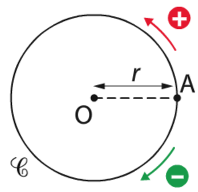
Produit scalaire.

1 Angle orienté de vecteurs.

1.1 Orientation du plan.

Proposition 1
Tout cercle du plan peut être orienté en distinguant sur ce cercle deux sens de parcours. Un sens direct et un sens indirect.



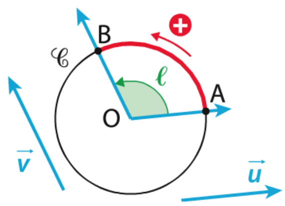
On peut orienter tous les cercles du plan de façon cohérente. On dit alors qu'on munit le plan lui-même d'une orientation. Il n'y a que deux orientations du plan possibles. Nous suivrons la convention qui consiste à choisir comme sens positif le sens anti-horaire (comme sur le cercle précédent).

On appelle **cercle trigonométrique** un cercle orienté de rayon 1.

1.2 Angle orienté de vecteurs.

Définition 2
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O, A et B les uniques points sur le cercle trigonométrique tels que $\vec{OA}$ (resp. $\vec{OB}$) est colinéaire à $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$).

On note l la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ parcouru dans le sens direct ($l \geq 0$).



Au couple $(\vec{u}, \vec{v})$, on associe la famille de nombres réels de la forme $l + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chacun de ces nombres est une mesure de l'**angle orienté** de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

L'usage est de noter $(\vec{u}, \vec{v})$ un angle de vecteurs et de confondre un angle avec l'une de ses mesures. On appelle **radian** l'unité de mesure des angles orientés de vecteurs.

1.3 Mesure principale d'un angle orienté.

Définition 3

- Parmi les mesures $x + 2k\pi$ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls, il en existe une et une seule dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est apellée la **mesure principale** de $(\vec{u}, \vec{v})$.
- On appelle mesure de l'**angle géométrique** défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la valeur absolue de la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple 4

- $\frac{37}{6}\pi = (6 + \frac{1}{6})\pi = \frac{\pi}{6} + 3(2\pi)$. La mesure principale est $\frac{\pi}{6}$.
- $\frac{202\pi}{3} = (67 + \frac{1}{3})\pi = \frac{\pi}{3} + 67\pi = 68\pi - \pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 34(2\pi)$. La mesure principale est donc $-\frac{2\pi}{3}$.
  L'angle géométrique associé a pour mesure $|-\frac{2\pi}{3}| = \frac{2\pi}{3}$.
- Les mesures des angles géométriques en degré et en radian sont proportionnels :

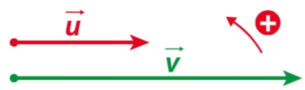
deg.	180	90	60	30
rad.	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

2 Propriétés des angles orientés.

2.1 Colinéarité.

Théorème 5
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

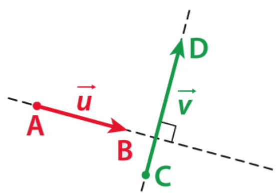


- $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

2.2 Orthogonalité.

Définition 6

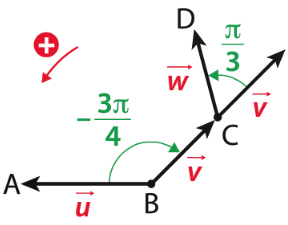
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$.



2.3 Relation de Chasles.

Théorème 7
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$.

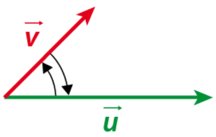
Exemple 8
Avec la figure ci-contre :



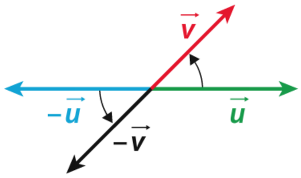
$$(\vec{BA},\vec{CD})=(\vec{BA},\vec{BC})+(\vec{BC},\vec{CD})$$

$$\text{d'où } (\vec{BA},\vec{CD})=-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}.$$

Proposition 9
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

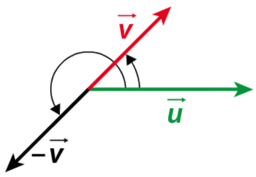


$(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$

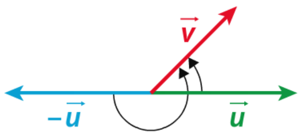


$(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$

Proposition 10
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

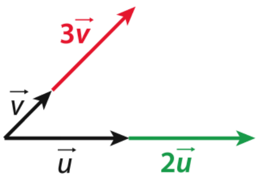


$(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$



$(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

Proposition 11
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $k,l>0$, $(k\vec{u},l\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$



3 Produit scalaire.

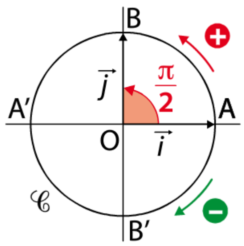
3.1 Norme d'un vecteur.

