Suites arithmétiques et suites géométriques

Exercice 1

Compléter les suites logiques de nombres pour obtenir les 8 premiers termes de chacune d'elles :

a. 4 - 7 - 10 - 13 - ...

b. 3 - 6 - 12 - 24 - ...

c. 20 - 19 - 17 - 14 - ...

d. 5 - 7 - 11 - 17 - ...

e. 1 - 4 - 9 - 16 - ...

Exercice 2

On considère les deux procédés d'obtention suivant de nombres :

Procédure A
On multiplie le nombre donné par 3

Procédure B
Au nombre donné, on lui soustrait 2.

Pour chaque question, donner les six premiers termes obtenus en répétant les consignes autant de fois que nécessaire.

1. Le nombre de départ est 3 et on répète la procédure **A** ;

2. Le nombre de départ est 11 et on répète la procédure **B**.

Exercice 3

1. Trouver les coefficients multiplicatifs représentant chacune des évolutions suivantes :

   a. $+10\,\%$ b. $+2{,}5\,\%$ c. $+115\,\%$

   d. $-22\,\%$ e. $-10{,}7\,\%$ f. $-65\,\%$

2. Pour chaque coefficient multiplicateur, retrouver l'évolution associée et le pourcentage correspondant :

   a. 1,02 b. 1,375 c. 2,1

   d. 0,15 e. 0,85 f. 0,912

Exercice 4

Des scientifiques étudient une culture de bactéries contenant deux souches qu'on nommera A et B.
Au début de l'expérience *(au temps "0")*, on dénombre 200 de bactéries de souches A et 300 bactéries de souches B.
Les scientifiques relèvent les évoluations suivantes : à chaque minute, la population des bactéries A augmente de $10\,\%$, alors que celle de la souche B diminue de 20 bactéries.

1. a. Au temps "*0 min*", quel est le pourcentage représenté par les bactéries de la souche A par rapport à l'ensemble des bactéries ?

   b. Au temps "*1 min*", quel est le pourcentage représenté par les bactéries de la souche A par rapport à l'ensemble des bactéries ?

   c. Compléter le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D
1	Temps	Population de la souche A	Population de la souche B	Population totale
2	0	200	300	
3				
4				
5				
6				
7				

2. n désigne un nombre entier naturel $(n\in\mathbb{R})$.

   On note a_n la population de bactéries de la souche A au temps "n *min*" ; ainsi, $a_0=200$.

   On note b_n la population de bactéries de la souche B au temps "n *min*" ; ainsi $b_0 = 300$.

   Compléter les pointillés ci-dessous :

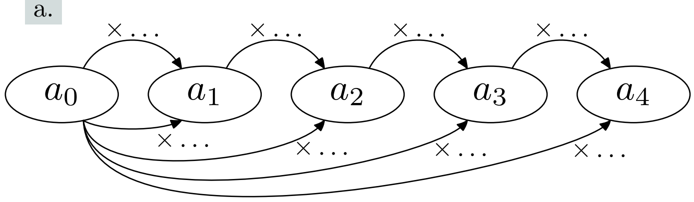
$a_1 = a_0$	$b_1 = b_0$ ....
$a_2 = a_1$	$b_2 = b_1$ ....
$a_3 = a_2$	$b_3 = b_2$ ....
$a_4 = a_3$	$b_4 = b_3$ ....

On généralise par :

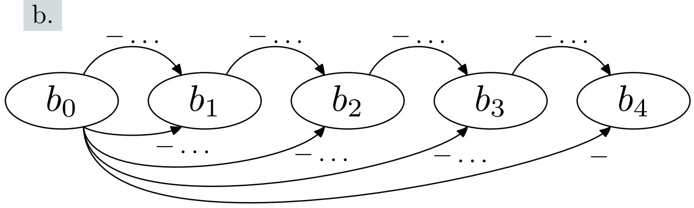
$a_{n+1} = a_n$	$b_{n+1} = b_n$ ....

