Suites explicites et récurrentes

Exercice 1

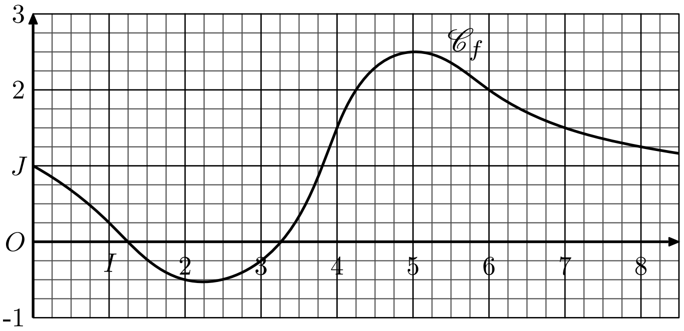
On considère l'algorithme suivant :

[14] Pour i allant de 0 à 5 $a \leftarrow i\times(i-1)$ Fin Pour

1. Lors de l'exécution pas à pas de cet algorithme, donner les valeurs prises par la variable `a`.
2. Donner l'expression d'une suite (u_n) dont les six premiers termes sont les valeurs affichées par l'algorithme.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



On définie la suite (u_n) par la relation :

$u_n = f(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\dfrac{3}{2}$.
2. Déterminer la valeur des termes :

   u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6

Exercice 3

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2{\cdot}n^2 - n + 1$ b. $v_n = \dfrac{2{\cdot}n+1}{2-3{\cdot}n}$

c. $w_n = \sqrt{3n+25}$ d. $x_n = 3{\cdot}\big[1+(-1)^n\big]+2$

Exercice 4

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

   $u_n = 5+2\times n$ pour tout entier naturel n.

   a. Exprimer la valeur u_{n-3} en fonction de n.

   b. Donner la forme simplifiée de $u_{n-3}+u_3$.

   c. Donner la forme simplifiée de $u_{n-5}+u_5$.

   d. Soit k et n deux entiers tels que $k\leqslant n$. Montrer que u_k+u_{n-k} a sa valeur indépendante de k.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :

   $v_n = 2n^2-3n+2$ pour tout entier naturel n.

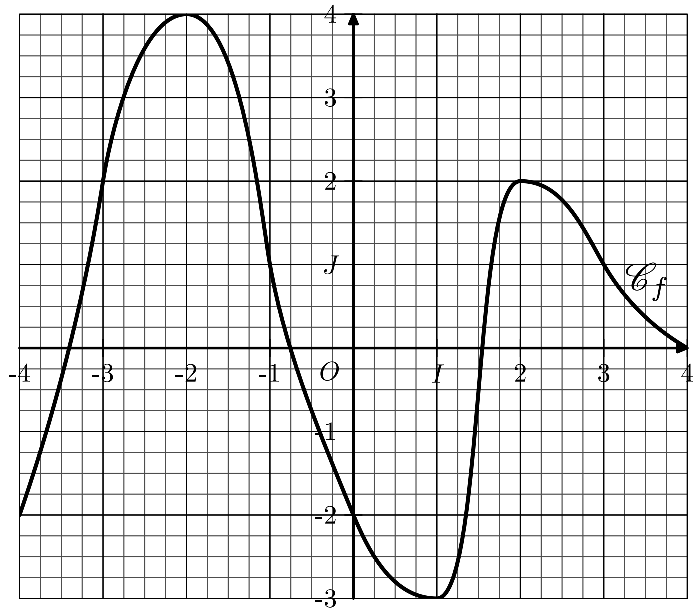
   On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) :

   a. Donner l'expression du terme v_{n+1} en fonction de n.

   b. Etudier la valeur de $v_{n+1}-v_n$ en fonction de n.

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$:



On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

$u_{n+1} = f(u_n)$; $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

$u_0 = -1$; $v_0 = -4$

Déterminer les 100 premiers termes de chacune de ces deux suites.

