

Exercice 1

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n)

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

Calculer les 4 premiers termes de la suite (v_n) .

3. Faire une conjecture quant à l'égalité des suites (u_n) et (v_n) .

4. a. Donner en fonction de n , la valeur de :

$$v_{n+1} - \frac{1}{3}v_n$$

- b. En déduire l'égalité des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot u_{n-1} + \frac{6}{n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

1. a. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

- b. Faire une conjecture sur la nature de la suite (d_n) définie par :

$$d_n = u_{n+1} - u_n$$

2. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = 4n^2 + 12n + 5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

- a. Donner l'expression simplifiée de l'expression v_{n+1} en fonction de n .

- b. Simplifier l'expression de : $\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \cdot v_n + \frac{6}{n+1}$.

(On utilisera la factorisation :

$$4x^3 + 24x^2 + 41x + 21 = (x+1)(4x^2 + 20x + 21))$$

- c. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 3

1. a. On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

- b. On considère la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) .

- c. Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites (u_n) et (v_n) ?

2. a. Simplifier l'expression suivante : $v_{n+1} \cdot (2 - v_n)$

- b. Justifier que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est

donné par la formule :

$$u_n = n^2 - 7n + 1$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donné le tableau de variation de la fonction f dont l'image de x est défini par :

$$f(x) = x^2 - 7x + 1$$

Etablir que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

Exercice 5

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$u_n = -2n^2 - 3n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Etudier la monotonie de chacune des suites ci-dessous, en étudiant la fonction f vérifiant la relation :

$$u_n = f(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$v_n = \frac{2n^2 + 1}{2n + 5} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x + 5}$$

- a. Donner l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f .

- b. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur \mathcal{D}_f :

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 20x - 2}{(2x + 5)^2}$$

- c. Dresser le tableau de variation de la fonction f .

- d. Justifier que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

- e. Peut-on dire que la suite (v_n) est croissante sur \mathbb{N} ?

Exercice 6

Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite suivante :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 8

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que cette suite est décroissante.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$v_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que cette suite est croissante.

3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :

$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 9

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$v_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

Exercice 10

1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a. Simplifier l'expression : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

b. En déduire les variations de la suite (u_n) sur \mathbb{N} .

2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a. Déterminer une expression simplifiée de $v_{n+1} - v_n$.

b. En déduire les variations de la suite (v_n) sur \mathbb{N} .

Exercice 11

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{5^n}{n+2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

est une suite croissante sur \mathbb{N} .

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :

$$v_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$

a. Donner l'expression réduite de : $v_{n+1} - v_n$.

b. En déduire que la suite (v_n) est croissante pour n supérieur à 2.

Exercice 12

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{n^2 + 10}{2n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

2. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que (v_n) est décroissante à partir du rang 2.

Exercice 13

On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 24 et de raison $\frac{1}{2}$.

- Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n) .
- Exprimer la valeur du terme v_n en fonction de son rang n .
- Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 14

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 5 et de raison 2.

- Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
- Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n .
- Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 15

Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

- (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
- (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
- (w_n) est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot u_n + \frac{1}{2} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite (v_n) définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot u_n - 1$$

a. Etablir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot v_n$$

b. Donner le sens de variation de la suite (v_n) .

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 17

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$.

On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.

2. Donner l'expression du terme S_n en fonction de n .

3. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au millièmes près :

n	0	1	2	10	20	24
S_n						

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur des termes de la suite (S_n) lorsque la valeur de n devient très grand ?

Exercice 18

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.

Le premier jour, il parcourt 50 km. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de 1 %.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n -ième jour. En supposant que le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n) .

2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n) .

b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n .

c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour ? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n .

b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

n	10	100	500	750	1000
u_n					

c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand ?

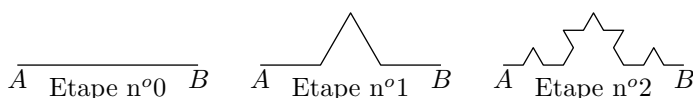
Exercice 19

On construit le flocon de Heige Von Koch de la manière suivante :

● On part d'un segment $[AB]$ de longueur 9 cm.

● Pour passer d'une étape à la suivante, en découpant chaque segment présent sur la figure en trois parties égales, puis en enlevant le segment "central" et en y construisant un triangle isocèle rectangle.

Voici la représentation des 6 premières étapes de cette construction :



A chaque étape n , on note u_n la longueur de la "ligne brisée" ainsi obtenue. On construit ainsi une suite de nombres (u_n) définie pour tout entier naturel n .

1. Déterminer la mesure des trois premiers termes de la suite (u_n) .

2. a. A l'étape n , exprimer le nombre de segments s_n formant la "ligne brisée" en fonction de n .

b. A l'étape n , exprimer la longueur ℓ_n de chacun des segments formant la "ligne brisée" en fonction de n .