Définition 12
Une unité de longueur étant choisie, on appelle **norme** d'un vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$ la longueur AB. On note $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$.

3.2 Repères orthonormés directs.

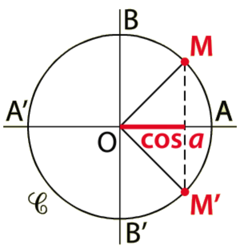
Définition 13
Une unité de longueur étant choisie, dans le plan orienté, on dit que le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est **orthonormé direct** si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i},\vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

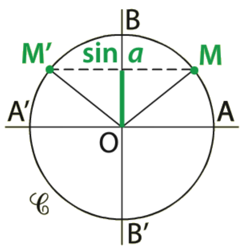
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.



3.3 Trigonométrie.

Définition 14
Soient a un angle orienté de vecteurs et $(O;\vec{OA},\vec{OB})$ un repère orthonormé direct. Le **cosinus** et le **sinus** de a sont les coordonnées du point M sur un cercle trigonométrique de centre O tel que $(\vec{OA},\vec{OM}) = a$.





$$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$$

3.4 Définitions du produit scalaire.

Définition 15
Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un nombre réél. On le note $\vec{u}.\vec{v}$ et on lit $\vec{u}$ «scalaire» $\vec{v}$.
Les définitions suivantes sont équivalentes :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||u+v||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$.
2. $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
3. $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormé.

3.5 Règles de calcul.

Le produit scalaire possède les mêmes propriétés de calcul que le produit de nombres réels :

Proposition 16

1. Commutativité : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. Distributivité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. «Associativité» : $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)\vec{u}.\vec{v}$

Exemple 17

$(-\vec{u}).\vec{v} = -\vec{u}.\vec{v}$
$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

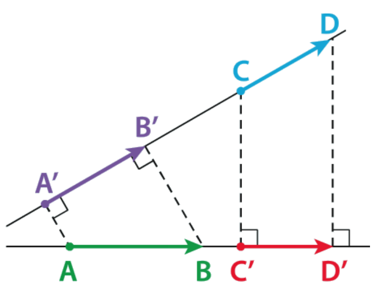
$\vec{AB}.\vec{CD} = -\vec{BA}.\vec{CD} = -\vec{AB}.\vec{DC} = \vec{BA}.\vec{DC}$
$(\vec{AB}+\vec{CD})^2 = AB^2 + CD^2 + 2\vec{AB}.\vec{CD}$
$(\vec{AB}-\vec{CD})^2 = AB^2 + CD^2 - 2\vec{AB}.\vec{CD}$
$(\vec{AB}+\vec{CD})(\vec{AB}-\vec{CD}) = AB^2 - CD^2$

3.6 Produit scalaire et orthogonalité.

Théorème 18
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. De même, deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{AB}.\vec{CD} = 0$.

Proposition 19
Soient $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs non nuls et C', (resp. D') le projeté orthogonal de C (resp. D) sur la droite (AB). On a

$$\vec{AB}.\vec{CD} = \vec{AB}.\vec{C'D'}$$

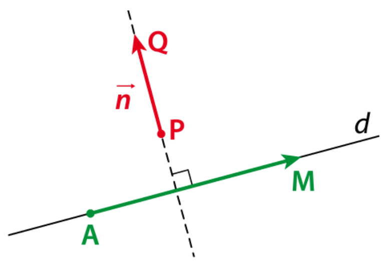


4 Équations de droites.

4.1 Vecteur normal à une droite.

Définition 20
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite d si il est orthogonal à tout vecteur directeur de d.

Proposition 21
Un point M appartient à la droite d passant par A et perpendiculaire à la droite (PQ) si et seulement si $\vec{AM}.\vec{PQ} = 0$



Si d et d' sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ alors

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u'} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'} = 0$$

Théorème 22
Dans un repère orthonormé :

1. Si une droite d possède une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal de d.
2. Si un vecteur $\vec{n}(a; b) \neq \vec{0}$ est normal à une droite d alors d possède une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

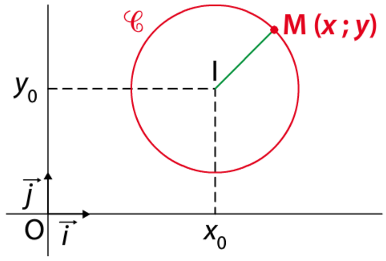
Exemple 23
Soient $A(1; 2)$, $B(2; 5)$ et $C(4; 2)$ dans un repère orthonormé. Trouver une équation cartésienne pour la droite d perpendiculaire à (AB) passant par C.