Exercice 6

1. On définie la suite par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

   $u_0=5$; $u_{n+1}=2{\cdot}u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

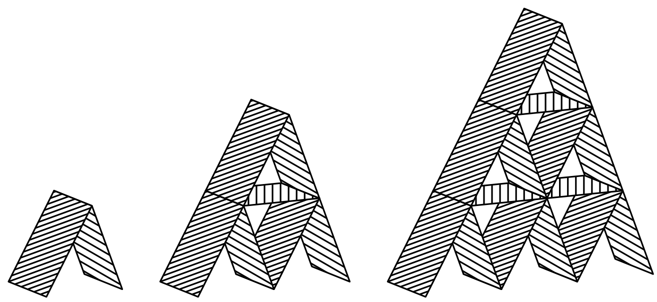
2. On définie la suite par récurrence $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation :

   $v_1=-2$; $v_{n+1}=\dfrac{1-v_n}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

   Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 7

On considère la construction d'un château de cartes :



u_0 u_1 u_2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n.

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et du rang

n.

3. A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes ?

Exercice 8

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b. $u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. $u_0 = 3 \quad ; \quad u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 2 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d. $u_0 = -1 \quad ; \quad u_n = \dfrac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 9

On considère l'algorithme suivant :

[15] $a \leftarrow 2$ Pour i allant de 0 à 5 $a \leftarrow a \times 2$ Fin Pour

1. Lors de son exécution pas à pas, indiquer les différentes valeurs prises par la variable a

2. Parmi les exrpressions choisies qu'elle(s) peuvent être l'expression d'une suite (u_n) afin que ses six premiers termes soient les valeurs prises par la variable a lors de l'exécution de l'algorithme précédent :

a. $u_n = 2 \cdot n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b. $u_n = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c. $u_n = 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 \cdot u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

e. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 \cdot u_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

f. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 \cdot u_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Exercice 10

On considère l'algorithme suivant :

[14] $a \leftarrow -1$ Pour i allant de 0 à 4 $a \leftarrow a \times 2 - i + 1$ Fin Pour

1. Donner les différentes valeurs prises par la variable a lors d'une exécution pas à pas de cet algorithme.

2. Donner l'expression d'une suite dont les cinq premiers termes soient les différentes valeurs prises par la variable a prises lors de l'exécution de cet algorithme.

Exercice 11

Dans chaque cas, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

a. $u_n = \dfrac{2n^2 + n + 5}{n + 1} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b. $u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \cdot u_n + 3 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c. $u_0 = -1 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + n - 2 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d. $u_0 = 2 \ ; \ u_1 = 3 \ ; \ u_{n+1} = u_n + 2 \cdot u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

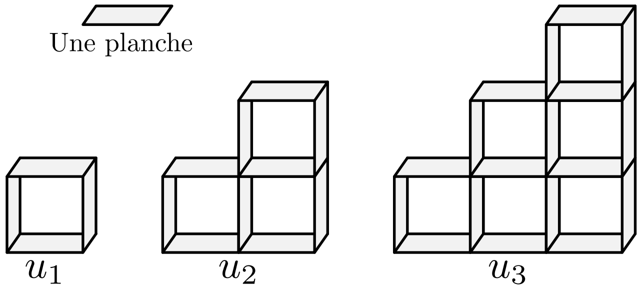
Exercice 12

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$$v_0 = -3 \quad ; \quad v_{n+1} = n - 2 \cdot v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 13

On construit successivement un objet comme le représente le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n non-nul, on note u_n le nombre de planches nécessaires pour construire la figure à l'étape n.

Donner une relation de récurrence caractérisant la suite (u_n).

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. a. Déterminer les cinq premiers termes de (u_n).

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de (u_n)

2. Montrer que la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison 3 vérifie la relation :
$$v_{n+1} = 2 \cdot v_n + 3^n.$$

Exercice 15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :
$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Montrer qu'on a la relation suivante :
$$u_{n+2} = u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3. Que peut-on dire des termes de cette suite ?

4. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant la relation suivante :
$$u_n = a \cdot \left[1 - (-1)^n\right] + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$