

Second Degré.

1 Fonctions polynômes de degré 2.

Définition 1

- Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction f définie sur \mathbb{R} qui peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois nombres réels avec a non nul.
- L'expression $ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de $f(x)$.
- Une fonction polynôme de degré 2 est aussi appelée **trinôme** (du second degré).
- On appelle **parabole** la représentation graphique d'un trinôme.

Exemple 2

Les fonctions suivantes sont-elles des trinômes ?

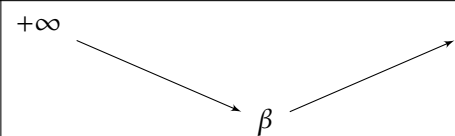
1. $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Oui avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = 1$
2. $h(x) = 3(x - 1)^2 + 1$. Oui avec $a = 3$, $b = -6$ et $c = 4$.
3. $i(x) = 4(x - 1)(x + 2)$. Oui avec $a = 4$, $b = 4$ et $c = -8$
4. $j(x) = 5x + 3$. Non
5. $j(x) = x^3 + 4x^2 + 1$. Non

Théorème 3 (Variations d'un trinôme du second degré)

Un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour variations :

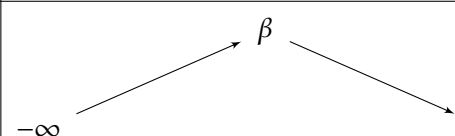
— Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$



— Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

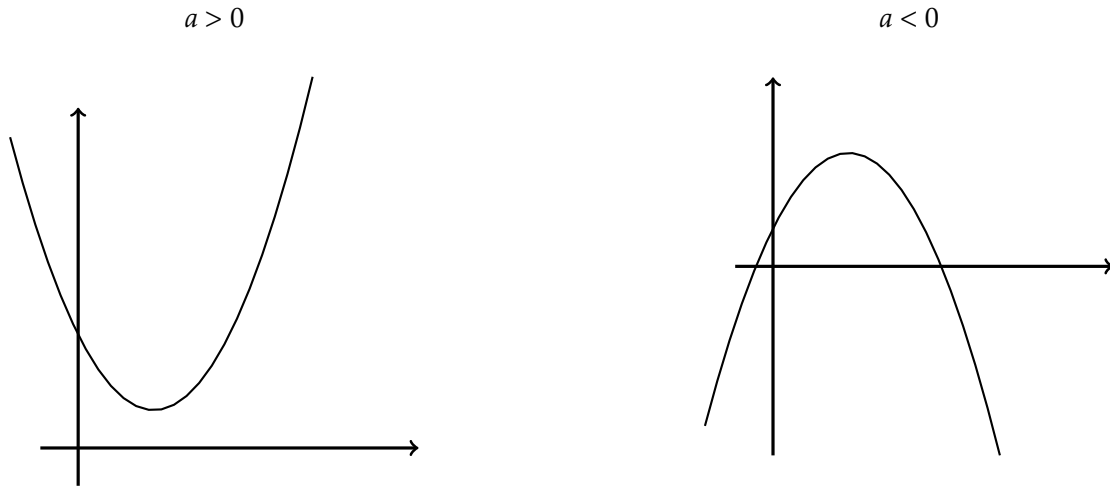


On peut calculer les coordonnées (α, β) du sommet S de la parabole grâce aux formules

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = f(\alpha)$$

De plus, f s'écrit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est la **forme canonique** du trinôme.

Exemple 4



Exemple 5

Pour chacun des trinômes $P(x) = 2x^2 + 4x - 3$ et $Q(x) = -(x - 2)^2$:

1. Identifier les coefficients a, b, c .
2. Dresser le tableau de variation.

Pour P , $a = 2$, $b = 4$ et $c = -3$, $\alpha = \frac{-4}{4} = -1$, $\beta = 2 \times 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$ Pour Q , $a = -1$, $b = 4$ et $c = -4$.
 $\alpha = 2$ et $\beta = 0$ (se lit directement).

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$Q(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

2 Racines et factorisation.

Définition 6

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré et \mathcal{P} sa représentation graphique.

On appelle **racines** de f les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont les abscisses des points d'intersection entre \mathcal{P} et l'axe des abscisses.

Exemple 7

Les fonctions suivantes admettent-elles des racines ? Si oui, combien ? Et quelles sont-elles ?

1. $f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$.
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$. -1 et 2 sont les seules racines.
2. $g(x) = 2(x - 3)^2$.
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$. 3 est la seule racine.
3. $h(x) = x^2 + 3$.
 $x^2 + 3 \geq 3 > 0$ pour tout nombre x et h n'admet pas de racine.

Proposition 8

Soit $f(x)$ un trinôme du second degré et \mathcal{P} sa représentation graphique. Trois cas peuvent se produire :

- f admet 2 racines, c'est-à-dire \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses en 2 points.
- f admet une racine, c'est-à-dire \mathcal{P} est tangente à l'axe des abscisses (1 point d'intersection).
Dans ce cas, on dit que la racine est une **racine double**.
- f n'admet pas de racine, c'est-à-dire \mathcal{P} ne coupe pas l'axe des abscisses.

Définition 9 (Discriminant)

Soit $f(x)$ un trinôme du second degré dont la forme développée réduite est $f(x) = ax^2 + bx + c$. On appelle **discriminant** de ce trinôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple 10

Calculer les discriminants des trinômes suivants :

1. Soit $i(x) = x^2 - 4x + 3$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$.
2. Soit $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$.
3. Soit $k(x) = -3x^2 + 12x - 15$. $\Delta = (12)^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144 - 180 = -36$.

Théorème 11 (Central)

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme.

- si le discriminant Δ de $f(x)$ est strictement positif alors $f(x)$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et on peut factoriser $f(x)$ en $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- si le discriminant de $f(x)$ est nul alors $f(x)$ admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} (= \alpha)$$

et on peut factoriser $f(x)$ en $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- si le discriminant de $f(x)$ est strictement négatif alors $f(x)$ ne possède pas de racine et on ne peut pas factoriser $f(x)$ en un produit de facteurs de degré 1.

Exemple 12

Calculer les racines (éventuelles) des trinômes de l'exemple 10, puis factoriser ces trinômes (si possible).

1. Soit $i(x) = x^2 - 4x + 3$. $\Delta = 4 > 0$. $x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2} = 3$.
 $i(x) = (x - 1)(x - 3)$ est la forme factorisée de $i(x)$.
2. Soit $j(x) = 2x^2 - 4x + 2$. $\Delta = 0$. $x_0 = \frac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$.
 $j(x) = 2(x - 1)^2$ est la forme factorisée de $j(x)$.
3. Soit $k(x) = -3x^2 + 12x - 15$. $\Delta = -36 < 0$. k n'admet pas de racine.
 $k(x)$ n'a pas de forme factorisée.

