SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

nach einer Vorlesung von

Prof. Dr. Konrad Bleuler

Ausarbeitung

Manfred Andrié

Institut für Theoretische Kernphysik der Universität Bonn

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I

Mathematische Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie

Kapitel II

Maxwellsche Theorie

Kapitel III

Relativistische Mechanik

Kapitel IV

Bahn eines geladenen Massenpunktes im elektromagnetischen Feld

Kapitel V

Relativistische Hamilton-Jacobische Theorie

Kapitel I

Mathematische Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie

(1.1) Begriff der Lorentztransformation

a) Galileitransformation

Eine der Grundlagen der klassischen Mechanik bildet das Galileische Trägheitsprinzip (Erstes Bewegungsgesetz von Newton):

> Ein Massenpunkt m ist im Zustand der Ruhe oder bewegt sich gleichförmig und geradlinig, falls die auf m wirkende äußere Gesamtkraft gleich Null ist.

Ein Bezugssystem, in dem das Galileische Trägheitsprinzip gilt, heißt Inertialsystem I. Dabei verstehen wir unter Bezugssystem (Koordinatensystem) die Größen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und t, wobei $\vec{x}$ den Ort eines Massenpunktes zur Zeit t angibt.

Da bei einem Übergang von einem Inertialsystem $I_1 = \{(\vec{x}, t)\}$ zu einem System $I_2 = \{(\vec{x}', t')\}$ eine gleichförmige und geradlinige Bewegung wieder in eine gleichförmige und geradlinige Bewegung überführt werden soll - geometrisch gesprochen: Geraden werden auf Geraden abgebildet - muß diese Abbildung G linear sein. Ferner sollen Messungen von Zeitintervallen und Abständen verschiedener Massenpunkte eines starren Körpers Werte ergeben, die von der speziellen Wahl des Bezugssystems unabhängig sind. Unter diesen Voraussetzungen erhält man als Abbildung G die sog. Galileitransformation, die bezüglich kartesischer Koordinaten die allgemeine Form annimmt:

$$x'_{k'} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{k'k} x_k + \beta_{k'} t + \alpha_{k'}$$

(1.1.1)

$$t' = t + a \qquad ; \qquad k, k' = 1, 2, 3$$

Dabei sind die $\alpha_{k'k}$ konstante Koeffizienten einer orthogonalen Transformation in R^3, die Konstanten $\beta_{k'}$, $\alpha_{k'}$ und a beliebige Elemente aus R.

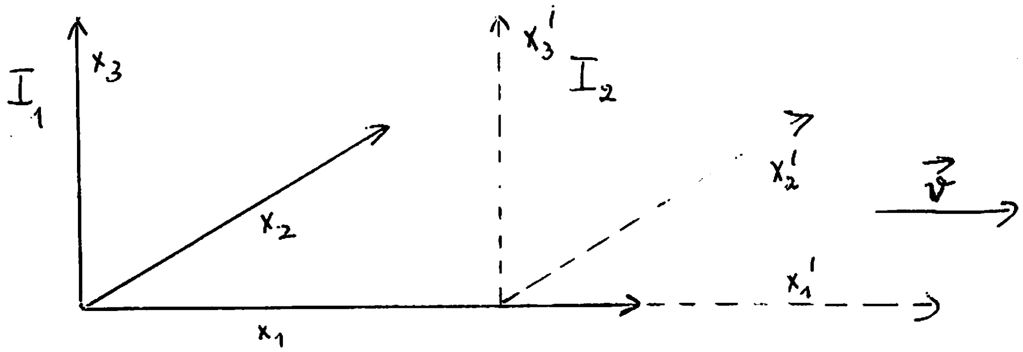
Bei geeigneter Wahl der Achsen und des Koordinatenursprungs ergibt sich die Transfomation

(1.1.2) $$x_k' = x_k + \beta_k t \quad , \quad t' = t \quad ,$$

die man als spezielle Galileitransformation bezeichnet. Die Größe β_k kann als k-te Komponente v_k der Geschwindigkeit $\vec{v}$ gedeutet werden, mit der sich der Koordinatenursprung des Systems I_2 relativ zu I_1 in einer bestimmten Richtung bewegt. Die Galileitransformation $(\vec{v} = (v, 0, 0))$

(1.1.3) $$x_1' = x_1 - vt \quad , \quad x_2' = x_2 \quad , \quad x_3' = x_3 \quad , \quad t' = t$$

z. B. entspricht einem Übergang des Systems I_1 zu einem System I_2 , das sich relativ zu I_1 gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in der positiven x_1 -Richtung bewegt.



Im Falle der klassischen (Newtonschen) Mechanik legen wir also folgende Annahme zugrunde:

> Beliebige Inertialsysteme sind gleichwertig. Der Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen wird mit Hilfe einer Galileitransformation beschrieben.

Man spricht in diesem Zusammenhang vom sog. Galileischen Relativitätsprinzip.

b) Einsteinsches Relativitätsprinzip

α) Eindimensionale Lorentztransformation

Versucht man, das Galileische Relativitätsprinzip in der bisherigen Form als konsistente Annahme allen physikalischen Gesetzen zugrunde zu legen, so stößt man auf Widersprüche. So ist z.B. die Lichtgeschwindigkeit (unabhängig von der Richtung) in allen zueinander gleichförmig und geradlinig bewegten Bezugssystemen I_1, I_2 ..... konstant gleich c (Michelson-Versuch), d.h. aus

(1.1.4) $$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 - c^2 = 0 \qquad \text{bzgl. } I_1$$

folgt

(1.1.5) $$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i'}{dt'}\right)^2 - c^2 = 0 \qquad \text{bzgl. } I_2$$

Nimmt man die Galileitransformation

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad , \quad t' = t$$

als richtig an, so gilt

$$\sum_{i=1} \left(\frac{dx_i'}{dt'}\right)^2 - c^2 = \sum_{i}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt} - v_i\right)^2 - c^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 - c^2 + \sum_{i=1}^{3} v_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{dx_i}{dt}$$

Das ist aber mit (1.1.4) und (1.1.5) nicht verträglich. Die Annahme, die Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen (unabhängig von der Richtung) sei konstant gleich c, widerspricht demnach der Galileitransformation. Da die Gesetze der Elektrodynamik als gesichert gelten, muß die obige Transformation abgeändert werden, und zwar so, daß die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit wesentlich eingeht und sich im Spezialfall kleiner Geschwindigkeiten ($|\vec{v}| \ll c$) die Invarianzeigenschaften der klassischen Mechanik ergeben. Wir haben also eine Transformation anzugeben, die verschiedene Inertialsysteme miteinander verknüpft und der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit Rechnung trägt.

Analog zur Galileitransformation (1.1.3), bei der die Relativbewegung von zwei Inertialsystemen längs einer bestimmten Achse mit Hilfe eines Parameters, der Relativgeschwindigkeit, beschrieben wird, stellt sich nun folgende Aufgabe, wobei wir uns zunächst auf 'eindimensionale' Systeme $I = \{ (x_1, x_0 = ct) \}$ beschränken:

$I_1 = \{ (x_1, x_0 = ct) \}$ und $I_2 = \{ (x_1', x_0' = ct') \}$ seien zwei verschiednen Inertialsysteme. Gibt es eine einparametrige lineare Abbildung $I_1 \to I_2$, so daß aus

(1.1.6) $$x_1^2 - x_0^2 = 0 \qquad \text{bzgl. } I_1$$

die Beziehung

(1.1.7) $$x_1'^2 - x_0'^2 = 0 \qquad \text{bzgl. } I_2$$

folgt? $\mathcal{D}_2 = \{ x \} = \{ (x_1, x_0 = ct) \}$ sei der Raum der Paare (x_1, x_0). Φ eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ von $\mathcal{D}_2$ in sich, gegeben durch

(1.1.8) $$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{10} x_0 \\ x_0' &= a_{01} x_1 + a_{00} x_0 \end{aligned} \quad ; \quad a_{ik} \subset \mathbb{R} \qquad i,k = 1,2,3$$

Wegen der geforderten Verträglichkeit mit der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit muß aus

$$x_1^2 - x_0^2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x_1 = \pm x_0$$

die Gleichung

$$x_1'^2 - x_0'^2 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x_1' = \pm x_0'$$

folgen.

