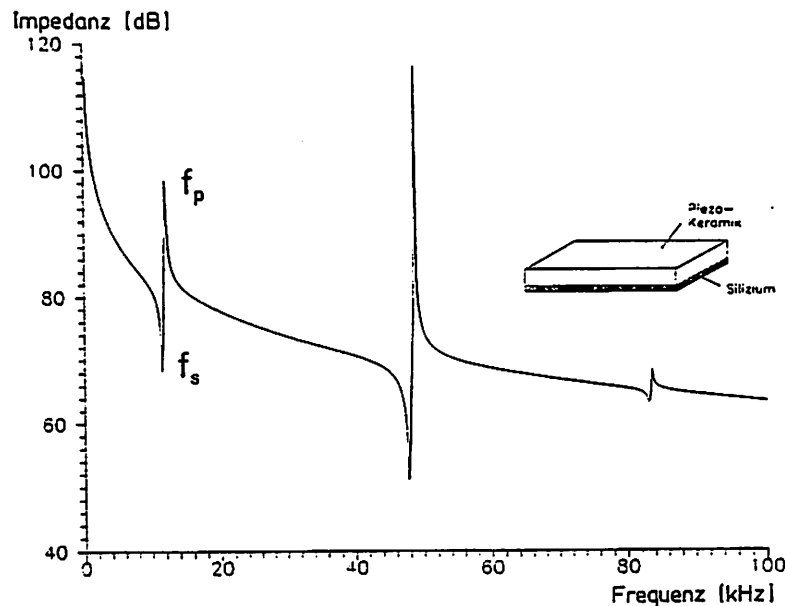


Bild 2.10: Frequenzabhängiger Impedanzverlauf einer Bimorph-Membran

2.3.2 Optimierung des Schichtdickenverhältnisses

Bei der piezoelektrischen Anregung ist die Kenntnis des günstigsten Schichtdickenverhältnisses für eine möglichst hohe elektromechanische Kopplung von besonderem Interesse. Mit verschiedenen Bimorph-Modellen wurde der Einfluß des Schichtdickenverhältnisses der Piezoschicht t_{piezo} zur Siliziummembran t_{si} und die Auswirkung verschiedener piezoelektrischer Materialien untersucht. In **Bild 2.11** ist der effektive elektromechanische Kopplungsfaktor für AlN, ZnO und PZT-Keramik in Abhängigkeit der Piezoschichtdicke für eine 20 μm dicke Silizium-Membran aufgetragen. Deutlich ist zu erkennen, daß die verschiedenen Materialien unterschiedliche optimale Schichtdicken aufweisen. Für AlN, ZnO und PZT werden die maximalen Kopplungsfaktoren von 10 %, 25 % und 39 % bei Schichtdicken von etwa 5 - 6 μm , $9 \pm 1 \mu\text{m}$ und $15 \pm 2 \mu\text{m}$ erreicht und liegen damit im realisierbaren Bereich der Dünnschichttechnik. Ein Vergleich mit experimentellen Werten und eine ausführliche Diskussion des Schichtspannungseinflusses beim Zinkoxid wird in Kapitel 4 gegeben.

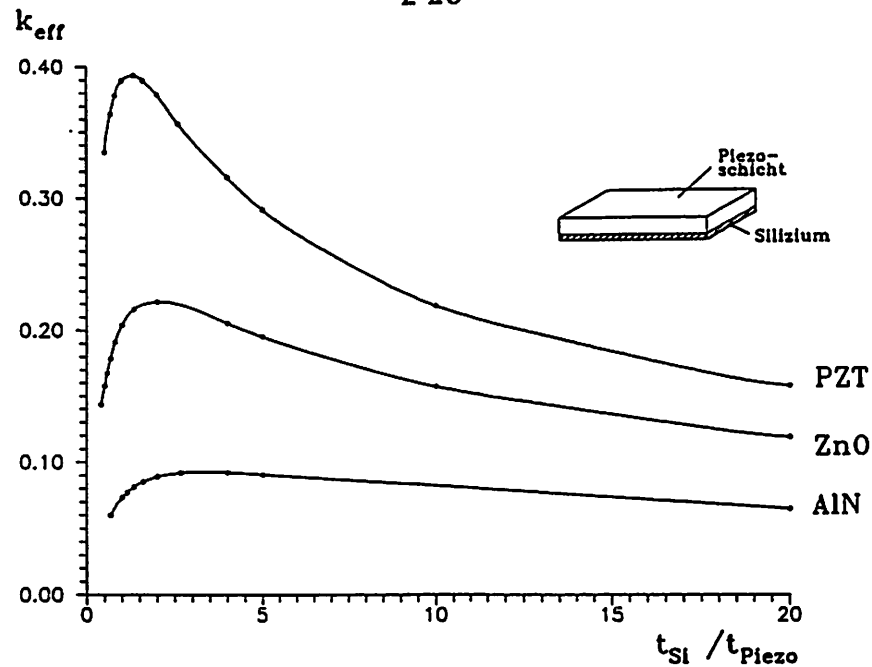


Bild 2.11: Effektiver elektromechanischer Kopplungsfaktor in Abhängigkeit des Schicht-dickenverhältnisses

