Dérivation

1 Tangentes et nombres dérivés.

1.1 Tangente à un graphe.

Définition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique. La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite passant par A la plus proche de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de a.

Exemple 2
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ admet une tangente au point $A(1,1)$ dont le coefficient directeur vaut 2.

1.2 Nombre dérivé.

Définition 3
On dit que f est **dérivable en a** si son graphe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point $A(a, f(a))$. On appelle alors **nombre dérivé** et on note $\mathbf{f'(a)}$ le coefficient directeur de cette tangente.

Exemple 4
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

1.3 Équation d'une tangente.

Théorème 5
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. La tangente $T_f(a)$ de f en $A(a, (f(a))$ a pour équation

$$T_f(a) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 6
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est dérivable en 1, $T_f(1)$ a pour équation

$$T_f(1) : y = 2(x-1) + 1$$

Définition 7
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable sur I** si pour tout réel a dans I, f est dérivable en a. On appelle alors fonction dérivée de f et on note $f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$

Exemple 8
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

2 Calcul de dérivée.

2.1 Fonctions de référence.

Fonction f	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée f'
Fonction constante : $f(x) = k, k$ réel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$, n entier naturel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables.

Proposition 9
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

f	f'
$u + v$	$u' + v'$
λu	$\lambda u'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Toutes ces fonctions sont dérivables sur I sauf les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ qui sont dérivables seulement où v ne s'annule pas.

Exemple 10

1. $(5)' = 0$
2. $(3x - 7)' = 3$
3. $(x^7)' = 7x^6$
4. $(2x^3 - x)' = (2x^3)' + (-x)' = 2(x^3)' - (x)' = 2 \times 3x^2 - 1$
5. $(4x^3 + 3x^2 + 5x + 14)' = 12x^2 + 6x + 5$
6. $(\sqrt{x}(5x + 1))' = (\sqrt{x})'(5x + 1) + \sqrt{x}(5x + 1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x + 1) + 5\sqrt{x}$
7. $(\frac{1}{x^3 + x})' = -\frac{(x^3 + x)'}{(x^3 + x)^2} = -\frac{3x^2 + 1}{(x^3 + x)^2}$
8. $\frac{x^2 + 3x + 7}{7x + 1} = \frac{(x^2 + 3x + 7)'(7x + 1) - (x^2 + 3x + 7)(7x + 1)'}{(7x + 1)^2} = \frac{(2x + 3)(7x + 1) - (x^2 + 3x + 7) \times 7}{(7x + 1)^2}$

3 Signe de la dérivée et sens de variation.

Théorème 11
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout x de I, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
Pour tout x de I, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.
Pour tout x de I, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I.
Pour tout x de I sauf un nombre fini $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est strictement croissante sur I.
Pour tout x de I sauf un nombre fini $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

Exemple 12
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$ par $f(x) = -2x^3 - 1,5x^2 + 18x + 26$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3;3]$.
2. En déduire les extremums de la fonction f et préciser en quelles valeurs elles sont atteintes.

1. On dérive la fonction f, $f'(x) = -6x^2 - 3x + 18$.
   $f'(x)$ est une fonction trinôme du second degré, avec $a = -6$, $b = -3$ et $c = 18$.
   $\Delta = (-3)^2 - 4(-6)(18) = 441 = 21^2$, $x_1 = \dfrac{3-21}{-12} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+21}{-12} = -2$.
   On dresse alors le tableau de signe de f et on déduit les variations de f :

x	-3		-2		$\frac{3}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	12.5	$\searrow$	0	$\nearrow$	42.875	$\searrow$	12.5

2. Sur $(-3;3]$, 0 est le minimum de la fonction f atteint pour $x = -2$. 42.875 est le maximum de la fonction f atteint pour $x = \dfrac{3}{2}$.