Für die Koeffizienten ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{10} &= a_{01} + a_{00} \\ a_{11} - a_{10} &= -a_{01} + a_{00} \,, \end{aligned}$$

so daß

$$a_{00} = a_{11} \quad , \quad a_{01} = a_{10} \; .$$

Setzt man $(a_{00} \neq 0)$

$$\frac{a_{01}}{a_{00}} = -\beta \qquad a_{00} = \frac{1}{\gamma}$$

so ist

(1.1.9) $$x_1' = \frac{x_1 - \beta x_0}{\gamma} \qquad x_0' = \frac{x_0 - \beta x_1}{\gamma} \; .$$

Fassen wir nun $\gamma = \gamma(\beta)$ als Funktion des Parameters ß auf, so erhalten wir wegen (1.1.9):

$$x_1'^2 - x_0'^2 = \frac{(1-\beta^2)}{(\gamma(\beta))^2} \, (x_1^2 - x_0^2) = 0$$

Jede einparametrige lineare Abbildung von $\mathfrak{M}_2$, die $x_1^2 - x_0^2 = 0$ invariant läßt, kann man folglich darstellen in der Form

(1.1.10) $$x_1' = \varkappa(\beta) \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_0' = \varkappa(\beta) \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ,$$

wobei der von ß abhängige Faktor $\varkappa(\beta)$ im folgenden näher bestimmt wird $(\, |\beta| < 1 \, , \, \varkappa(\beta) \neq 0)$

Setzen wir

(1.1.11) $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \; , \quad x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_0' \end{pmatrix} \; , \quad L = \frac{\varkappa(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

so lautet (1.1.10):

(1.1.12) $$x' = \frac{\varkappa(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} x = L x$$

Die Abbildung Φ wird also mit Hilfe der Matrix L vermittelt. Der zu Φ inversen Abbildung entspricht die Matrix

(1.1.13) $$L^* = L^{-1} = \frac{1}{\varkappa(\beta)\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} .$$

Da gegenüber der Transformation

$$x' = L^* x$$

bzw.

(1.1.4) $$x_1' = \frac{1}{\varkappa(\beta)} \frac{x_1 + \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} , \quad x_0' = \frac{1}{\varkappa(\beta)} \frac{x_1 \beta + x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$x_1^2 - x_0^2 = 0$ invariant bleibt, gilt wegen (1.1.10) und (1.1.14)

$$x_1' = \varkappa(-\beta) \frac{x_1 - (-\beta) x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\varkappa(\beta)} \frac{x_1 - (-\beta) x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_0' = \varkappa(-\beta) \frac{x_0 - (-\beta) x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\varkappa(\beta)} \frac{x_0 - (-\beta) x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d.h.

$$\varkappa(\beta)\varkappa(-\beta) = 1$$

$$\varkappa(0) = +1 \quad \text{oder} \quad -1 .$$

Um für $\beta = 0$ die Identität zu erhalten, muß $\varkappa(0) = 1$ sein. Untersucht man entsprechend die Ähnlichkeitstransformation

$$S^{-1} L S = \tilde{L}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \frac{\varkappa(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} ,$$

so ergibt sich

$$\varkappa(\beta) = \varkappa(-\beta)$$

und wegen

$$\varkappa(\beta)\,\varkappa(-\beta) = 1$$

schließlich

$$\varkappa(\beta)\,\varkappa(\beta) = 1$$

Nehmen wir an, daß $\varkappa(\beta)$ eine stetige Funktion von ß ist, so folgt wegen $\varkappa(0) = 1$

$$\varkappa(\beta) \equiv 1$$

<u>(Def. 1.1.15)</u>
Die durch

$$(1.1.15) \qquad x_1' = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_0' = \frac{x_0 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad |\beta| < 1$$

definierte lineare Transformation in $\mathfrak{M}_2$ heißt eigentliche Lorentztransformation.

Die Determinante der Transformationmatrix $L = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$ hat den Wert $+1$.

Setzt man in $x_1' = \frac{x_1 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $x_1' = 0$, so erhält man

$\frac{x_1}{x_0} = \beta = \frac{x_1}{ct} = \frac{|\vec{v}|}{c}$. $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit des Systems I_2,

mit der sich dieses relativ zu I_1 in der positiven x_1-Richtung bewegt. Die Lorentztransformation lautet also ($v = |\vec{v}|$) :

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{1.1.16}$$

Das System (1.1.16) enthält als Spezialfall die Galileitransformation, falls man $|\frac{\vec{v}}{c}| \ll 1$ annimmt:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx x_1 - vt \quad , \quad t' \approx t$$

Mit $\beta = \frac{v}{c} := \operatorname{tgh} \alpha$ erhält man

$$\cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \sinh \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ,$$

so daß

$$x_1' = \cosh\alpha \; x_1 - \sinh \; x_0 \quad , \quad x_0' = -\sinh\alpha \; x_1 + \cosh\alpha \; x_0 .$$

Mit $\tilde{x}_0 = ict$ und $\tilde{x}_0' = ict'$ folgt

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \tilde{x}_0' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix} =: L_2(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix} \tag{1.1.17}$$

wobei

$$L_2(\alpha) := \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} .$$

Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \tilde{x}_0' \end{pmatrix} = L_2(\alpha) \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix}$$

läßt die Form

$$x_1^2 + \tilde{x}_0^2 = c$$

invariant.

Wegen

$$L_2^t(\alpha)\, L_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -i\sinh\alpha \\ i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L_2(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = E_2$$

ist $L_2(\alpha)$ eine 'orthogonale' Matrix. $L_2^t(\alpha)$ ist die zu $L_2(\alpha)$ 'transponierte' Matrix.

Im folgenden benutzen wir statt (x_1, x_0) stets $(x_1, \tilde{x}_0)$ da sich mit Hilfe dieser Bezeichnungen die folgenden Rechnungen vereinfachen. Unter einer eindimensionalen Lorentztransformation verstehen wir also eine orthogonale Transformation der Form (1.1.17).

Satz (1.1.18)

Die Menge der Lorentztransformationen, beschrieben durch

$$\left\{ L_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \right\},$$

bildet eine Gruppe.

Bew.:

Das Einselelement ist gegeben durch $L_2(\alpha)\big|_{\alpha=0} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das zu $L_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$ inverse Element lautet:

$$L_2^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -i\sinh\alpha \\ i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = L_2(-\alpha) = L_2^t(\alpha)$$

Ferner ist

$$\begin{pmatrix} \cosh\alpha & i\sinh\alpha \\ -i\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\gamma & i\sinh\gamma \\ -i\sinh\gamma & \cosh\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha+\gamma) & i\sinh(\alpha+\gamma) \\ -i\sinh(\alpha+\gamma) & \cosh(\alpha+\gamma) \end{pmatrix}$$

d.h.

$$L_2(\alpha) \cdot L_2(\gamma) = L_2(\alpha+\gamma)$$

ß) Allgemeine Lorentztransformation

Den Begriff der 'eindimensionalen' Lorentztransformationen erweitern wir nun unter Hinzunahme der Raumkoordinaten x_2 und x_3 zu einer Lorentztransformation im vierdimensionalen Raum $\mathfrak{W}_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)\} = \{\underline{x}\}$. Die orthogonalen Transformationen in $\mathfrak{W}_2$ lassen sich dann als spezielle orthogonale Transformationen in $\mathfrak{W}_4$ deuten.

Satz (1.1.19)

Eine lineare orthogonale Transformation $L : \mathfrak{W}_4 \to \mathfrak{W}_4$ läßt die Norm eines Vektors $\underline{x} \in \mathfrak{W}_4$ invariant.

