1- Etude de (u_n)

La suite (v_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = f(n)$$

Où f est une fonction dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = -2x^2 - 3x + 2$$

1- Etude de (u_n)

Cette fonction est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est négatif. De plus, le sommet de la parabole a pour abscisse :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times (-2)} = -\frac{3}{4}$$

On obtient le tableau de variation suivant :

	$-$	$-\frac{3}{4}$	$+$
Variation de	$\nearrow$		$\searrow$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $\left[-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$; on en déduit que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

2- Etude de (v_n)

La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par la formule explicite :

$$v_n = g(n)$$

Où g est une fonction dont l'image de x est définie par la relation :

$$g(x) = \frac{2x^2+1}{2x+5}$$

2- Etude de (v_n)

La fonction g a pour ensemble de définition l'ensemble
$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{2} \right\}$.

Pour étudier la monotonie de la fonction g, nous allons étudier le signe de la dérivée de la fonction g.

La fonction g est le quotient des deux fonctions u et v définie par :

$$u(x) = 2x^2 + 1 \qquad v(x) = 2x + 5$$

2- Etude de (v_n)

On obtient par dérivation du quotient de deux fonctions, l'expression suivante de $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x(2x+5) - (2x^2+1) \times 2}{\left(2x+5\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{8x^2 + 20x - (4x^2+2)}{\left(2x+5\right)^2} = \frac{8x^2 + 20x - 4x^2 - 2}{\left(2x+5\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x^2 + 20x - 2}{\left(2x+5\right)^2} = 2\frac{2x^2 + 10x - 1}{\left(2x+5\right)^2}$$

Il est clair que le signe de $g'(x)$ ne dépend que de son numérateur.

2- Etude de (v_n)

Etudions le signe de $2x^2 + 10x - 1$. Ce polynôme a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 100 + 8 = 108$$

Ainsi, on obtient les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{108}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{108}}{4}$$

A l'aide de la calculatrice, on remarque que :

$$x_1 < -\frac{5}{2} < 0 < x_2 \text{ et } x_2 \simeq 0,098$$

2- Etude de (v_n)

On obtient le tableau de signe suivant de la dérivée g' :

x	$-\infty$		x_1		$-\dfrac{5}{2}$		x_2		$+\infty$
$2x^2+10x-1$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

2- Etude de (v_n)

Ainsi, on obtient le tableau de variation de la fonction g :

	$-$		1		$-\frac{5}{2}$		2		$+$
Variation de		↗		↘	‖	↘		↗	

On en déduit que la fonction g est croissante sur $\left[x_1\,;\,+\infty\right[$. Hors, $x_1 \simeq 0,098$.

On en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ est croissante à partir du rang 1.