

Simulation des dynamischen Verhaltens mikromechanischer Membranen

Th. Fabula, A. Schroth

**Institut für Mikro- und Informationstechnik
der Hahn-Schickard-Gesellschaft für angewandte Forschung e. V.
Wilhelm-Schickard-Straße 10
W-7730 Villingen-Schwenningen, F.R.G.**

**Beitrag zur VDI-Fachtagung "Gerätetechnik und Mikrosystemtechnik", Chemnitz,
17.-18. März 1992**

**Veröffentlicht in VDI-Bericht 960, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1992,
ISBN 3-18-090960-9**

Simulation des dynamischen Verhaltens mikromechanischer Membranen

Thomas Fabula⁺, Andreas Schroth^{*}

⁺Hahn-Schickard-Institut für Mikro- und Informationstechnik, Villingen-Schwenningen,

^{*}Technische Universität Chemnitz

Zusammenfassung

Mit Hilfe des Finite-Elemente-Programmes ANSYS wird eine analytische Beziehung für die Eigenfrequenzänderung quadratischer Siliziummembranen in Abhängigkeit vom beaufschlagten Druck abgeleitet. Dazu werden die Einzelzusammenhänge Membranmittenauslenkung - Druck und Eigenfrequenzänderung - Membranmittenauslenkung untersucht und die angewendete Methode vorgestellt. Die Ergebnisse werden in Form einfach handhabbarer Formeln dargestellt, die u.a. zur Dimensionierung von frequenzanalogen Sensorelementen dienen können.

1. Einführung

Ein zunehmend großer Teil in der Mikrosystemtechnik verwendeter Sensoren basiert auf der Auswertung von dynamischen Effekten. Ein frequenzanaloges Sensorelement nutzt hierbei die Änderung der Eigenfrequenzen unter Einfluß einer äußeren Belastung (z.B. Kraft, Druck, Temperatur). Da die zugrundeliegenden Differentialgleichungen nicht auf analytischem Wege lösbar sind, ist die theoretische Beschreibung dieser Zusammenhänge noch wenig untersucht. Angeführte Lösungen sind meist mit numerischen Methoden (Verfahren nach RITZ, GALERKIN) ermittelt worden und gelten in der Regel nur für lineare Bereiche, d.h. kleine Membranauslenkungen. Wird eine Membran durch Druck oder Einzelkräfte senkrecht zu ihrer Oberfläche um einen im Verhältnis zur Membrandicke nennenswerten Betrag ausgelenkt, so entstehen in ihrer Mittelebene Reaktionsspannungen. Diese bewirken eine Versteifung des Elementes und damit eine Erhöhung seiner Eigenfrequenz.

2. Finite-Element-Modell

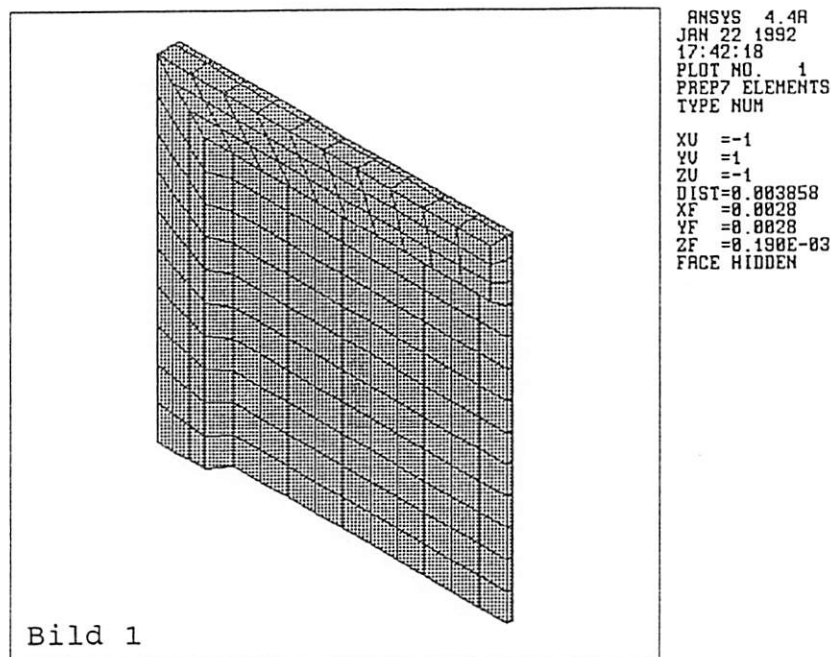
Das verwendete FE-Modell ist dreidimensional und entspricht einem Viertel der Membran (Bild 1). Eine Voraussetzung zur realitätsnahen Beschreibung ist die Verwendung der im Programm implementierten Optionen "large deflection" und "stress stiffening" zur Berücksichtigung der