Bew.:

Mit

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\underline{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 = ict')) \quad , \mu = 1,2,3,4$$

folgt wegen

$$\sum_{\mu=1}^{4} L_{\mu\nu} L_{\mu\varrho} = \delta_{\nu\varrho}$$

$$\| \underline{x}' \|^2 = (\underline{x}', \underline{x}') = \sum_{\mu=1}^{4} x'^2_\mu = \sum_\mu \sum_{\nu\varrho} L_{\mu\nu} L_{\mu\varrho} x_\nu x_\varrho = (\underline{x}, \underline{x}) = \| \underline{x} \|^2$$

(Def. 1.1.20)

Eine lineare Abbildung $L : \mathfrak{W}_4 \to \mathfrak{W}_4$, welche die Norm eines Vektors $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathfrak{W}_4$ invariant läßt, heißt Lorentztransformation.

Satz (1.1.21)

Die Menge der Lorentztransformationen $L = (L_{\mu\nu})$ mit

$$\| \underline{x}' \|^2 = (\underline{x}', \underline{x}') = (\underline{x}, \underline{x}) = \| \underline{x} \|^2$$

bildet eine Gruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ zerfällt in vier Klassen $\mathfrak{G}_\mu$ mit:

$$\mathfrak{G}_1 := \mathfrak{G}_L = \{ L \mid \det L = +1 \; , L_{44} > 0 \}$$

$$\mathfrak{G}_2 = \{ L \mid \det L = -1 \; , L_{44} > 0 \}$$

$$\mathcal{G}_3 = \{ L \mid \det L = +1 \, , L_{44} < 0 \}$$

$$\mathcal{G}_4 = \{ L \mid \det L = -1 \, , L_{44} < 0 \}$$

Die Gruppe $\mathcal{G}_L$ (eigentliche Lorentzgruppe) ist eine in $\mathcal{G}$ invariante Untergruppe.
Bew.: Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Wir befassen uns in den folgenden Ausführungen nur mit der eigentlichen Lorentzgruppe $\mathcal{G}_L$. Diese enhält insbesondere die Gruppe der räumlichen Drehungen: $\mathcal{G}_R \subset \mathcal{G}_L$.

Jede eigentliche Lorentztransformation kann in räumliche Drenungen und in eine Lorentztransformation der Form

(1.1.22) $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ 0 & 0 & -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$$

zerlegt werden.

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse wollen wir nun bei der Formulierung physikalischer Gesetze folgende Annahme zugrunde legen (Einsteinsches Relativitätsprinzip):

Beliebige Inertialsysteme sind gleichwertig. Der Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen wird mit Hilfe einer Lorentztransformation beschrieben.

(1.2.) Relativistische kinematische Effekte

a) Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Ein Massenpunkt m bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit u auf einer Geraden g im Lorentzsystem I. Wie errechnet sich die Geschwindigkeit u' dieses Punktes für einen Beobachter in einem System I', das sich relativ zu I mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x_3-Achse bewegt?

Für die folgende Rechnung seien die Lorentzsysteme so gewählt, daß sie zum Zeitpunkt t = 0 zusammenfallen. Ferner befinde sich der Massenpunkt m mit den Ortskoordinaten x_1, x_2, x_3 für t = 0 im Ursprung des Systems I, d.h. des gelte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ für $t = 0$.

Wegen der Linearität der Lorentztransformation wird eine Gerade wieder auf eine Gerade abgebildet. Die Parameterdarstellungen der Bahn des Massenpunktes in den Systemen I und I' lauten in sphärischen Polarkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r \sin\vartheta \cos\varphi \qquad & x_1' &= r' \sin\vartheta' \cos\varphi' \\
x_2 &= r \sin\vartheta \sin\varphi \qquad & x_2' &= r' \sin\vartheta' \sin\varphi' \\
x_3 &= r \cos\vartheta \qquad & x_3' &= r' \cos\vartheta'
\end{aligned}
\tag{1.2.1}
$$

Die Lorentztransformation ist gegeben in der Form:

$$x_3' = \frac{x_3 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \quad x_1' = x_1 \; ; \; x_2' = x_2 \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ferner ist

$$r = ut \qquad , \qquad r' = u't'$$

Zunächst gilt

$$\frac{x_1}{x_2} = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x_1'}{x_2'} = \operatorname{ctg}\varphi' \qquad , \quad \text{d.h.} \quad \varphi = \text{const.}$$

Wir können uns daher auf den Fall $\varphi = 0$ beschränken:

$$x_1 = u t \sin\vartheta \qquad\qquad x_1' = u' t' \sin\vartheta'$$

$$x_2 = 0 \qquad\qquad x_2' = 0$$

$$x_3 = u t \cos\vartheta \qquad\qquad x_3' = u' t' \cos\vartheta'$$

Im einzelnen ergibt sich:

$$x_1' = u' t' \sin\vartheta' = x_1 = u t \sin\vartheta$$

$$x_3' = u' t' \cos\vartheta' = \frac{x_3 - v t}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\,\frac{u\cos\vartheta - v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

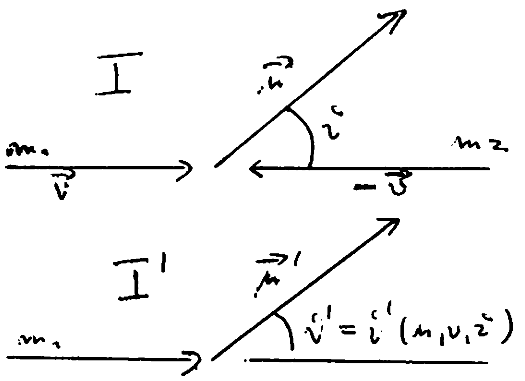
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_3}{\sqrt{1-\beta^2}} = t\,\frac{1 - \frac{v \cdot u}{c^2}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \quad \text{d.h.}$$

$$u' \cos\vartheta' = \frac{u\cos\vartheta - v}{1 - \frac{vu}{c^2}\cos\vartheta}$$

$$u' \sin\vartheta' = \frac{u \sin\vartheta\,\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu}{c^2}\cos\vartheta}\ , \qquad \text{so daß}$$

(1.2.2)
$$u'^2 = \frac{u^2 + v^2 - 2uv\cos\vartheta - \frac{u^2 v^2}{c^2}\sin^2\vartheta}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\cos\vartheta\right)^2}$$

Diese Additionsformel wird z.B. bei der Berechnung von Geschwindigkeiten und Streuwinkeln beim Zusammenstoß von Elementarteilchen benutzt.



Ist in diesem Falle I das Schwerpunktsystem, so ergibt sich (vgl. Skizze):

$(|\vec{u}| = u\ , \ |\vec{v}| = v)$

(1.2.3)
$$u'^2 = \frac{u^2+v^2+2uv\cos\vartheta - \frac{u^2v^2}{c^2}\sin^2\vartheta}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\cos\vartheta\right)^2}$$

Der Streuwinkel errechnet sich zu

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{u\sin\vartheta\sqrt{1-\beta^2}}{u\cos\vartheta + v}\quad,\ \text{d.h. } \vartheta' = \vartheta'(u,v,\vartheta)\ .$$

Haben die Geschwindigkeiten $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dieselbe Orientierung, so spezialisiert sich (1.2.3) zu

(1.2.4)
$$u' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$$

Mit u = c erhält man aus (1.2.3)

$$u' = \frac{\left(c^2+v^2+2vc\cos\vartheta - v^2\sin^2\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{v}{c}\cos\vartheta}$$

$$= \frac{\left(c^2+v^2\cos^2\vartheta+2vc\cos\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{v}{c}\cos\vartheta} = \frac{c+v\cos\vartheta}{1+\frac{v}{c}\cos\vartheta} = c$$

Damit haben wir die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit gegenüber Lorentztransformationen nochmals verifiziert.