3. Compléter les deux diagrammes ci-dessous :

   a.



   b.



4. Compléter les pointillées :

$a_1 = a_0$	$b_1 = b_0$ ....
$a_2 = a_0$	$b_2 = b_0$ ....
$a_3 = a_0$	$b_3 = b_0$ ....
$a_4 = a_0$	$b_4 = b_0$ ....

On généralise par :

$a_n = a_0$	$b_n = b_0$ ....

Exercice 5

1. On considère la suite de nombres ci-dessous :

$$2 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 12 \quad ; \quad 17 \quad ; \quad 23 \quad ; \quad 30$$

   a. Dans cette suite, quel est le terme qui succède à 12 ?
   b. Dans cette suite, quel est le terme qui précède 8 ?
   c. Dans cette suite quel est le rang du terme ayant 2 pour valeur ?
   d. Dans cette suite quel est le rang du terme ayant 17 pour valeur ?

2. De manière générale, on indique les termes d'une suite en utilisant en index la position du terme dans la suite *(on commence l'indéxation à 0)* :

$$u_0 \quad ; \quad u_1 \quad ; \quad u_2 \quad ; \quad u_3 \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad u_{n-1} \quad ; \quad u_n \quad ; \quad u_{n+1}$$

   a. Quel est le terme succésseur de u_2 ?
   b. Quel est le terme prédécesseur de u_4 ?
   c. Quel est le terme succésseur de u_n ?
   d. Quel est le terme succésseur de u_{n+2} ?
   e. Quel est le terme prédécesseur de u_n ?
   f. Quel est le terme prédécesseur de u_{n+2} ?

Exercice 6

On considère les suites de nombres ci-dessous :

a. $4 \;;\; 7 \;;\; 10 \;;\; 13 \;;\; 16 \;;\; 19 \;;\; 22 \;\ldots$

b. $1 \;;\; -2 \;;\; 4 \;;\; -8 \;;\; 16 \;;\; -32 \;;\; 64 \;\ldots$

c. $2 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 5 \;;\; 8 \;;\; 12 \;;\; 17 \;\ldots$

d. $0 \;;\; 1 \;;\; 4 \;;\; 9 \;;\; 16 \;;\; 25 \;;\; 36 \;\ldots$

e. $1 \;;\; 1 \;;\; 2 \;;\; 3 \;;\; 5 \;;\; 8 \;;\; 13 \;\ldots$

f. $1 \;;\; 2 \;;\; 1 \;;\; 2 \;;\; 1 \;;\; 2 \;;\; 1 \;\ldots$

Associer à chacune de cette suite une relation ci-dessous qui permet d'obtenir un terme en fonction de ses prédédecesseurs :

1. $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$
2. $\dfrac{2}{u_n} = u_{n+1}$
3. $u_n + n = u_{n+1}$
4. $-2{\times}u_n = u_{n+1}$
5. $u_n + 3 = u_{n+1}$
6. $u_n = n^2$

Exercice 7

On considère une suite (u_n) dont on connait la valeur de ses cinq premiers termes :

$$u_0=0 \quad ; \quad u_1=11 \quad ; \quad u_2=20 \quad ; \quad u_3=27 \quad ; \quad u_4=32$$

Parmi les expressions de suites ci-dessous, lesquelles permettent d'obtenir ces mêmes cinq premiers termes ?

a. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n + 11 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -u_n + 3n + 11 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n - 2n + 11 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

d. $u_n = 13{\cdot}n - 2{\cdot}n^2$

e. $u_n = -n^2 + 12{\cdot}n$

f. $u_n = 2{\cdot}n^2 + 9{\cdot}n$

Exercice 8

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison -3. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 54 et de raison $\dfrac{1}{3}$. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 9

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Exercice 10

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique ?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

Exercice 11

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Compléter les expressions suivantes :

a. $u_{12} = u_5 + \ldots$

b. $u_{57} = u_{38} + \ldots$

c. $u_3 = u_8 + \ldots$

d. $u_{23} = u_{38} + \ldots$

Exercice 12

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme 3 et de raison -2.