2.3.3 Erhöhte Modenselektivität durch Elektrodenstrukturierung

Die Anregung resonanter Siliziumstrukturen zu Biegeschwingungen erfolgt durch aufgesputterte ZnO-Dünnschichten, die infolge des piezoelektrischen Effektes, Dehnungen und Kontraktionen auf der Bauteiloberfläche erzeugen. Um eine möglichst hohe Modenselektivität zu erreichen, ist es wichtig den genauen Spannungsverlauf auf der Bauteiloberfläche zu kennen und durch eine geeignete Elektrodenformgebung sicherzustellen, daß im Bereich von Zugspannungen nur Dehnung, im Bereich von Druckspannungen nur Kontraktion erzeugt werden. Als Designparameter für die Elektrodenauslegung ist der Nulldurchgang des lateralen Spannungsverlaufes (d.h. der Übergang von Zug- in Druckspannungsbereiche) auf der Oberfläche des Resonators anzusehen.

Ausgehend von einer Silizium-Membran wurden verschiedene FE-Modellen untersucht, wobei der Einfluß unterschiedlicher Membrandicken, variabler Druckbeaufschlagung, der Einspannung infolge der ätzbegrenzenden (111)-Ebenen und nichtlinearer Effekte, infolge Spannungsversteifung der Membran berücksichtigt wurden. Die FE-Berechnungen ergeben

für den Nulldurchgang des lateralen Spannungsverlaufes einen Wert von etwa 17 % der Membranseitenlänge. Für beidseitig eingespannte Biegebalken beträgt der Nulldurchgang etwas weniger als 25 % der Balkenlänge. In diesen Bereichen sollten keine Elektroden angeordnet werden. In Bild 2.12 a ist die Spannungsverteilung σ_x auf einer von unten druckbeaufschlagten Membranoberfläche dargestellt. Im Randbereich bilden sich Druckspannungen, in Membranmitte Zugspannungen aus. Ein direkt aus der flächenhaften Spannungsverteilung abgeleitetes Elektrodendesign für eine selektive Anregung der Grundmode ist in Bild 2.12 b zu sehen.

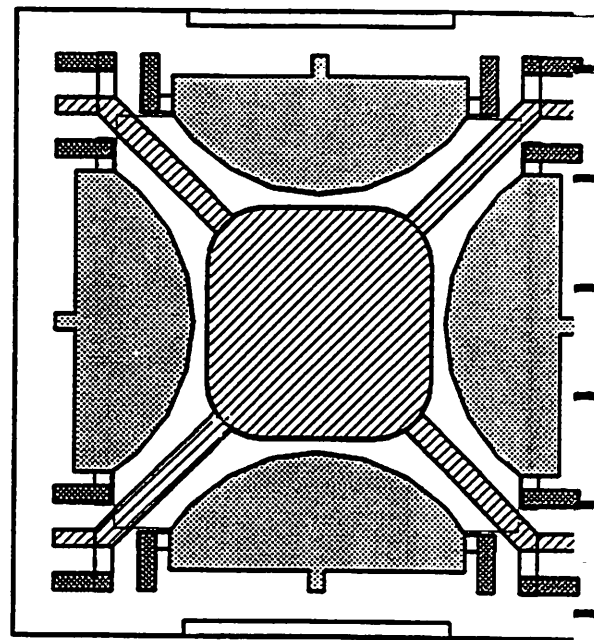
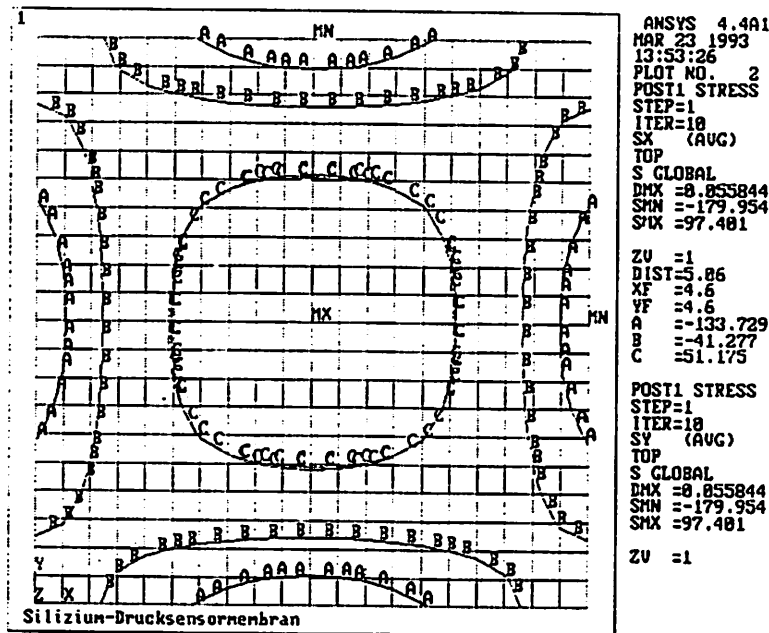


