

# Second Degré.

## 1 Fonctions polynômes de degré 2.

### Définition 1

- Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  qui peut être mise sous la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b, c$  sont trois nombres réels avec  $a$  non nul.
- L'expression  $ax^2 + bx + c$  est la **forme développée** de  $f(x)$ .
- Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée **trinôme** (du second degré).
- On appelle **parabole** la représentation graphique d'un trinôme.

### Exemple 2

Les fonctions suivantes sont-elles des trinômes ?

1.  $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ . Oui avec  $a = 2$ ,  $b = 3$  et  $c = 1$
2.  $h(x) = 3(x - 1)^2 + 1$ . Oui avec  $a = 3$ ,  $b = -6$  et  $c = 4$ .
3.  $i(x) = 4(x - 1)(x + 2)$ . Oui avec  $a = 4$ ,  $b = 4$  et  $c = -8$
4.  $j(x) = 5x + 3$ . Non
5.  $j(x) = x^3 + 4x^2 + 1$ . Non

### Théorème 3 (Variations d'un trinôme du second degré)

Un trinôme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  admet pour variations :

— Si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\beta$	$+\infty$

— Si  $a < 0$

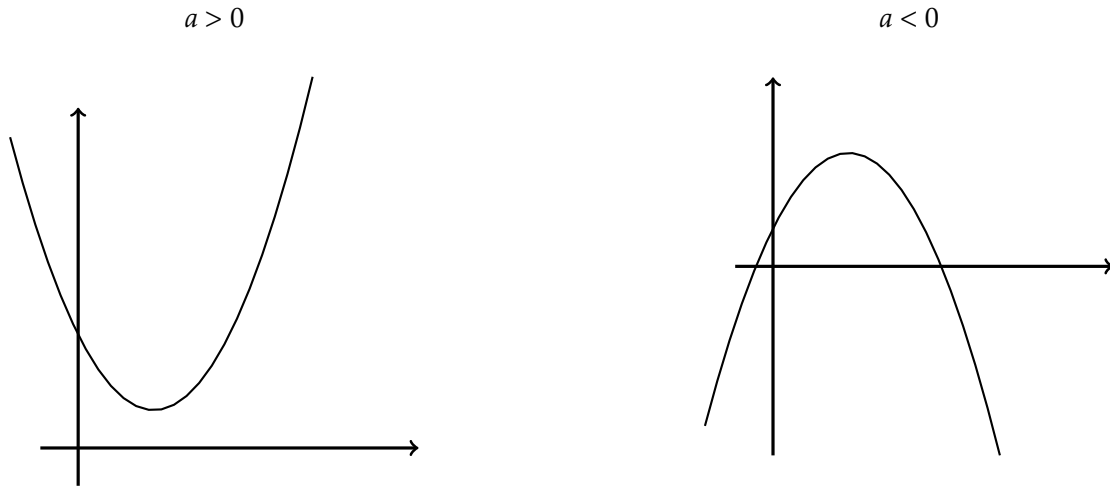
$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\beta$	$-\infty$

On peut calculer les coordonnées  $(\alpha, \beta)$  du sommet  $S$  de la parabole grâce aux formules

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

De plus,  $f$  s'écrit  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Cette écriture est la **forme canonique** du trinôme.

### Exemple 4



### Exemple 5

Pour chacun des trinômes  $P(x) = 2x^2 + 4x - 3$  et  $Q(x) = -(x - 2)^2$  :

1. Identifier les coefficients  $a, b, c$ .
2. Dresser le tableau de variation.

Pour  $P$ ,  $a = 2$ ,  $b = 4$  et  $c = -3$ ,  $\alpha = \frac{-4}{4} = -1$ ,  $\beta = 2 \times (-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$  Pour  $Q$ ,  $a = -1$ ,  $b = 4$  et  $c = -4$ .  
 $\alpha = 2$  et  $\beta = 0$  (se lit directement).

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-5$	$+\infty$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$Q(x)$	$-\infty$	$0$	$-\infty$

## 2 Racines et factorisation.

#### Définition 6

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme du second degré et  $\mathcal{P}$  sa représentation graphique.

On appelle **racines** de  $f$  les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ . Ce sont les abscisses des points d'intersection entre  $\mathcal{P}$  et l'axe des abscisses.

### Exemple 7

Les fonctions suivantes admettent-elles des racines? Si oui, combien? Et quelles sont-elles?

1.  $f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$ .  
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$  ou  $x - 2 = 0$ .  $-1$  et  $2$  sont les seules racines.
2.  $g(x) = 2(x - 3)^2$ .  
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ .  $3$  est la seule racine.
3.  $h(x) = x^2 + 3$ .  
 $x^2 + 3 \geq 3 > 0$  pour tout nombre  $x$  et  $h$  n'admet pas de racine.

**Proposition 8**

Soit  $f(x)$  un trinôme du second degré et  $\mathcal{P}$  sa représentation graphique. Trois cas peuvent se produire :

- $f$  admet 2 racines, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$  coupe l'axe des abscisses en 2 points.
- $f$  admet une racine, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$  est tangente à l'axe des abscisses (1 point d'intersection).  
Dans ce cas, on dit que la racine est une **racine double**.
- $f$  n'admet pas de racine, c'est-à-dire  $\mathcal{P}$  ne coupe pas l'axe des abscisses.

**Définition 9 (Discriminant)**

Soit  $f(x)$  un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Exemple 10**

Calculer les discriminants des trinômes suivants :

1. Soit  $i(x) = x^2 - 4x + 3$ .  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$ .
2. Soit  $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$ .  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$ .
3. Soit  $k(x) = -3x^2 + 12x - 15$ .  $\Delta = (12)^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144 - 180 = -36$ .

**Théorème 11 (Central)**

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un trinôme.

- si le discriminant  $\Delta$  de  $f(x)$  est strictement positif alors  $f(x)$  admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on peut factoriser  $f(x)$  en  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

- si le discriminant de  $f(x)$  est nul alors  $f(x)$  admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} (= \alpha)$$

et on peut factoriser  $f(x)$  en  $f(x) = a(x - x_0)^2$ .

- si le discriminant de  $f(x)$  est strictement négatif alors  $f(x)$  ne possède pas de racine et on ne peut pas factoriser  $f(x)$  en un produit de facteurs de degré 1.

**Exemple 12**

Calculer les racines (éventuelles) des trinômes de l'exemple 10, puis factoriser ces trinômes (si possible).

1. Soit  $i(x) = x^2 - 4x + 3$ .  $\Delta = 4 > 0$ .  $x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2} = 1$  et  $x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2} = 3$ .  
 $i(x) = (x - 1)(x - 3)$  est la forme factorisée de  $i(x)$ .
2. Soit  $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$ .  $\Delta = 0$ .  $x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$ .  
 $j(x) = 2(x - 1)^2$  est la forme factorisée de  $j(x)$ .
3. Soit  $k(x) = -3x^2 + 12x - 15$ .  $\Delta = -36 < 0$ .  $k$  n'admet pas de racine.  
 $k(x)$  n'a pas de forme factorisée.

