RÉSOUDRE UNE INÉQUATION DE DEGRÉ 2

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 38$

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice graphique, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.

2. Démontrer algébriquement cette conjecture.

Propriété *Résoudre graphiquement une inéquation du second degré*

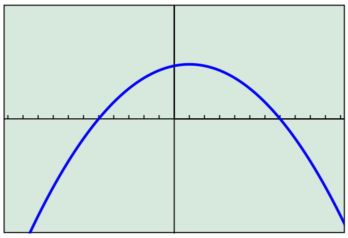
Soit f une fonction du second degré définie sur un domaine de définition $\mathscr{D}$ et qui à tout $x \in \mathscr{D}$ associe un nombre $f(x)$.
Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ *(resp.* $f(x) \geqslant 0$*)* sont **tous** les nombres x du domaine D qui ont une image **négative** *(resp. positive)*. Graphiquement, il s'agit de trouver toutes les abscisses des points de la courbe caractéristique $\mathcal{C}_f$ situées sous *(resp. au-dessus de)* l'axe des abscisses.

Pour résoudre une inéquation du second degré :

1 - On se ramène à une inéquation avec second membre nul.
2 - Graphiquement, on lit **sur l'axe des abscisses** l'ensemble des nombres satisfaisants l'inéquation posée.
3 - Algébriquement :
a) on résout l'équation du type $ax^2 + bx + c = 0$;
b) on dresse le tableau de signes de $ax^2 + bx + c$;
c) on détermine l'ensemble des solutions de l'inéquation demandée.

Solution

1. D'abord, on se ramène à une inéquation à second membre nul.
Résoudre $f(x) \leqslant 3$, soit $-x^2 + 2x + 38 \leqslant 3$ équivaut à résoudre l'inéquation $-x^2+2x+35 \leqslant 0$ (on soustrait 3 dans chaque membre).



Sur la calculatrice graphique, on trace la courbe caractéristique de la fonction définie par l'expression $-x^2+2x+35$ et on lit l'ensemble des nombres x ayant, ici, une image négative par cette fonction.
Ici, on conjecture la réunion d'intervalles $]-\infty; -5] \cup [7; +\infty[$.

2. Algébriquement, on résout l'équation $-x^2 + 2x + 35 = 0$ (pour trouver les racines éventuelles).
Le discriminant Δ vaut $= \Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 35 = 4 + 140 = 144$.

$\Delta > 0$, l'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{144}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-14}{-2} = 7$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{144}}{2 \times (-1)} = -5$

On dresse alors le tableau de signes de $-x^2 + 2x + 35$:

x	$-\infty$		-5		7		$+\infty$
$-x^2+2x+35$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + 2x + 38 \leqslant 3$, équivalent à celui de l'inéquation $-x^2 + 2x + 35 \leqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-\infty; -5] \cup [7; +\infty[$.
La conjecture est donc confirmée.

ATTENTION !

Sens strict !

Si l'inéquation à résoudre avait été $-x^2 + 2x + 35 < 0$, il aurait fallu **exclure les racines** du polynômes et l'ensemble des solutions aurait été : $\mathscr{S} =]-\infty; -5[\cup]7; +\infty[$.