b) Zeidilatation

Das Lorentzsystem I' bewege sich relativ zum Lorentzsystem I mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in Richtung der positiven x_1-Achse. Die Lorentztransformation sei also gegeben in der Form:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x_2' = x_2 \quad , \quad x_3' = x_3 \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Finden nun im ungestrichenen System zwei Ereignisse an demselben Ort x_1 zu den Zeiten $\tilde{t}$ und t statt, so entspricht der Zeitspanne $\Delta t = \tilde{t} - t$ das Zeitintervall

$$\Delta t' = \tilde{t}' - t' = \frac{\tilde{t} - \frac{v}{c^2} x_1 - t + \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad ,$$

d.h. einem bewegten Beobachter erscheinen die Zeitintervalle gegenüber den Messungen im ungestrichenen System gedehnt (Zeitdilatation).
Ferner finden die Ereignisse für ihn an verschiedenen Orten $\tilde{x}_1'$, x_1' statt.

c) Längenkontraktion

Nun soll eine im System I ruhende Strecke $\Delta x = \tilde{x}_1 - x_1$ vom bewegten System I' aus gemessen werden, d.h. in I' sollen die Orte $\tilde{x}_1'$ und x_1' gleichzeitig bestimmt werden, so daß

$$\tilde{t}' - t = \frac{\tilde{t} - t - \frac{v}{c^2}(\tilde{x}_1 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0 \quad .$$

Ferner ist

$$\tilde{x}_1' - x_1' = \frac{\tilde{x}_1 - x_1 - v(\tilde{t} - t)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Nach Elimination von $\tilde{t} - t$ erhält man

$$\Delta x' = \tilde{x}_1' - x_1' = \Delta x \sqrt{1-\beta^2} \quad . \tag{1.2.5}$$

Ein bewegter Beobachter stellt also in der Bewegungsrichtung eine Längenkontraktion fest.

Die oben angegebene Zeitdilatation wirkt sich z.B. bei der Messung der Zerfallszeit eines schnellen radioaktiven Atomkernes aus. Ist τ_0 die mittlere Lebensdauer dieses Teilchens bezüglich seines Ruhesystems, so ergibt sich für einen Beobachter in einem Lorenztsystem, das sich relativ zum Ruhesystem des Teilchens mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, als mittlere Lebensdauer

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \beta = \frac{|\vec{v}|}{c} \quad .$$

So erklärt sich auch der Umstand, daß in der kosmischen Höhenstahlung erzeugte μ -Mesonen für einen Beobachter auf der Erde eine größere Flugzeit aufweisen und damit dickere Schichten der Atmosphäre durchdringen, als es ihrer mittleren Lebensdauer τ_0 entsprechen würde.

Kapitel II

Maxwellsche Theorie

(2.1) Maxwellsche Gleichungen

Bei gegebener Ladungs- und Stromverteilung $\varrho(\vec{x},t)$ und $\vec{j}(\vec{x},t)$ wird das elektromagnetische Feld im Vakuum mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen bestimmt (siehe Elektrodynamik):

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad , \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\varrho$$

(2.1.1)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Aus (2.1.1) folgt die 'Kontinuitätsgleichung'

(2.1.3) $$\mathrm{div}\,\vec{j} + \dot{\varrho} = 0$$

Wegen $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ existiert nach dem Poincaréschen Satz lokal ein Vektorpotential $\vec{A}$ mit

(2.1.4) $$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

Damit ergibt sich aus (2.1.1)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = -\mathrm{rot}\left(\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) \quad , \text{ d.h. } \mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) = 0$$

Es existiert also ein Skalarpotential Φ (Anwendung des Poincaréschen Satzes), so daß

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$$

Wir erhalten demnach:

(2.1.5) $$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \quad , \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

Das Vektorpotential $\vec{A}$ und das Skalarpotential $\underline{\Phi}$ sind bei vorgegebenen Feldern $\vec{B}$ und $\vec{E}$ nicht eindeutig bestimmt. Wegen dieser Willkür kann man die Potentiale $\vec{A}$ und $\underline{\Phi}$ so 'eichen', daß sie der Lorentzbedingung

(2.1.6) $$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \dot{\underline{\Phi}} = 0$$

genügen.

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in (2.1.5) bleiben unverändert, falls man das Vektorpotential $\vec{A}$ durch

(2.1.7) $$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda(\vec{x},t)$$

und die Skalarfunktion $\underline{\Phi}$ durch

(2.1.8) $$\underline{\Phi}' = \underline{\Phi} - \frac{1}{c} \dot{\Lambda}(\vec{x},t)$$

ersetzt, wobei $\Lambda(\vec{x},t)$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist. Soll die Lorentzbedingung (2.1.6) gegenüber der Abbildung (2.1.7), (2.1.8) invariant bleiben, d.h. soll aus (2.1.6)

(2.1.9) $$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c} \dot{\underline{\Phi}}' = 0$$

folgen, so ist

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{1}{c} \dot{\underline{\Phi}}' = \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \dot{\underline{\Phi}}\right) + \operatorname{div} \operatorname{grad} \Lambda - \frac{1}{c^2} \ddot{\Lambda} = 0$$

falls Λ der Wellengleichung

(2.1.10) $$\Delta \Lambda(\vec{x},t) - \frac{1}{c^2} \ddot{\Lambda}(\vec{x},t) = 0$$

genügt. Die Abbildung (2.1.7), (2.1.8) mit der Nebenbedingung (2.1.10) bezeichnen wir als Eichtransformation.
In der Literatur wird gelegentlich auch die obige Abbildung ohne die Bedingung (2.1.10) Eichtransformation genannt.

Setzt man die elektrodynamischen Potentiale in (2.1.1) ein, so folgt

(2.1.11) $$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\vec{A}) + \frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\,\dot{\Phi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Wegen

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

und

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0$$

erhält man aus (2.1.11)

$$\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}) + \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

d.h.

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Analog ergibt sich aus $\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\varrho$

$$-\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\Phi) - \frac{1}{c}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{A}} = 4\pi\varrho$$

bzw.

$$-\Delta\Phi + \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}) = 4\pi\varrho$$

d.h.

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\Phi} = -4\pi\varrho$$

Unter Verwendung der Potentialdarstellung gehen die Maxwellschen Gleichungen also über in

(2.1.12) $$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad , \quad \Box\Phi = -4\pi\varrho$$

mit der Lorentzbedingung

(2.1.13) $$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi} = 0$$

Dabei ist

(2.1.14) $$\Box := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

der sog. d'Alembertsche Operator.

Wegen weiterer Finzelheiten sei auf die Literatur verwiesen.

(2.2) Tensorielle Form der Maxwellschen Gleichungen

Wir untersuchen nun die Invarianzeigenschaften der Maxwellschen Gleichungen. Dazu verwenden wir die Ergebnisse der Tensorrechnung.

Die Invarianz der Maxwellschen Gleichungen

(2.2.1) $$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\varrho$$

(2.2.2) $$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

gegenüber räumlichen Drehungen D ist evident, da das System (2.2.1) (2.2.2) vektoriell geschrieben ist. Um auch das Verhalten gegenüber räumlichen Spiegelungen S zu kennen, müssen wir die Transformationseigenschaften von $\vec{B}, \vec{E}, \vec{j}$ und ϱ bezüglich der Drehspiegelungsgruppe $\mathcal{G}(D,S)$ angeben: ϱ ist ein Skalar, $\vec{j}$ und $\vec{E}$ sind polare Vektoren. $\vec{B}$ ist ein axialer Vektor, ebenso die Rotationsbildung $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ eines (polaren) Vektors $\vec{a}$.

Daher ist
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

eine polare Vektorgleichung,
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

eine axiale Vektorgleichung.

Die Invarianz von

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\varrho \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

gegenüber $G(D,S)$ folgt unmittelbar. Wir erhalten also das wichtige Ergebnis:

> Die Maxwellschen Gleichungen sind gegenüber räumlichen Drehungen und Spiegelungen invariant.

In den folgenden Ausführungen werden wir zeigen, daß der Maxwellschen Theorie eine größere Invarianzmenge zugrunde liegt, als wir bisher untersucht haben.