Spannungsversteifung der Membran sowie die Einbeziehung der Randeinspannung in das Modell. Außerdem wurde die Anisotropie der Materialkennwerte berücksichtigt. Um die Allgemeingültigkeit des Zusammenhanges zu überprüfen, wurde das Modell in Dicke h und Seitenlänge a der Membran variiert und jeweils mit in Stufen steigendem Druck beaufschlagt. Die so berechneten Kurvenverläufe wurden normiert und miteinander verglichen. Als Normierungsbasis dienen dabei

- für die Eigenfrequenz f die Eigenfrequenz im unbelasteten Fall f_0 ,
- für die Mittenauslenkung d die Membrandicke h und
- für den Druck p der geometrieabhängige Referenzdruck:

$$P_0 = \frac{h^4}{a^4} \frac{E}{12 (1 - \nu^2)} \quad (1)$$

mit dem Elastizitätsmodul $E = 168,9 \text{ GPa}$ und der Poissonzahl $\nu = 0,0625$ (Silizium, $\langle 110 \rangle$ -Richtung im Kristall)



3. Simulationsergebnisse

Die in der Literatur angegebenen Zusammenhänge für die Eigenfrequenz einer Membran beruhen auf der Kirchhoffschen Theorie der Platten und Schalen, d.h. auf der Annahme von ebenen Objekten mit lateralen Abmessungen a wesentlich größer als ihre Dicke h ($a/h > 10$) /1/. Die Lösung erfolgt über numerische Verfahren. Für die Eigenfrequenzen der verschiedenen

Schwingungsmoden ergibt sich für homogenes Material:

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (2)$$

mit i, j - Anzahl der Halbwellen im Modenbild in X- bzw. Y- Richtung

ρ - Dichte von Silizium ($\rho = 2329 \text{ kg/m}^3$).

Die Konstante λ ist von den Randbedingungen, der Membranform und dem Seitenverhältnis der Membran abhängig. Für den Grundmode einer quadratischen, fest eingespannten Membran wird $\lambda_{11}^2 = 35,99$ angegeben. Eine Zusammenstellung weiterer Werte findet sich in /2/. Ein Vergleich der mit dem FE-Modell simulierten Eigenfrequenzen und den aus Beziehung (2) ermittelten Werten ergibt eine Abweichung von weniger als 10%.

Für die Eigenfrequenzverschiebung als Folge einer Druckeinwirkung ergibt sich aus den im ersten Abschnitt angestellten Überlegungen eine Zweiteilung des Zusammenhanges:

- a) Mittenauslenkung d als Funktion des einwirkenden Druckes p (statisches Problem)
- b) Frequenzverschiebung Δf als Funktion der Mittenauslenkung d (dynamisches Problem).

Aus der Überlagerung von a) und b) folgt:

- c) Frequenzverschiebung Δf als Funktion des einwirkenden Druckes p .

- a) Es wird von zwei verschiedenen Ansätzen ausgegangen:

1. Lösung für dünne Platten bei kleiner Auslenkung:

$$d = k_1 \frac{pa^4}{D} \quad \text{mit} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \dots \text{Biegesteifigkeit der Platte} \quad (3)$$

Für die Konstante k_1 werden zwischen 0,00126 und 0,00164 variierende Werte genannt (vgl./2/).

Aus Beziehung (3) folgt mit einem nichtlinearen Anteil LF /3/ der Ansatz:

$$d = k_2 \frac{pa^4}{D} (1 + LF) \quad (4)$$

$$LF = k_3 \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \quad n = 1, 2, \dots$$

2. Für quadratische, fest eingespannte Platten gilt für den Zusammenhang Druck p - Mittenauslenkung d nach [4],[5]:

$$p = \frac{16 \cdot E h^4}{(1 - \nu^2) a^4} \left(4,19847 \frac{d}{h} + 1,5816 \frac{d^3}{h^3} \right) \quad (5)$$

Für den Ansatz (4) sind die Konstanten k_2 , k_3 und n zu bestimmen. Im Falle sehr kleiner Auslenkungen kann angenommen werden, daß der Anteil LF im Ansatz verschwindet und ein linearer Zusammenhang nach Beziehung (3) gilt. Eine Regression an den simulierten Kurvenverlauf $d=f(p)$ liefert für kleine Auslenkungen ($d/h < 1/7$) ein mittleres $k_2 = 0,00136$ in guter Übereinstimmung mit Gleichung (3).