1. Déterminer la valeur des termes u_{12} et u_{43}.

2. Déterminer la valeur du rang n réalisant les égalités :

   a. $u_n = -21$
   b. $u_n = -57$

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{(n+2){\cdot}u_n + 1}{n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Conjecturer la nature de la suite (u_n) en justifiant votre démarche.

Exercice 14

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Exercice 15

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. $8 \;;\; 4 \;;\; 2 \;;\; 1 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{4}$

b. $1 \;;\; 3 \;;\; 9 \;;\; 18 \;;\; 54 \;;\; 162$

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique ?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

Exercice 16

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Compléter les expressions suivantes :

a. $u_7 = u_3 \times \ldots$ b. $u_{25} = u_{11} \times \ldots$

c. $u_3 = u_8 \times \ldots$ d. $u_{15} = u_{23} \times \ldots$

Exercice 17

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme $\frac{2^4}{3}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des termes u_{11} et u_{28}.

2. Pour chaque question, déterminer le rang n réalisant l'égalité :

   a. $u_n = \frac{3^8}{2^5}$ b. $u_n = \frac{3^{19}}{2^{16}}$

Exercice 18

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{3}{8}$ et de raison 2. Déterminer les six premiers termes de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

   a. Pour passer du terme v_{11} au terme v_{14}, par combien de fois multiplie-t-on par la raison ?

   b. A partir des valeurs des deux termes suivants :
   $v_{11} = \frac{4}{7} \quad ; \quad v_{14} = \frac{27}{14}$
   Déterminer la valeur du premier terme et de la raison de la suite (v_n).

3. Dans chacun des cas ci-dessous, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, déterminer son premier terme et sa raison :

   a. $w_0 = 5 \;;\; w_3 = 40$ b. $w_3 = \frac{3}{8} \;;\; w_6 = -\frac{3}{64}$

   c. $w_{124} = 2\times10^{-4} \;;\; w_{128} = \frac{1}{8}$

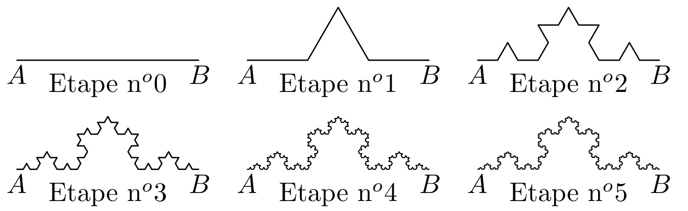
Exercice 19

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont on connait la valeur des deux termes suivants :
$u_6 = 36 \quad ; \quad u_{10} = \frac{9}{4}$

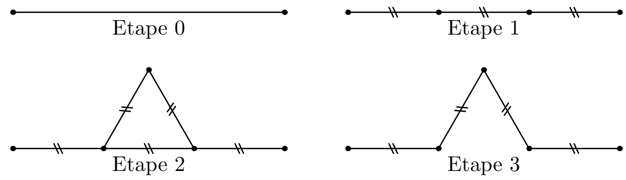
Montrer qu'il existe au moins deux suites géométriques vérifiant ces conditions.

Exercice 20

Ci-dessous sont représentés les six premiers "***flocons de Helge Von Koch***" représentant un des fractales les plus simples :



Pour passer d'une construction à la suivante, on réalise la manipulation suivante sur chaque segment :



Chaque segment est partagé en trois parties égales *(étape 1)*. On construit un triangle équilatéral sur le segment du milieu *(étape 2)*. On efface le segment du milieu *(étape 3)*.

1. a. Le passage de l'étape n°0 à l'étape n°1 fait apparaitre un triangle équilatéral. Surligner ce triangle en rouge.

   b. Combien de segment comprend la figure de l'étape n°1 ? Combien de triangles équilatéral apparaitront à l'étape n°2 ? Surligner ces triangles en rouge.

