2nd degré - Fiche d'exercices 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation algébrique :

$$f(x) = 4x^2 + 4x - 3$$

1. a. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = (2x-1)(2x+3)$$

b. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = (2x+1)^2 - 4$$

2. Pour chacune des questions suivantes, utiliser la forme la plus adaptée :

a. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

b. Sachant que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul, établir que la fonction f est minorée par -4.

c. Déterminer le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 5$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = 6x^2 - 9x - 6$$

1. a. Montrer que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = 6\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$$

b. En déduire que la fonction f est minorée par $-\dfrac{75}{8}$.

c. Soit a et b deux nombres réels, établir l'implication suivante :
$$a < b < \frac{3}{4} \implies f(a) > f(b)$$
(Cette implication établit que, sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{4}\right]$, la fonction f est décroissante.)

2. a. Déduire de la question 1. a. la factorisation suivante :
$$f(x) = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$$

b. Donner les antécédents de 0 par la fonction f.

c. Déterminer la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle la fonction f est strictement positive.

Exercice 3

Donner la forme canonique de chacun des trinômes du second degré ci-dessous :

a. $2x^2 + 8x - 6$ b. $3x^2 + 3x + 6$

c. $9x^2 + 18x + 27$ d. $5x^2 + 10x + 2$

e. $2x^2 + 5x - 4$ f. $\sqrt{2}x^2 - 3x + 1$

Exercice 4

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ dont l'image de $x \in \mathbb{R}$ est définie par la relation :

$$f(x) = 8x^2 - 2x + 1$$

1. Donner la forme canonique de la fonction f.

2. Etablir que la fonction f est minorée par $\dfrac{7}{8}$.

3. a. Etablir, sans justification, le tableau de variation de la fonction f.

b. En déduire que la fonction f n'admet pas de zéro sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 + 4x - 5 = 0$ b. $2x^2 - 13x + 15 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$ d. $x^2 + 5x + 2 = 0$

e. $-3x^2 + 6x - 2 = 0$ f. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Exercice 6

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2 - 5x + 6 = 0$ b. $3x^2 - 24x + 48 = 0$

c. $x(x-2)(x+1) = (x-2)(-7-3x)$

Exercice 7

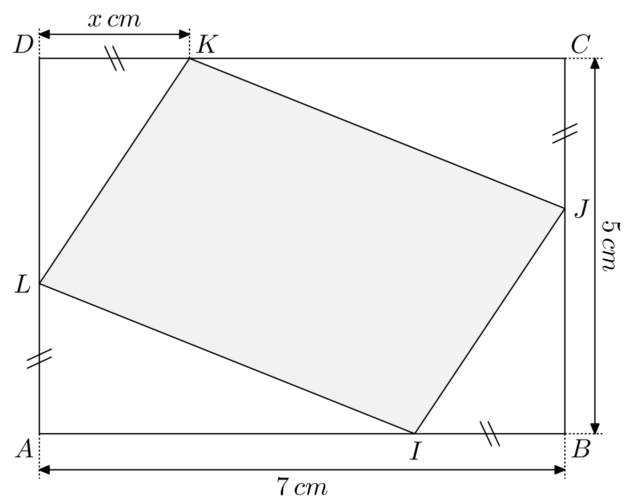
Déterminer les racines, sous forme simplifiée, des polynômes suivants :

a. $2x^2 - 3x - 9$ b. $5x^2 - 8x + 5$

c. $2x^2 - 8x + 8$ d. $x^2 + 2x - 1$

Exercice 8

On considère la figure ci-dessous :



Quel doit-être la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire de $25\,cm^2$?

Exercice 9

Factoriser les expressions suivantes :

a. $5x^2 - x - 4$ b. $-2x^2 - 3x - 1$

c. $-x^2 + 2x - 1$ d. $4x^2 + x - 3$

e. $4x^2 + 4x - 5$ f. $x^2 - 2x - 4$

Exercice 10

1. Factoriser les expressions suivantes :

a. $2x^2 - 3x - 2$ b. $12x^2 - 12x + 3$

2. Simplifier la fraction rationnelle suivante :
$$\dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$$

Exercice 11

Simplifiez l'expression des fractions rationnelles ci-dessous :

a. $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$ b. $\dfrac{6x^2-5x+1}{1-4x^2}$

c. $\dfrac{3x^2-6x-6}{x^2-\big(\sqrt{3}+2\big)x+\big(\sqrt{3}+1\big)}$

Exercice 12

On considère la fonction polynome P de degré 3 définie par :
$P(x)=3x^3+x^2-8x+4$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c tel que :
$P(x)=(x+2)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$

2. En déduire l'ensemble des zéros du polynôme P.

Exercice 13

Etablir le tableau de signes des polynomes du second degré suivant :

a. x^2+3x+4 b. $-8x^2+32x+32$

c. $4x^2+3x-10$ d. $-5x^2-3x-1$

e. $4x^2-16x+16$ f. $2x^2+11x+5$

Exercice 14

1. a. Etablir que le polynôme $P(x)=2x^2-x+1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire le signe du polynôme :
$Q(x)=(2x^2-x+1)^2+3{\cdot}(2x^2-x+1)+1$

2. Justifier que l'équation ci-dessous n'admet aucune solution :
$4x^4-4x^3+11x^2-5x+5=0$

Exercice 15

On considère le polynôme du troisième degré :

$\mathcal{P}=3x^3+5x^2-5x+1$

On sait que le polynôme P admet une factorisation de la forme :
$\mathcal{P}=\big(3x-1\big)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$

1. Déterminer les valeurs de a, b, c vérifiant cette factorisation.

2. En déduire l'ensemble des racines du polynôme $\mathcal{P}$.

3. Dresser le tableau de signe de $\mathcal{P}$.