Die Ermittlung der Konstanten k_3 erfolgt unter Verwendung von k_2 auf gleichem Wege. Unter Verwendung von Gleichung (5) ergibt sich für $n=1$ ein mittleres $k_3 \approx -2.4 \cdot 10^{-4}$, für $n=2$ ein $k_3 \approx -5 \cdot 10^{-5}$. Ein Vergleich mit dem berechneten Kurvenverlauf läßt ein $n=1$ geeignet erscheinen. Aus der Beziehung (4) ergibt sich somit:

$$d = 0,00136 \frac{a^4}{D} p \left(1 - 0,00024 \frac{p}{p_0} \right) \quad (6)$$

In Gleichung (5) sind die geometrieabhängigen Konstanten bereits angegeben. Die Gleichung wird mit Hilfe der Lösungsformel nach Kardan nach d/h aufgelöst:

$$\frac{d}{h} = \sqrt[3]{\frac{p}{2K} + \sqrt{0,6957 + \left(\frac{p}{2K}\right)^2}} - \frac{2,658}{3 \sqrt[3]{\frac{p}{2K} + \sqrt{0,6957 + \left(\frac{p}{2K}\right)^2}}} \quad (7)$$

$$K = 1,5816 \frac{E h^4}{(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{2}\right)^4}$$

In Diagramm 1a,b sind die numerisch und die nach Gleichung (6),(7) errechneten Kurven $d=f(p)$ aufgetragen. Aus dem Vergleich ergeben sich Geltungsbereiche für Gleichung (6) bis zu einem Verhältnis $d/h=1,3$ und von Gleichung (7) bis zur Bruchgrenze, wobei die Abweichungen innerhalb einer Grenze von $\pm 6\%$ bleiben.

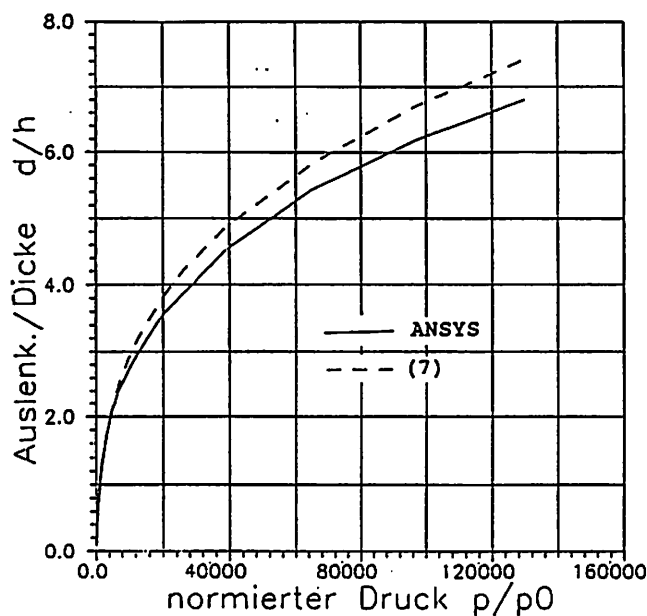


Diagramm 1a

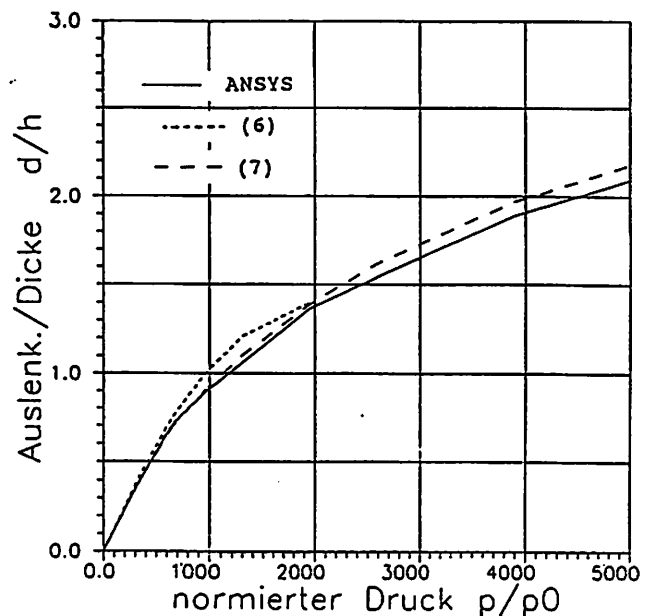


Diagramm 1b

b) Für die Resonanzfrequenzänderung in Abhängigkeit von der Auslenkung ist in /4/ angegeben:

$$f = f_0 \sqrt{1 + c \left(\frac{d}{h}\right)^2} \quad (8)$$

wobei c eine von Membraneinspannung und -form abhängige Konstante ist und für kreisförmige, fest eingespannte Membranen $c=1,464$ gilt. Zur Bestimmung der Konstanten c aus obiger Beziehung wurde der numerisch berechnete Kurvenverlauf $f=f(d)$ ausgewertet und $c=1,25$ bestimmt.