2. On note (u_n) la suite numérique dont le terme de rang n est le nombre de segments composant la figure à l'étape n$^{\text{ième}}$:

   a. Justifier par une phrase que la suite (u_n) vérifie la relation :
   $u_{n+1} = 4\cdot u_n$

   b. Exprimer le terme u_n en fonction de son rang n.

   c. Combien de segments comprend la figure de l'étape n°5 ?

3. On suppose que le segment $[AB]$ initial a pour longueur 1. On note (v_n) la suite numérique dont le terme de rang n est la longueur de la ligne polygone formant la figure à l'étape n$^{\text{ième}}$:

   a. Justifier par une phrase que la suite (v_n) vérifie la relation :
   $v_{n+1} = \frac{4}{3}\cdot v_n$

   b. Exprimer le terme v_n en fonction de son rang n.

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 9\times2^n - u_n$

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Conjecturer la nature de la suite (u_n) en justifiant votre démarche.

Exercice 22

1. Justifier brièvement que les premiers termes de la suite (u_n) présentés ci-dessous peuvent être les termes d'une suite aritmétique dont on précisera la raison :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_1 = \frac{9}{2} \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = \frac{19}{2}$

2. Justifier brièvement que les premiers termes de la suite (v_n) présentés ci-dessous peuvent être les termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison :
$v_0 = 24 \quad ; \quad v_1 = 6 \quad ; \quad v_2 = \frac{3}{2} \quad ; \quad v_3 = \frac{3}{8}$

3. Justifier brièvement que les premiers termes de la suite (w_n) ne représentent ni les premiers termes d'une suite arithmétique, ni les premiers termes d'une suite géométrique
$w_0 = 1 \quad ; \quad w_1 = 2 \quad ; \quad w_2 = 4 \quad ; \quad w_3 = 16$

Exercice 23

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on connait deux termes :
$u_4 = 12 \quad ; \quad u_{22} = -24$

   Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on connait deux termes :
$v_4 = 8 \quad ; \quad v_7 = \frac{64}{27}$

   Donner, en justifiant votre démarche, les éléments caractéristiques de cette suite.

Exercice 24

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique dont on connait les valeurs des deux termes suivants :
$u_{10} = 5 \quad ; \quad u_{16} = 14$

   Déterminer le premier terme u_0 et la raison de cette suite.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique dont on connait les valeurs des deux termes suivants :
$v_4 = 96 \quad ; \quad v_7 = \frac{3}{2}$

   Déterminer le premier terme v_0 et la raison de cette suite.

Exercice 25

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_n = n^2 + n + 2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

   Etablir que la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = \frac{1}{n^2+2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

   Etablir que la suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Exercice 26

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$v_n = u_n + 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$

   b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

   c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n).

Exercice 27

Soit (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = a \cdot u_n + b \qquad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1)$$

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Exercice 28

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n + 6}{u_n - 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

   a. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

   b. Montrer que : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{1}{4}$

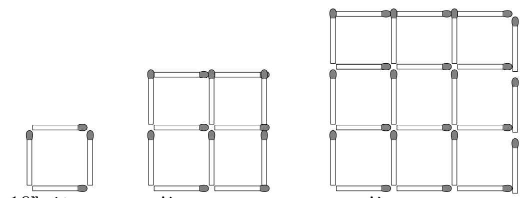
   c. En déduire la nature de la suite (v_n) ainsi que la formule explicite déterminant le terme de rang n en fonction de n.

3. a. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction du terme v_n.

   b. En déduire la formule explicite définissant les termes de (u_n) en fonction de n.

Exercice 29

On considère les constructions suivantes :



1^{er} étape $\quad 2^{\text{ième}}$ étape $\quad 3^{\text{ième}}$ étape

On note (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Conjecturer une relation de récurrence entre un terme de la suite (u_n) et de son prédécesseur.