

# 1- Etude de $(u_n)$

La suite  $(v_n)$  est définie par la formule explicite :

$$u_n = f(n)$$

Où  $f$  est une fonction dont l'image de  $x$  est définie par la relation :

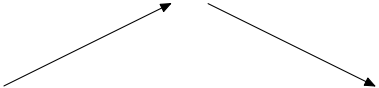
$$f(x) = -2x^2 - 3x + 2$$

# 1- Etude de $(u_n)$

Cette fonction est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est négatif. De plus, le sommet de la parabole a pour abscisse :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times (-2)} = -\frac{3}{4}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

	— $-\frac{3}{4}$ +
Variation de	

Ainsi, la fonction  $f$  est décroissante sur  $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$  ; on en déduit que la suite  $(u_n)$  est décroissante sur  $\mathbb{N}$

## 2- Etude de $(v_n)$

La suite  $(v_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par la formule explicite :

$$v_n = g(n)$$

Où  $g$  est une fonction dont l'image de  $x$  est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x + 5}$$

## 2- Etude de $(v_n)$

La fonction  $g$  a pour ensemble de définition l'ensemble

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2} \right\}.$$

Pour étudier la monotonie de la fonction  $g$ , nous allons étudier le signe de la dérivée de la fonction  $g$ .

La fonction  $g$  est le quotient des deux fonctions  $u$  et  $v$  définie par :

$$u(x) = 2x^2 + 1 \qquad v(x) = 2x + 5$$

## 2- Etude de $(v_n)$

On obtient par dérivation du quotient de deux fonctions, l'expression suivante de  $g'(x)$  :

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x(2x+5) - (2x^2+1) \times 2}{(2x+5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{8x^2 + 20x - (4x^2 + 2)}{(2x+5)^2} = \frac{8x^2 + 20x - 4x^2 - 2}{(2x+5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^2 + 20x - 2}{(2x+5)^2} = 2 \frac{2x^2 + 10x - 1}{(2x+5)^2}$$

Il est clair que le signe de  $g'(x)$  ne dépend que de son numérateur.

## 2- Etude de $(v_n)$

Etudions le signe de  $2x^2 + 10x - 1$ . Ce polynôme a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 100 + 8 = 108$$

Ainsi, on obtient les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{108}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{108}}{4}$$

A l'aide de la calculatrice, on remarque que :

$$x_1 < -\frac{5}{2} < 0 < x_2 \text{ et } x_2 \simeq 0,098$$



## 2- Etude de $(v_n)$

On obtient le tableau de signe suivant de la dérivée  $g'$  :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$-\frac{5}{2}$	$x_2$	$+\infty$	
$2x^2 + 10x - 1$	+	0	-	0	+	
$g'(x)$	+	0	-	-	0	+

## 2- Etude de $(v_n)$

Ainsi, on obtient le tableau de variation de la fonction  $g$  :

	—	1	$-\frac{5}{2}$	2	+
Variation de					

On en déduit que la fonction  $g$  est croissante sur  $\left[ x_1 ; +\infty \right[$ . Hors,  $x_1 \simeq 0,098$ .

On en déduit que la suite  $(v_n)$  est croissante à partir du rang 1.