Im Diagramm 2 sind die simulierten und die nach Gleichung (8) analytisch ermittelten Kurvenverläufe dargestellt. Daraus ist ersichtlich, daß Gleichung (8) mit $c=1,25$ für den gesamten Bereich als gute analytische Näherung gelten kann, wobei der Fehler kleiner 5% bleibt. Eine Einschränkung ergibt sich durch das Seiten- zu Dickenverhältnis a/h , das bei einem Wert von <50 einen Fehler größer 10% verursachen kann.

Die Konstante c ist in den genannten Grenzen unabhängig von den Geometrieparametern, gilt aber nur für den Grundmode. Es wurden deshalb c für höhere Moden auf dem oben beschriebenen Wege ermittelt. So gilt für den Schwingungsmodus $f_{31}=f_{13}$ ein $c=0,17$ und für f_{33} ein $c=0,06$.

c) Für den gesuchten Zusammenhang $\Delta f=f(p)$ wurden aus den simulierten und mit den Beziehungen (6),(7),(8) analytisch berechneten Wertepaaren (p,d) und (d,f) Wertepaare (p,f) zusammengestellt und in normierter Form in Diagramm 3 dargestellt.

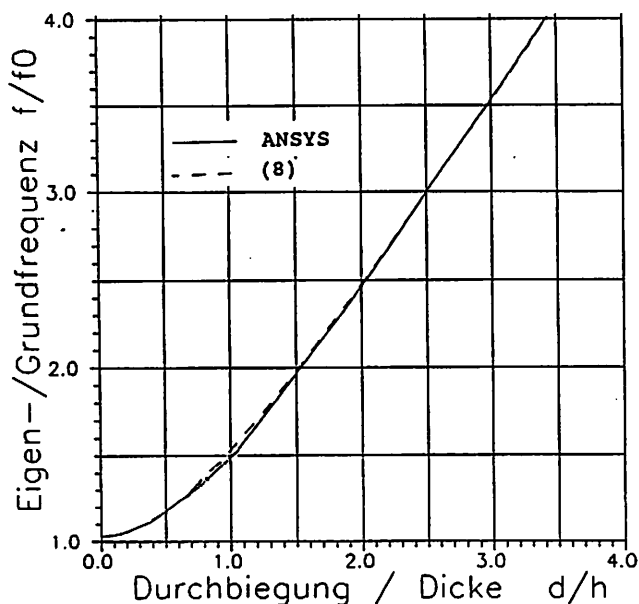


Diagramm 2

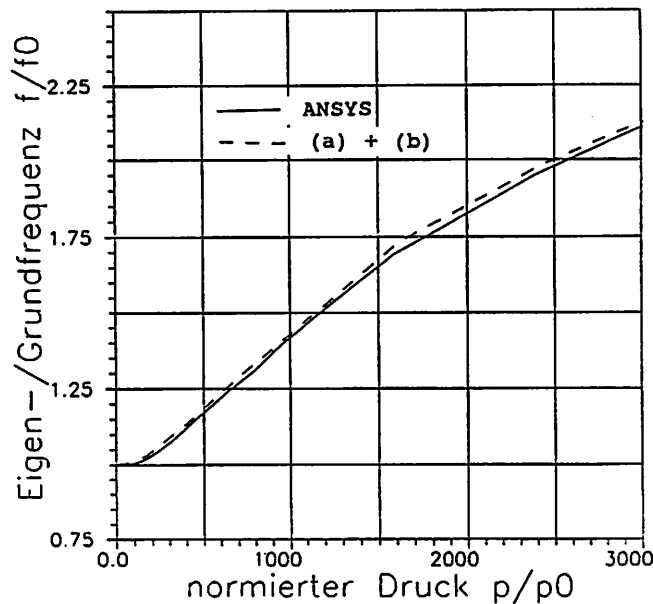


Diagramm 3

Aus der Darstellung $p/p_0 = f(f/f_0)$ läßt sich eine Dreiteilung des Verlaufes ablesen, die sich aus der Überlagerung der Funktionen (a) $p/p_0 = f(d/h)$ und (b) $d/h = f(f/f_0)$ erklären läßt.