Ein axialer Vektor in R^3 kann als schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe über R^3 interpretiert werden. So erklärt sich der Ansatz:

(2.2.3) $$\left(B_{ik}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad i,k = 1,2,3$$

Den Tensor B_{ik} über R^3 erweitern wir zu einem schiefsymmetrischen Tensor zweiter Stufe über $\mathcal{H}_4$, zum sog. elektromagnetischen Feldtensor $F_{\mu\nu}$, indem wir setzen:

(2.2.4) $$\left(F_{\mu\nu}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -iE_1 \\ & B_{ik} & & -iE_2 \\ & & & -iE_3 \\ \hline iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{array}\right)$$

Bezüglich der räumlichen Drehungen zerfällt $F_{\mu\nu}$ in den Tensor B_{ik} und den Vektor $-i\vec{E}$.
Ferner fassen wir $\vec{x}$ und t zum Vierer-Vekor $\underline{x} = (x_\mu)$ mit

(2.2.5) $$\underline{x} = (x_\mu) = (\vec{x}, x_4) = (\vec{x}, ix_0) = (\vec{x}, ict)$$

und $\vec{j}$ und ρ zum Vierer-Vektor $\underline{j} = (j_\mu)$ mit

(2.2.6) $$\underline{j} = (j_\mu) = (\vec{j}, ic\rho)$$

zusammen. Dann gilt:
<u>(Satz 2.2.7)</u>

Unter den obigen Voraussetzungen sind die Maxwellschen Gleichungen

I) $\quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$

II) $\quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$

äquivalent zum Gleichungssystem

(2.2.7) I') $$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \qquad \mu = 1 \dots 4$$

(2.2.8) II') $$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\varkappa} + \frac{\partial F_{\nu\varkappa}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\varkappa\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \qquad \mu,\nu,\varkappa \in \{1, \dots 4\}$$

<u>Bew</u>: Übungsaufgabe für den Leser!

Statt (2.2.8) schreibt man auch

(2.2.9) $$\sum_{(\mu,\nu,\varkappa)} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\varkappa}} = 0$$

Die Kontinuitätsgleichung

(2.2.10) $$\operatorname{div} \vec{j} + \dot{\varrho} = 0$$

geht mit Hilfe der obigen Bezeichnungen über in

(2.2.11) $$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0$$

Die Struktur des Gleichungssystems

$$\sum_{(\mu\nu\varkappa)} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\varkappa}} = 0$$

wird besser ersichtlich, falls man die Methoden des Differentialformenkalküls verwendet :

<u>(Satz 2.2.12)</u>

ω_2 sei eine Differentialform zweiter Stufe, definiert durch

$$\omega_2 = \sum_{1 \le \mu < \nu \le 4} F_{\mu\nu}\, dx_{\mu} \wedge dx_{\nu} = B_3\, dx_1 \wedge dx_2 + B_2\, dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ B_1\, dx_2 \wedge dx_3 - i\,(E_1\, dx_1 + E_2\, dx_2 + E_3\, dx_3) \wedge dx_4$$

Ferner sei $d\omega_2$ die äußere (Cartansche) Ableitung von ω_2, gegeben in der Form:

$$d\omega_2 = \sum_{\varrho=1}^{4} \sum_{1 \le \mu < \nu \le 4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\varrho}}\, dx_{\varrho} \wedge dx_{\mu} \wedge dx_{\nu}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist

(2.2.13) $$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

äquivalent mit

(2.2.14) $$d\omega_2 = 0$$

Bew.:

Nach geeigneter Zusammenfassung der Terme erhält man:

$$d\omega_2 = \sum_{\rho=1}^{4} \sum_{1 \le \mu < \nu \le 4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} dx_\rho \wedge dx_\mu \wedge dx_\nu$$

$$= \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{dx_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \frac{1}{i} \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$$

$$- \frac{1}{i} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

$$+ \frac{1}{i} \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

Beachtet man, daß $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$,

$dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ und $dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$
eine Basis des Raumes der Differentialformen dritter Stufe über $\mathcal{R}_4$ bilden, so verschwindet $d\omega_2$ genau dann, falls die Koeffizienten von $d\omega_2$ gleich Null sind, d.h. $d\omega_2 = 0$ ist äquivalent mit

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} + \frac{1}{c} \dot{\vec{B}} = 0 \qquad \mathrm{div}\ \vec{B} = 0$$

Da die Rotationsbildung (äußere Ableitung) gegenüber Tensortransformationen invariant ist, so ist speziell

$$d\omega_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Rot}(F_{\mu\nu}) = 0 \quad \text{bzw.} \sum_{(\mu,\nu,\varkappa)} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\varkappa} = 0$$

gegenüber Lorentztransformationen invariant.
Auf Grund der Regeln der Tensorrechnung und der vorhergehenden Überlegungen folgt:

(Satz 2.2.15)

Die Maxwellschen Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu$$

und

$$\sum_{(\mu\nu\varkappa)} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\varkappa} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Rot}\,(F_{\mu\nu}) = 0$$

sind gegenüber Lorentztransformationen $L \in \mathcal{G}_L$ invariant.
Wegen $d\omega_2 = 0$ existiert nach dem Poincaréschen Satz eine Differentialform erster Stufe $\omega_1 = \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu \, dx_\mu$, so daß

(2.2.16) $$\omega_2 = d\omega_1$$

bzw.

(2.2.17) $$(F_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu \right) = \mathrm{Rot}\, \underline{A}$$

Da sich die Differentialform ω_1 aus $d\omega_2 = 0$ nicht eindeutig bestimmen läßt, kann $\underline{A} = (A_\mu)$ so geeicht werden, daß

(2.2.18) $$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

Setzen wir nun

(2.2.19) $$\underline{A} = (A_\mu) = (\vec{A}, i\phi)$$

so gehen die Maxwellschen Gleichungen

$$\mathrm{Rot}\,(F_{\mu\nu}) = 0 \qquad \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \qquad \mu = 1 \ldots 4$$

mit (2.2.17), (2.2.19) und der Nebenbedingung (2.2.18) (Lorentzbedingung) über in

(2.2.20) $$\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu \qquad \mu = 1 \dots 4$$

bzw.

(2.2.21) $$\Box \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{j}$$

Das System (2.2.20) zusammen mit (2.2.19) und (2.2.18) bildet eine relativistisch invariante Verallgemeinerung von (2.1.12) und (2.1.13).

(2.3) Berechnung elektromagnetischer Felder mit Hilfe von Lorentztransformationen.

Gewisse elektromagnetische Effekte lassen sich leicht deuten, falls man mit Hilfe des antisymmetrischen Feldtensors $F_{\mu\nu}$ die elektrischen und magnetischen Felder bezüglich verschiedener Lorentzsysteme berechnet.
Sind I und I' zwei Lorentzsysteme, so sei die Abbildung $L: I \rightarrow I'$ gegeben in der Form

(2.3.1) $$x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x_1 + i\beta x_4\right)$$

$$x_2' = x_2 \qquad x_3' = x_3$$

$$x_4' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-i\beta x_1 + x_4\right)$$

Mit

(2.3.2) $$\left(F_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(F'_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B_3' & -B_2' & -iE_1' \\ -B_3' & 0 & B_1' & -iE_2' \\ B_2' & -B_1' & 0 & -iE_3' \\ iE_1' & iE_2' & iE_3' & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

(2.3.3)

$$E_1' = E_1 \qquad\qquad B_1' = B_1$$

$$E_2' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(E_2 - \frac{v}{c} B_3\right) \qquad B_2' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_2 + \frac{v}{c} E_3\right)$$

$$E_3' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(E_3 + \frac{v}{c} B_2\right) \qquad B_3' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_3 - \frac{v}{c} E_2\right)$$

Der zur Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ parallele Anteil des elektrischen und magnetischen Feldes bleibt unverändert. Nimmt man nun z.B. eine in I ruhende elektrische Punktladung an, so ist

(2.3.4)
$$\left(F_{\mu\nu}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -i\vec{E} \\ \hline i\vec{E} & 0 \end{array}\right)$$

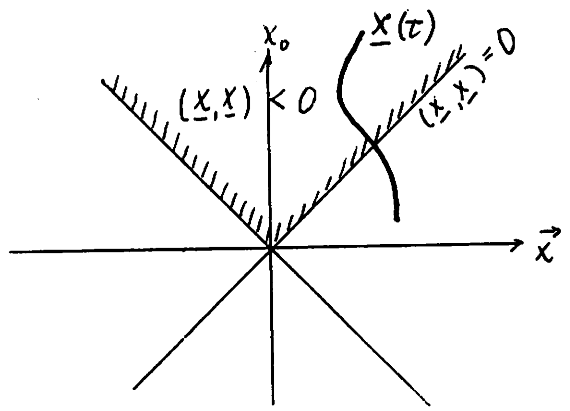
Ein relativ zu I gleichförmig und geradlinig bewegter Beobachter stellt einen elektrischen Strom fest, der von einem magnetischen Feld umgeben ist (vgl. 2.3.3).
Ist in I beispielsweise nur ein Magnetfeld vorhanden, so ergibt sich bezüglich I' auch ein elektrisches Feld. Die Lorentztransformation liefert also automatisch einen engen Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern.