3. On note L_n la longueur de la "ligne brisée" à l'étape n . On obtient ainsi une suite (L_n) de termes numériques définie pour tout entier naturel n .

a. Exprimer chaque terme de la suite (L_n) en fonction de son rang n .

b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au centième de centimètre près :

n	0	1	10	20	30
L_n					

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par la relation :

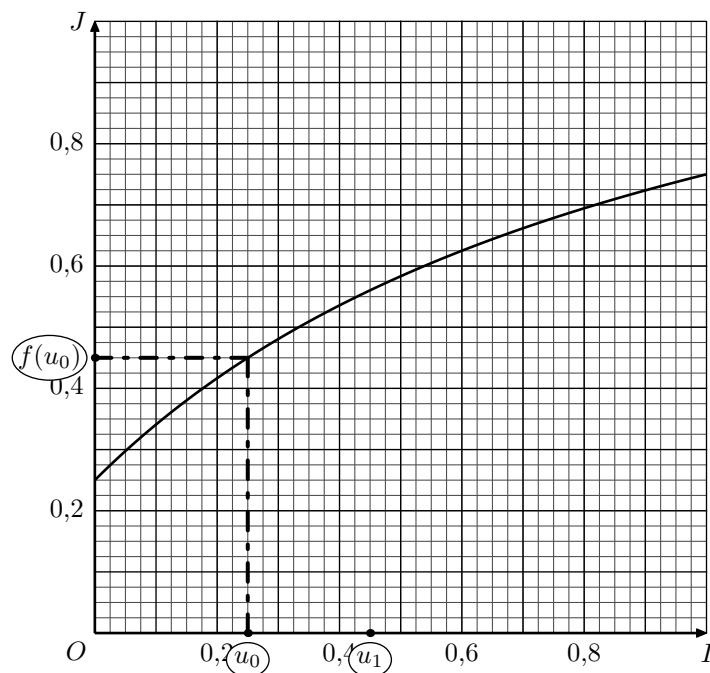
$$f(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{x+1}$$

1. a. Etablir les valeurs suivantes :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{20} \quad ; \quad (f \circ f)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{65}{116}$$

b. Déterminer la valeur de : $(f \circ f \circ f)\left(\frac{1}{4}\right)$

Ci-dessous est donnée la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



2. a. Donner les valeurs approchées au millièmes près des nombres suivants :

$$u_0 = \frac{1}{4} = \dots \quad ; \quad u_1 = \frac{9}{20} \simeq \dots$$

$$u_2 = \frac{65}{116} \simeq \dots \quad ; \quad u_3 = \frac{441}{724} \simeq \dots$$

b. Placer les valeurs u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

- c. Placer les valeurs $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ sur l'axe des ordonnées.

3. a. Tracer le segment reliant les deux points $A_1(u_1; 0)$ et $B_1(0; f(u_0))$.

Quelle est la nature du triangle OA_1B_1 .

- b. Pour i allant de 1 à 3, on définit les points :

$$A_i(u_i; 0) \text{ et } B_i(0; f(u_{i-1}))$$

De quelles natures sont les triangles OA_iB_i ?

- c. Placer les nombres u_4 et u_5 sur l'axe des abscisses définis par les relations :

$$f(u_3) = u_4 \quad ; \quad f(u_4) = u_5$$

4. Génération des termes de la suite :

- a. Saisir et exécuter ce programme dans le langage de programmation de votre choix.

```
x ← 0,25
Pour i allant de 0 à 100
    x ← 5/4 - 1/(x+1)
Fin Pour
```

En fin d'exécution, quelle est la valeur de la variable x ?

- b. Quelle conjecture peut-on faire sur les termes de cette suite ?

Exercice 21

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (t_n) dont les premiers termes ont été donnés dans la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C	D
1	u_n	u_n	v_n	t_n
2	0	3	5	6
3	1	7	8	4
4	2	15	10	-8
5	3	31	11	-16
6	4	63	11	0
7	5	255	10	32

1. Vérifier que les formules ci-dessous sont vérifiées par les valeurs du tableau :

$$\bullet B5 = 2 \cdot B4 + 1 \quad \bullet C3 = C2 - A2 + 3 \quad \bullet D6 = D5 - 2 \cdot D4$$

2. Utiliser ces formules pour en déduire la formule de récurrence définissant chacun des termes de ces suites.

Exercice 22

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 3 \cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

On définit la suite (a_n) définie par la relation :

$$a_n = u_n + \frac{1}{2}$$

- b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$

- c. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Donner les valeurs de ses éléments caractéristiques.

- d. En remarquant l'égalité $u_{n+1} - u_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + 2 \cdot n + 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .

- b. Quelle conjecture peut-on émettre sur les termes de la suite (v_n) ?

On définit la suite (w_n) définie par :

$$w_n = v_{n+1} - v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- c. Justifier que la suite (w_n) est une suite arithmétique. On précisera les éléments caractéristiques de cette suite.

- d. Déterminer l'expression de la somme S des n premiers termes de la suite (w_n) .

- e. En remarquant l'égalité $\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right) + v_0 = v_n$, en déduire l'expression du terme v_n en fonction de n .

- f. Confirmer la conjecture faite à la question b.