Bild 2.12 a: Spannungsverteilung σ_x einer druckbeaufschlagten Membranoberfläche

Bild 2.12 b: Elektrodendesign für eine selektive Anregung des Grundmodes

Durch die Strukturierung der Elektroden und der gegenphasigen Ansteuerung zwischen Rand- und Zentralelektrode konnte die Modenselektivität der Grundmode deutlich erhöht und der Betrag der Resonanzamplitude bei gleicher Ansteuerung verdoppelt werden. Hierdurch kann der Sensor im Kleinsignalbereich betrieben und dynamische Nichtlinearitäten, hervorgerufen durch große Schwingungsamplituden, vermieden werden.

2.3.4 Vergleich der Berechnungen mit Messungen

In Tabelle 2.5 werden die rechnerisch und experimentell ermittelten Resonanzfrequenzvielfachen c_i der Schwingungsmoden der Drucksensormembran miteinander verglichen. Die analytisch ermittelten Frequenzvielfachen für isotropes und anisotropes Materialverhalten sind der Literatur [Pon 91] entnommen und gehen von Platten mit idealer Einspannung aus. Zum Vergleich wurden mit FEM sowohl 2D-Schalenmodelle mit isotropem Materialverhalten, als auch 3D-Volumenmodelle mit anisotropem Materialverhalten und (111)-Einspannung berechnet. Die Frequenzvielfachen der niedrigen Schwingungsmoden korrelieren gut mit den analytischen Ergebnissen, während die Abweichung zu höheren Schwingungsmoden hin zunimmt. Im Vergleich zu den analytischen und numerischen Berechnungen fällt die gemessene Resonanzfrequenz der Grundmode einer ZnO-beschichteten Silizium-Membran um etwa 2 kHz geringer aus. Hieraus wurde die technologisch bedingte innere Druckspannung in der ZnO-Schicht nach Gleichung (5) zu $\sigma \approx -15$ MPa abgeschätzt. Bei den elektrischen Messungen wurde mit Hilfe eines Impedance/Gain-Phase-Analyzers (HP4194A) das Impedanz- und Phasenverhalten der Drucksensormembranen vermessen und aus den Resonanzfrequenzen f_s und f_p der effektive Kopplungsfaktor k_{eff} bestimmt. Aufgrund der modenselektiven Elektrodenanordnung konnten nicht alle Moden elektrisch nachgewiesen werden, doch stimmen die Frequenzvielfachen für M_{13} und M_{33} sehr gut mit den optisch gemessenen Werten überein. Die Abweichung zu den berechneten Werten nimmt auch hier zu höheren Schwingungsmoden tendenziell zu [Fab 92b].







Schwingungs- mode		analytisch		FEM		opt. Messung		elektr. Messung	
		isotrop [Pon91]	aniso. [Pon91]	2D isotrop	3D an- isotrop	c_i	f_i [kHz]	c_i	k_{eff}
	M_{11}	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	7,24	1,00	0,10
	M_{12}	2,04	2,00	2,04	2,11	2,10	15,22	---	---
	M_{22}	3,01	2,90	3,00	3,03	2,86	20,71	---	---
	M_{31}	3,66	3,62	3,65	3,75	---	---	---	---
	M_{13}	3,68	3,63	3,67	3,77	3,94	28,57	3,92	0,08
	M_{33}	6,12	5,87	6,11	6,02	6,35	46,0	6,34	0,07

Tabelle 2.5: Vergleich der rechnerisch und experimentell ermittelten Resonanzfrequenzvielfachen c_i verschiedener Schwingungsmoden einer Silizium-Membran