Kapitel III

Relativistische Mechanik

Da die Newtonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik nicht relativistisch invariant sind, besteht unsere nächste Aufgabe darin, das mechanische Bewegungsgesetz so zu verallgemeinern, daß sich eine relativistisch invariante Formulierung ergibt, die im Spezialfall $\left|\frac{\vec{v}}{c}\right| \ll 1$ das bisherige klassische Gesetz enthält.

(3.1) Bewegungsverlauf im Raum-Zeit-Kontinuum



Die Bahn eines freien Massenpunktes im Raum-Zeit-Kontinuum kann durch eine einparametrige Kurve $\mathcal{C}$ in $\mathcal{R}_4$ wiedergegeben werden, dargestellt in der Form

(3.1.1) $$\mathcal{C}: \{\underline{x}(\tau)\} = \{(x_\mu(\tau))\}$$

τ sei zunächst ein beliebiger Parameter, der noch geeignet normiert werden kann.

Den 'Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}$' des Massenpunktes m definiert man in Analogie zum nichtrelativistischen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = d\vec{x}/dt = \dot{\vec{x}}$ als Tangentialvektor an die Kurve $\mathcal{C}$:

(3.1.2) $$\underline{v} = (v_\mu) = \left(\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau}\right) = (\mathring{x}_\mu(\tau)) = \mathring{\underline{x}}$$

Auf Grund der Überlegungen aus (1.2) bildet die Lichtgeschwindigkeit c eine obere Grenze für die Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{x}/dt = \dot{\vec{x}}$ eines Massenpunktes, d.h. es gilt

(3.1.3) $\quad \left|\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right| < 1 \quad$ bzw. $\quad \left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) - c^2 = -a^2 < 0 \quad (a>0)$

So erklärt sich die Normierung des Kurvenparameters τ der Kurve $\mathcal{C}$ mit Hilfe der relativistisch invarianten Größe C^2 :

$$(3.1.4) \qquad \sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau}\right)^2 = \sum_{\mu=1}^{4} (\mathring{x}_\mu(\tau))^2 = -c^2$$

Daraus folgt bei einer Parametertransformation $\tau = \tau(t)$, $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$:

$$\sum_{\mu=1}^{4} (\mathring{x}_\mu(\tau))^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -c^2$$

bzw.

$$(3.1.5) \qquad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2} \qquad \beta = \left|\frac{\vec{v}}{c}\right|$$

Im Grenzfall $\beta \ll 1$ gilt $d\tau = dt$, d.h. der normierte Parameter τ ist im nichtrelativistischen Grenzfall mit der Zeit t identisch. τ bezeichnet man als 'Eigenzeit' des Massenpunktes m und deutet sie als diejenige Zeit, die ein Beobachter im Ruhesystem des Massenpunktes auf seiner Uhr abliest.

Drückt man die Ableitungen $\mathring{x}_\mu(\tau)$ mit Hilfe der Ableitungen nach der Zeit t aus, so folgt:

$$(3.1.6) \qquad \mathring{x}_k = \frac{dx_k(\tau)}{d\tau} = \frac{dx_k}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad k = 1,2,3$$

$$\mathring{x}_4 = ic\,\frac{dt}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(3.2) <u>Relativistisches Bewegungsgesetz</u>

Analog zur Definition des Geschwindigkeitsvektors $\underline{v} = \frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau}$ führen wir den 'Beschleunigungsvektor' $\underline{b}$ ein, indem wir setzen:

$$(3.2.1) \qquad \underline{b} = (b_\mu) = \left(\frac{d^2x_\mu(\tau)}{d\tau^2}\right) = \left(\mathring{\mathring{x}}_\mu(\tau)\right)$$

Mit (3.1.6) ergibt sich

$$\overset{\circ\circ}{x}_k = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_k}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

(3.2.2)
$$\overset{\circ\circ}{x}_4 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

<u>(Satz 3.2.2)</u>

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor $\underline{v}$ und $\underline{b}$ sind zueinander orthogonal.

<u>Bew.:</u>

Differenziert man $(\underline{\overset{\circ}{x}}, \underline{\overset{\circ}{x}}) = \sum_{\mu=1}^{4} \overset{\circ}{x}_\mu^{\,2} = -c^2$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{dx_\mu}{d\tau} \cdot \frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = \sum_{\mu=1}^{4} v_\mu \cdot b_\mu = (\underline{v}, \underline{b}) = 0$$

Analog zum Newtonschen Bewegungsgesetz macht man nun einen Ansatz in der Form:

(3.2.3)
$$m \cdot \frac{d^2x_\mu(\tau)}{d\tau^2} = k_\mu$$

wobei k_μ die Komponenten einer Vierer-Kraft $\underline{k} = (k_\mu)$ sind. Wegen $(\underline{v}, \underline{b}) = 0$ erhalten wir als Bedingung

für $\underline{k}$:

(3.2.4)
$$(\underline{k}, \underline{v}) = 0$$

Das ist nur dann erfüllt, falls $\underline{k}$ eine Funktion der Geschwindigkeit $\underline{v}$ ist, d.h. falls $\underline{k} = \underline{k}(\underline{v})$ bzw. $k_\mu = k_\mu(\underline{v})$. Nehmen wir K_μ linear in v_ν an, d.h. setzen wir

(3.2.5)
$$K_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} f_{\mu\nu} v_\nu$$

so muß gelten
$$\sum_{\mu=1}^{4} k_\mu v_\mu = \sum_{\mu,\nu} f_{\mu\nu} v_\nu v_\mu = 0$$
, d.h. $f_{\mu\nu}$ muß schiefsymmetrisch sein.

Auf weitere Einzelheiten gehen wir im folgenden Abschnitt ein, in dem wir das Verhalten eines geladenen Massenpunktes in einem elektromagnetischen Feld untersuchen.

Kapitel IV

Bahn eines geladenen Massenpunktes im elektromagnetischen Feld

(4.1) Bewegungsverlauf im elektromagnetischen Feld

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik wird die Bahn eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung e unter dem Einfluß eines elektromagnetischen Feldes durch das Gleichungssystem

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{K} \tag{4.1.1}$$

mit

$$\vec{K} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{x}}, \vec{B}\right]\right) \tag{4.1.2}$$

beschrieben.
Dabei ist $\vec{K}$ die auf das Teilchen wirkende Lorentzkraft.