$\vec{AB}(1; 3)$ est un vecteur normal à d. d possède une équation de la forme $d : x + 3y + c = 0$. $C(4; 2) \in d \Leftrightarrow 4 + 3 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -10$. En définitive, $d : x + 3y - 10 = 0$.

5 Équations de cercles.

Théorème 24
Dans un repère orthonormé, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_0;y_0)$ et de rayon r a pour équation

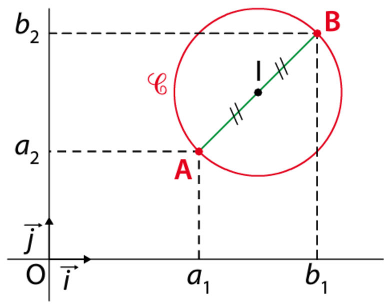
$$\mathcal{C} : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



Démonstration 25
$M(x;y)\in\mathcal{C} \Leftrightarrow IM^2=r^2 \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Exemple 26
$(x+1)^2+(y-2)^2=12$ est l'équation d'un cercle de centre $I(-1;2)$ et de rayon $r=2\sqrt{3}$.

Théorème 27
M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\vec{AM}.\vec{BM}=0$.



Démonstration 28
Dans un repère orthonormé, $M(x;y)$, $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$.

$\vec{MA}.\vec{MB}=0 \Leftrightarrow (x-a_1)(x-b_1)+(y-a_2)(y-b_2)=0$
$\Leftrightarrow [x^2-(a_1+b_1)x]+[y^2-(a_2+b_2)y]=-a_1b_1-a_2b_2$
$\Leftrightarrow [(x-\frac{a_1+b_1}{2})^2-(\frac{a_1+b_1}{2})^2]+[(y-\frac{a_2+b_2}{2})^2-(\frac{a_2+b_2}{2})^2]=-a_1b_1-a_2b_2$
$\Leftrightarrow (x-x_I)^2+(y-y_I)^2=\frac{1}{4}[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2-4a_1b_1-4a_2b_2]=(\frac{1}{2}[(b_1-a_1)]^2+\frac{1}{2}[(b_2-a_2)]^2)=(\frac{AB}{2})^2$

Démonstration 29 (Sans coordonnées)
$\vec{MA}.\vec{MB}=0 \Leftrightarrow (\vec{MI}+\vec{IA}).(\vec{MI}+\vec{IB})=0$ où I est le milieu de $[AB]$.

$\Leftrightarrow (\vec{MI}+\vec{IA}).(\vec{MI}-\vec{IA})=0$
$\Leftrightarrow \vec{MI}^2-\vec{IA}^2=0$
$\Leftrightarrow MI^2-IA^2=0$
$\Leftrightarrow MI=IA$

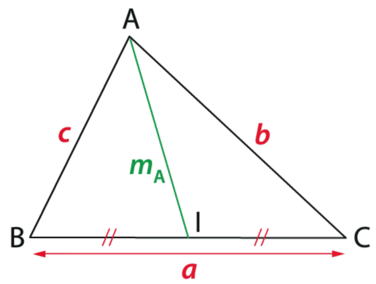
5.1 Théorème de Pythagore généralisé.

Théorème 30
Soit ABC un triangle quelconque. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos(\vec{AB};\vec{AC})$.

Démonstration 31
$BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos(\vec{AB};\vec{AC})$

5.2 Théorème de la médiane.

Théorème 32
Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de $[BC]$. $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$



Démonstration 33
$AB^2 + AC^2 = (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2 = 2AI^2 + 2IB^2 + 2(\vec{AI}.\vec{IB} + \vec{AI}.\vec{IC}) = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$.

En effet, $\vec{AI}.\vec{IB} + \vec{AI}.\vec{IC} = \vec{AI}.(\vec{IB} + \vec{IC}) = \vec{AI}.\vec{0} = 0$.

5.3 Formules trigonométriques

Théorème 34

Formules d'addition :
$sin(a+b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$
$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
$sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$
$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$

Formules de duplication :
$cos(2a) = cos^2(a) - sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2sin^2(a)$
$sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$

Formules de linéarisation :
$cos^2(a) = \dfrac{1 + cos(2a)}{2}$
$sin^2(a) = \dfrac{1 - cos(2a)}{2}$