2.4 Zusammenfassung

Die Anforderungen beim Entwurf von resonanten Sensoren, sich überlagernde nichtlineare Effekte, anisotrope Materialeigenschaften und die piezoelektrische Wechselwirkungen bei Mehrschichtsystemen zu berücksichtigen, bedingen den Einsatz rechnergestützter, numerischer Berechnungsmethoden. Eine Optimierung mikromechanischer Resonatoren kann nur unter gleichzeitiger Betrachtung der statischen und dynamischen Eigenschaften unter Einschluß des physikalischen Anregungsprinzips erreicht werden. Die durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, daß die Methode der Finiten Elemente geeignet ist, das Verhalten mikromechanischer Sensoren zu beschreiben. Bei der Berechnung der Resonanzfrequenzen und Schwingungsmoden und der lastabhängigen Resonanzfrequenzänderung konnte eine gute Übereinstimmung mit den Meßergebnissen erzielt werden. Die Möglichkeiten des Programmsystems ANSYS, gekoppelte Feldberechnungen durchzuführen, erlauben eine Modellierung des Verhaltens piezoelektrisch angetriebener Sensoren. Damit ließen sich bereits in der Entwurfsphase wichtige Vorgaben, wie z.B. die günstigste Elektrodenanordnung und das

optimale Schichtdickenverhältnis, für die nachfolgenden technologischen Prozeßschritte ableiten. Eine Stärke der FE-Methode ist es, komplexe Geometrien unter vielfältigen Randbedingungen modellieren, Parameterstudien durchführen und Geometrie- und Materialeinflüsse separat betrachten zu können.

Literaturverzeichnis

- [Ala 92] : Alavi, M., Fabula, Th., Schumacher, A., Wagner, H.-J., Monolithic Microbridges in Silicon Using Laser Machining and Anisotropic Etching", EUROSENSORS VI, San Sebastian (1992), erscheint in Sensors and Actuators
- [Alb 82] : Albert, W.C., Vibrating Quartz Crystal Beam Accelerometer, ISA 28th. Int. Instr. Symp., Vol.28, No.1 (1982)
- [AUM 92] : ANSYS User's Manual for Revision 5.0, Volume IV, Theory, ed. Peter Kohnke, Houston, PA, USA (1992)
- [Ble 84] : Blevins, R.D., Formulas for natural frequency and mode shapes, Krieger Publishing Company, Malabar/Florida (1984)
- [Bou 90] : Bouwstra, S., Resonating microbridges mass flow sensor, Thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands (1990)
- [Bri 85] : Brice, J.C., Crystals for quartz resonators, Rev. Modern Physics, Vol. 57, No. 1 (1985) 105
- [Cha 87] : Chan, H.-L., Wise, K.D., Scaling limits in batchfabricated silicon pressure sensors, IEEE Transactions on Electronic Devices, Vol. ED-34, No.4, (1987), S. 850-858
- [Fab 92a] : Fabula, Th., Schroth, A., Simulation des dynamischen Verhaltens mikromechanischer Membranen, VDI-Fachtagung für Geräte- und Mikrosystemtechnik, TU Chemnitz (1992), VDI-Bericht 960, VDI-Verlag Düsseldorf (1992)
- [Fab 92b] : Fabula, Th., Dynamische Berechnungen in der Mikromechanik - Simulation / Messung, 10. ANSYS Users' Meeting, Arolsen, 28.-30.10.1992
- [Fra 88] : Franz, J., Piezoelektrische Sensoren auf Siliziumbasis für akustische Anwendungen, VDI-Berichte, Reihe 10: Informatik/Kommunikationstechnik, Nr. 87, VDI-Verlag Düsseldorf (1988)
- [LB 82] : Landolt-Börnstein, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Gruppe III, Band 17a, Berlin, Springer Verlag (1982)
- [Pon 91] : Pons, P., Blasquez, G., Natural vibration frequencies of silicon diaphragms, Proceedings: Transducers of the IEEE, San Francisco (1991)
- [SASI] : Swanson Analysis Systems Inc., Houston, PA, USA
- [Sch 92] : Schroth, A., Modellierung mikromechanischer Membranen, Diplomarbeit, TU Chemnitz / HSG-IMIT (1992)

- [Tic 80] : Tichy, J., Gautschi, G., Piezoelektrische Meßtechnik, Springer-Verlag, Berlin (1980)
- [Utt 87] : Uttamachandi, D., Thornton, K.E.B., Nixon, J., Culshaw, B., Optically excited resonant diaphragm pressure sensor, Electronics Letters, Vol.23, No.4, (1987), S. 152-153
- [VIB 81] : VIBRIT - Piezokeramik von Siemens, Datenblatt, Stand: Januar 1981, Siemens AG, Redwitz
- [You 50] : Young, D., Vibration of rectangular plates by the Ritz method, Journal of applied Mechanics, Dec., (1950) S.448-453