Um ein relativistisch invariantes Bewegungsgesetz zu erhalten, macht man nach (3.2) einen Ansatz in der Form

$$m \cdot \frac{d^2 x_\mu(\tau)}{d\tau^2} = k_\mu \tag{4.1.3}$$

mit

$$k_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} f_{\mu\nu} v_\nu \;, \quad f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu} \;; \quad v_\mu = \mathring{x}_\mu \tag{4.1.4}$$

Bewegt sich ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung e in einem elektromagnetischen Feld, so ist es auf Grund der vorhergehenden Überlegungen naheliegend, in (4.1.3)

$$k_\mu = \sum_\nu f_{\mu\nu} v_\nu = \frac{e}{c} \sum_\nu F_{\mu\nu} v_\nu \tag{4.1.5}$$

zu setzen, wobei $F_{\mu\nu}$ der elektromagnetische Feldtensor ist. Der konstante Faktor wird aus Dimensionsgründen hinzugefügt. Mit (4.1.5) geht (4.1.3) über in

$$m \cdot \frac{d^2 x_\mu(\tau)}{d\tau^2} = \frac{e}{c} \sum_\nu F_{\mu\nu} v_\nu \tag{4.1.6}$$

Drückt man in (4.1.6) die Ableitungen nach τ durch Ableitungen nach t aus und benutzt (3.2.2), so folgt

$$(4.1.7)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\dot{\vec{x}}, \vec{B}\right]\right) = \vec{K}$$

und

$$(4.1.8)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = (\dot{\vec{x}}, \vec{E})$$

Wegen $(\dot{\vec{x}}, [\dot{\vec{x}}, \vec{B}]) = 0$ läßt sich (4.1.8) schreiben in der Form

$$(4.1.9)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = (\dot{\vec{x}}, \vec{K})$$

Mit Hilfe der Lorentzkraft $\vec{K}$ lautet die Vierer-Kraft $\underline{K}$

$$(4.1.10)\qquad \underline{K} = \left(\frac{\vec{K}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic(\dot{\vec{x}},\vec{K})}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$\underline{K}$ ist die sog. Minkowski-Kraft. Wegen (3.2.4) steht sie senkrecht auf der Bahn des Massenpunktes m.

Um die Richtigkeit des relativistischen Ansatzes (4.1.6) zu prüfen und eine physikalische Interpretation des Gleichungssystems (4.1.7) und (4.1.8) zu finden, untersuchen wir zunächst das Verhalten von (4.1.6) für kleine Geschwindigkeiten.

(4.2) Nichtrelativistischer Grenzfall

Der nichtrelativistische Grenzfall ist durch die Beziehung $\beta \ll 1$ charakterisiert. In den relativistisch invarianten Gleichungen hat man daher im wesentlichen Entwicklungen nach β durchzuführen, wobei Terme mit höheren Potenzen von β vernachlässigt werden.
Zunächst ist

$$(4.2.1)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

Damit erhält man in erster Näherung

(4.2.2) $$\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

und aus

(4.2.3) $$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\right)$$

in erster Näherung

(4.2.4) $$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + E_{kin}$$

Mit Hilfe dieser Entwicklungen geht (4.1.7), (4.1.8) für $\beta \ll 1$ über in die klassischen Gleichungen

(4.2.5) $$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{x}}) = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\dot{\vec{x}}, \vec{B}]\right) = \vec{K}$$

und

(4.2.6) $$\frac{d}{dt}(mc^2 + E_{kin}) = \frac{d}{dt}(E_{kin}) = e(\dot{\vec{x}}, \vec{E}) = (\dot{\vec{x}}, \vec{K})$$

(4.2.5) gibt die Impulsänderung des Teilchens unter dem Einfluß der Lorentzkraft wieder.
In (4.2.6) ist $(\dot{\vec{x}}, \vec{K})$ die Arbeit, die das äußere Feld in der Zeiteinheit an dem Teil-chen leistet, und $\frac{d}{dt}E_{kin}$ entspricht der Änderung der kinetischen Energie des Teilchens.
Die Gleichung (4.1.8) stellt also in unrelativistischer Näherung den Energiesatz dar.
Analog definiert man nun

(4.2.7) $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

als relativistische Energie des Teilchens, die für $\vec{v} = 0$ wegen (4.2.3) in die sog. Ruheenergie

(4.2.8) $$E_0 = mc^2$$

übergeht. m bezeichnet man in der Literatur als "Ruhemasse" und

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.2.9}$$

als 'relativistische Masse' des Teilchens.

Die Beziehung $E_0 = mc^2$ bezeichnet man als den Satz von der 'Trägheit der Energie', der eines der wichtigsten Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie ist: 'Die Masse M eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieeinhalt; ändert sich die Energie um ΔE, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $\Delta E/c^2$ '. (Einstein, Ann. d. Phys. 17, 1905). Inzwischen ist die Äquivalenz von Masse und Energie experimentell voll bestätigt worden.

Kapitel V

Relativistische Hamilton-Jacobische Theorie

(5.1) Hamiltonsche Form des Bewegungsgesetzes eines geladenen Massenpunktes in einem elektromagnetischen Feld

a) Nichtrelativistischer Fall

Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld wird klassisch mit Hilfe des Gleichungssystem (vgl. (4.1))

$$m\ddot{x}_i = e\left(E_i + \frac{1}{c}[\dot{\vec{x}}, \vec{B}]_i\right) \qquad i = 1,2,3 \tag{5.1.1}$$

bzw.

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\dot{\vec{x}}, \vec{B}]\right) \tag{5.1.2}$$

beschrieben.

Die Feldgrößen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lassen sich unter Verwendung der elektrodynamischen Potentiale V (x) und A (x) darstellen in der Form (vgl. 2.1.5 und setze $\phi = V$)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Um nun die Hamiltonsche Form des Bewegungsgesetzes (5.1.2) zu erhalten, muß man eine dem Problem angepaßte Hamiltonfunktion angeben.

(Satz 5.1.3)

Wird die Hamiltonfunktion H^{el} definiert durch

$$H^{el} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + eV \tag{5.1.3}$$

so ergeben die kanonischen Gleichungen

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H^{el}}{\partial x_k} \qquad \dot{x}_k = \frac{\partial H^{el}}{\partial p_k} \qquad k = 1,2,3 \tag{5.1.4}$$

das System (5.1.2).

(Die Größen p_K sind die (den Koordinaten x_K zugeordneten) 'kanonischen Impulse'. Sie errechnen sich aus (5.1.4) zu $p_K = m\dot{x}_K + \frac{e}{c}A_K$ und gehen im Falle $\vec{A} = 0$ in die gewöhnlichen Impulskoordinaten $m\dot{x}_K$ über.

<u>(Beweis von Satz 5.1.3)</u>

Im einzelnen gilt:

α)

$$\dot{p}_K = -\frac{\partial H^{el}}{\partial x_K} = \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{3}\left(p_\ell - \frac{e}{c}A_\ell\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_\ell}{\partial x_K} - e\frac{\partial V}{\partial x_K}$$

$$\dot{x}_K = \frac{\partial H^{el}}{\partial p_K} = \frac{1}{m}\left(p_K - \frac{e}{c}A_K\right)$$

$$\ddot{x}_K = \frac{1}{m}\left(\dot{p}_K - \frac{e}{c}\sum_\ell \frac{\partial A_K}{\partial x_\ell}\dot{x}_\ell - \frac{e}{c}\frac{\partial A_K}{\partial t}\right)$$

β)

$$\dot{p}_K = \frac{e}{c}\sum_\ell \dot{x}_\ell\frac{\partial A_\ell}{\partial x_K} - e\frac{\partial V}{\partial x_K}$$

$$m\ddot{x}_K = \dot{p}_K - \frac{e}{c}\sum_\ell \frac{\partial A_K}{\partial x_\ell}\dot{x}_\ell - \frac{e}{c}\frac{\partial A_K}{\partial t}$$

$$= \frac{e}{c}\sum_\ell\left(\frac{\partial A_\ell}{\partial x_K} - \frac{\partial A_K}{\partial x_\ell}\right)\dot{x}_\ell - \frac{e}{c}\frac{\partial A_K}{\partial t} - e\frac{\partial V}{\partial x_K}$$

γ) wegen $\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$ und $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ folgt für $K=1$:

$$m\ddot{x}_1 = \frac{e}{c}\sum_\ell\left(\frac{\partial A_\ell}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_\ell}\right)\dot{x}_\ell + eE_1$$

$$= \frac{e}{c}\left\{\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\dot{x}_2 - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\dot{x}_2\right) - \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\dot{x}_3 - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\dot{x}_3\right)\right\} + eE_1$$

$$= \frac{e}{c}\left(\dot{x}_2 \operatorname{rot}_3 \vec{A} - \dot{x}_3 \operatorname{rot}_2 \vec{A} \right) + e E_1$$

$$= \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{x}}, \vec{B} \right]_1 + e E_1 = e\left(E_1 + \frac{1}{c} [\dot{\vec{x}}, \vec{B}]_1 \right)$$

Entsprechend erhalten wir

$$m \ddot{\vec{x}} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\dot{\vec{x}}, \vec{B}] \right)$$

b) <u>Relativistisches Bewegungsgesetz</u>

Den für das 'klassische' Bewegungsgesetz entwickelten Hamiltonformalismus wollen wir nun auf den relativistischen Fall erweitern. Dazu haben wir eine 'relativistische' Hamiltonfunktion

$$H^{rel} = H^{rel}(p_1, \dots p_4, x_1 \dots x_4)$$

anzugeben, die im Grenzfall $\beta \ll 1$ (bis auf eine additive Konstante) gleich der Funktion H^{el} (vgl. 5.1.3) ist.

