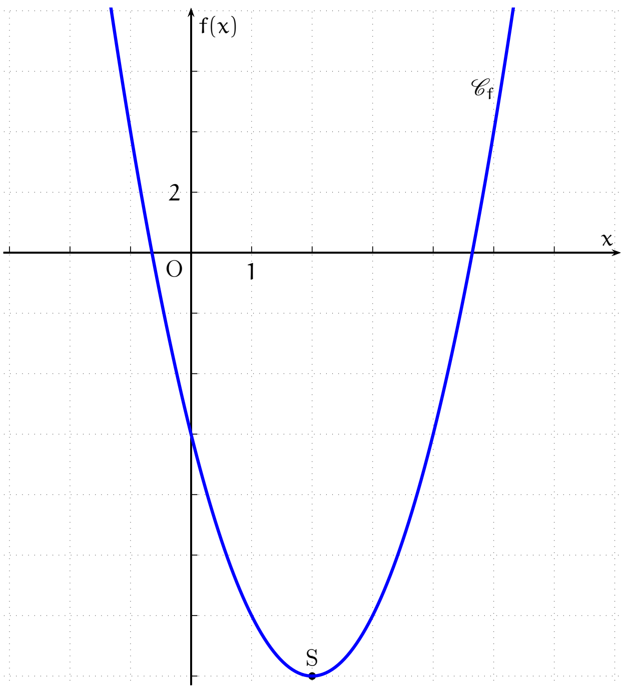
Forme canonique

Activité d'approche

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x - 6$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



1. Lecture graphique

   a. Lire les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathscr{C}_f$.

   b. La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, appelée forme canonique de la fonction f et cette écriture est unique. Développer cette forme.

   c. En déduire les valeurs de a, α et β, puis la forme canonique de f.

   d. Que peut-on dire des valeurs de α et β trouvées ?

2. Sans utiliser la courbe représentative de la fonction f, on peut mener le raisonnement suivant pour déterminer la forme canonique :

   a. Trouver le nombre réel d tel que $2x^2 - 8x - 6 = 2\left(x^2 - 4x - d\right)$.

   b. En développant $(x-2)^2$, déterminer e tel que $x^2 - 4x - d = (x-2)^2 + e$.

   c. En déduire la forme canonique de f.

3. Reprendre la démarche précédente pour déterminer la forme canonique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^2 + 8x + 10.$$

4. Dans le cas général, une fonction f du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$

a. Développer $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

b. En déduire que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + d$ où d est un nombre réel que l'on déterminera.

c. On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Calculer $f(\alpha)$.

d. Conclure sur la forme canonique de f.