Ausgehend von dieser Dreiteilung wurde für jeden der Bereiche eine analytische Gleichung angesetzt und auf ihre Gültigkeit hin überprüft:

1. Bereich ($0 < p/p_0 < 200$) \Leftrightarrow ($0 < d/h < 0,3$)

In diesem Bereich verläuft die Beziehung (a) noch linear, so daß sich das progressive Verhalten von Beziehung (b) diesem überlagert und formbestimmend ist. Aus dieser Überlegung heraus wird in /6/ eine zu (b) ähnlich lautende Funktion als Näherung angegeben:

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{1 + m_1 \left(\frac{p}{p_0} \right)^2} \quad (9)$$

Die numerischen Berechnungen liefern einen mittlerer Wert von $m_1 \approx 2 \cdot 10^{-6}$.

2. Bereich ($200 < p/p_0 < 800$) \Leftrightarrow ($0,3 < d/h < 0,8$)

Hier beginnt Beziehung (a) immer stärker degressiv zu werden und überlagert dies dem weiterhin progressiven Verhalten von Beziehung (b). Im Ergebnis heben sich pro- und degressive Anteile auf und es entsteht ein nahezu linearer Verlauf. Aus diesem Grund ist dieser Bereich für eine Drucksensoranwendung besonders interessant. Für den berechneten Kurvenverlauf wurde eine Regression mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate nach

$$\frac{f}{f_0} = a + b \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (10)$$

durchgeführt.

Es ergaben sich mittlere Werte für die Konstanten von $a=0,94$ und $b=0,00048$. Die Abweichung der simulierten Kurve vom linearen Regressionsansatz (10) beträgt maximal $\pm 0,5\%$.

3. Bereich ($p/p_0 > 800$) \Leftrightarrow ($d/h > 0,8$)

Die Beziehung (b) verläuft nahezu linear, wogegen Beziehung (a) immer stärker degressiv wird und damit den weiteren Verlauf bestimmt. Für diesen Bereich wurden zwei unterschiedliche Ansätze angenommen und auf ihre Übereinstimmung mit der Kennlinie hin geprüft:

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{1 + m_{21} \left(\frac{p}{p_0} \right)} \quad (11)$$

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt[3]{1 + m_{22} \left(\frac{p}{p_0} \right)} \quad (12)$$

Im Ergebnis ergab die Bestimmung der Konstanten für $m_{21}=0,001$ und für $m_{22}=0,0033$. Während Gleichung (11) den Kurvenverlauf bis zu einer Auslenkung $d/h < 2,5$ mit einer maximalen Abweichung von 10% beschreibt, stellt Gleichung (12) eine Beschreibung des Zusammenhanges von $d/h=2,5$ bis mindestens $d/h=8$ bei einer Abweichung von kleiner 5% dar.

4. Schlußbemerkung

Mit Hilfe der abgeleiteten Beziehungen lassen sich auf einfachem Wege Dimensionierungen von frequenzanalogen Drucksensorelementen durchführen. Bemerkenswert ist die erreichbare hohe Druckempfindlichkeit bei gleichzeitig guter Linearität des Zusammenhanges für das untersuchte Element Membran. Die Abmessungen des Membranelementes ergeben sich dabei aus dem zu messenden Druckbereich und der Arbeitsfrequenz. Nicht einbezogen in die Berechnung sind durch thermische und andere Effekte induzierte innere Spannungen, die das Frequenzverhalten erheblich beeinflussen können.

Literatur

- /1/ Blevins, R.D.: Formulas for natural frequency and mode shape,
R.E. Krieger Publishing Company, Malabar/Florida, (1984)
- /2/ Schroth, A.: Modellierung mikromechanischer Membranen,
Diplomarbeit, TU Chemnitz, (1992)
- /3/ Pfeifer, G.; Werthschützky, R.: Drucksensoren,
VEB Verlag Technik, Berlin, (1989)
- /4/ Tong, L.; Hsu, J.-T.; Ko, W.H.; Ding, X.: The Analysis of Capacitive Pressure
Sensors with Large Deflection, Transducers of the IEEE (1991), S.185-187
- /5/ Chan, H.-L.; Wise, K.D.: Scaling limits in batchfabricated silicon pressure sensors,
IEEE Transactions on Electronic Devices, Vol.ED-34, No.4, (1987), S.850-858
- /6/ Uttamachandi, D.; Thornton, K.E.B.; Nixon, J.; Culshaw, B.:
Optically excited resonant diaphragm pressure sensor,
Electronics Letters, Vol.23 No.4, (1987), S.152-153