Auf Grund der allgemeinen Betrachtungen über kanonische Abbildungen und der Ergebnisse der relativistischen Kinematik eines Massenpunktes (vgl. III, IV) ist es naheliegend, die 'relativistischen' kanonischen Gleichungen in der Form

(5.1.8) $$\overset{\circ}{p}_\mu = - \frac{\partial H^{rel}}{\partial x_\mu} \qquad \overset{\circ}{x}_\mu = \frac{\partial H^{rel}}{\partial p_\mu} \qquad \mu = 1 \dots 4$$

anzusetzen, wobei $\overset{\circ}{p}_\mu(\tau)$ und $\overset{\circ}{x}_\mu(\tau)$ Ableitungen nach der Eigenzeit τ bedeuten. Die Lösungen

(5.1.9) $$\xi(\tau) = (\underline{p}(\tau), \underline{x}(\tau))$$

von (5.1.8) (vgl. auch (5.2)) beschreiben die Bahn des Massenpunktes in einem 8-dimensionalen Phasenraum X.

(Satz 5.1.10)

(5.1.10) $$\overset{\circ}{p}_\mu(\tau) = -\frac{\partial H^{rel}}{\partial x_\mu} \qquad \overset{\circ}{x}_\mu(\tau) = \frac{\partial H^{rel}}{\partial p_\mu}$$

sei das kanonische Gleichungssystem zu gegebener Hamilton-funktion

(5.1.11) $$H^{rel}(\underline{p},\underline{x}) = \frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{4}\left(p_\nu - \frac{e}{c}A_\nu(\underline{x})\right)^2 + \alpha$$

Dann ist (5.1.10) äquivalent zum Gleichungssystem

(5.1.12) $$m\,\overset{\circ\circ}{x}_\mu = \frac{e}{c}\sum_{\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}\,\overset{\circ}{x}_\nu$$

wobei

(5.1.13) $$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

Bew.:

Die Rechnung erfolgt analog zu (Satz 5.1.3):

$$\overset{\circ}{x}_\mu(\tau) = \frac{\partial H^{rel}}{\partial p_\mu} = \frac{1}{m}\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)$$

$$\overset{\circ}{p}_\mu(\tau) = -\frac{\partial H^{rel}}{\partial x_\mu} = \frac{e}{mc}\sum_\nu \left(p_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{e}{c}\sum_\nu \overset{\circ}{x}_\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}$$

d.h. $$m\,\overset{\circ\circ}{x}_\mu(\tau) = \frac{e}{c}\sum_\nu F_{\mu\nu}\,\overset{\circ}{x}_\nu$$

Im folgenden zeigen wir, daß die zunächst willkürlich gewählte Konstante α in (5.1.11) näher bestimmt werden kann.
Setzen wir z.B. $A_\mu = 0$, so spezialisiert sich H^{rel} zu

(5.1.14) $$H^{rel} = \frac{1}{2m}\sum_\mu p_\mu^2 + \alpha$$

Als Bewegungsgleichung erhalten wir

(5.1.15) $\quad \overset{\circ}{p}_\mu = 0 \qquad \overset{\circ}{x}_\mu = \frac{1}{m} p_\mu \qquad \text{bzw} \qquad p_\mu = m\overset{\circ}{x}_\mu$

(5.1.15) liefert die Bahn für ein freies Teilchen. Aus der in (3.1) erörterten Normierungsbedingung

(5.1.16) $$\sum_\nu \left(\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau} \right)^2 = -c^2$$

folgt zusammen mit (5.1.15)

(5.1.17) $$\frac{1}{2}m \sum_\mu p_\mu^2 + \frac{1}{2} m c^2 = 0$$

Nun ist die Hamiltonfunktion H^{rel} (5.1.11) längs einer zusammenhängenden charakteristischen Kurve konstant, und wir können (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) annehmen, daß H^{rel} konstant gleich Null ist. Wegen (5.1.14) und (5.1.17) ergibt sich damit für α der Wert $\frac{1}{2} mc^2$.

<u>(Satz 5.1.18)</u>

Im Grenzfall $\beta \ll 1$ stimmt die Hamiltonfunktion

$$H^{rel} = \frac{1}{2m} \sum_{\nu=1}^{4} \left(p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu\right)^2 + \frac{1}{2} mc^2$$

mit der klassischen Hamiltonfunktion

$$H^{el} = \frac{1}{2m} \sum_{K=1}^{3} \left(p_K - \frac{e}{c} A_K\right)^2 + eV$$

bis auf eine additive Konstante überein.

<u>Bew.:</u> Der Beweis sei dem Leser überlassen.

(5.2.) Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

Legen wir nun die Hamiltonfunktion

(5.2.1) $$H^{rel}(\underline{p},\underline{x}) = H^{rel} = \frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{4}\left(p_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)^2 + \frac{1}{2}mc^2$$

zugrunde und ersetzen p_ν durch $\partial S/\partial x_\nu$, wobei S(x) die Wirkungsfunktion darstellt, so kann

(5.2.2) $$\frac{1}{2m}\sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial S(\underline{x})}{\partial x_\nu} - \frac{e}{c}A_\nu\right)^2 + \frac{1}{2}mc^2 = 0$$

als die zu (5.2.1) gehörige Hamilton-Jacobische Differentialgleichung aufgefaßt werden. Mit den Bezeichnungen

(5.2.3) $$\begin{aligned} \underline{q} &= (q_1, \ldots q_4) = (x_1 \ldots x_4) = \underline{x} \\ \xi &= (\xi^1, \ldots \xi^8) = (\xi^\alpha) = (\underline{p}, \underline{q}) \,; \quad (g^{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & O & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & O & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right) \\ \xi_0 &= (\xi_0^1, \ldots \xi_0^8) = (\underline{p}^0, \underline{q}^0) \end{aligned}$$

lassen sich dann die kanonischen Gleichungen

$$\overset{\circ}{p}_\mu = -\frac{\partial H^{rel}}{\partial x_\mu}, \quad \overset{\circ}{x}_\mu = \frac{\partial H^{rel}}{\partial p_\mu} \qquad \text{bzw.} \qquad \overset{\circ}{p}_\mu = -\frac{\partial H^{rel}}{\partial q_\mu} \,; \quad \overset{\circ}{q}_\mu = \frac{\partial H^{rel}}{\partial p_\mu}$$

in der Form

(5.2.4) $$\overset{\circ}{\xi}{}^\alpha(\tau) = \sum_{\beta=1}^{8}\frac{\partial H^{rel}(\xi)}{\partial \xi^\beta}\, g^{\beta\alpha} = \frac{\partial H^{rel}}{\partial \xi^\beta}\, g^{\beta\alpha} \quad (\alpha,\beta = 1 \ldots 8)$$

schreiben.

Lehrbücher zur Speziellen Relativitätstheorie

A. Einstein, Annalen der Physik, 17 (1905) 891

W. Pauli, Relativitätstheorie, 1920, Enz. Math. Wiss. V, 2, später in Buchform (englisch und deutsch) herausgegeben

A. P. French, Die Spezielle Relativitätstheorie, Vieweg 1971

H. M. Schwartz, Introduction to Special Relativity, McGrawHill, 1968