Probabilités.

Définition 1

Une **probabilité** sur un fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to \quad \text{telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) =$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω.
On appelle **événement** une A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{llll} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to \qquad \text{telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) =$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω.
On appelle **événement** une A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to [0; 1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) =$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω.
On appelle **événement** une A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to [0;1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un ω_i de Ω.
On appelle **événement** une A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{rccl} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to [0;1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω.
On appelle **événement** une A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{rccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to [0;1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω.
On appelle **événement** une partie A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A) = \end{array}$$

Définition 1

Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to [0;1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω.
On appelle **événement** une partie A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{cccc} P : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \end{array}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?

$\Omega = \qquad ,$

$A = \{\omega \in \Omega / \qquad \} = \{ \qquad \} = \{ \qquad \}.$

Le dé étant équilibré, il y a et

$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$

$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$

De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :

$P(A) = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \qquad ,$
$A = \{\omega \in \Omega / \qquad \} = \{ \qquad \} = \{ \qquad \}.$
Le dé étant équilibré, il y a et
$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \qquad\qquad \} = \{ \qquad\qquad \} = \{ \qquad \}$.
Le dé étant équilibré, il y a $\qquad\qquad$ et
$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{ \qquad \} = \{ \qquad \}$.
Le dé étant équilibré, il y a et
$P(2) = P(4) = P(6) = \quad$.
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad$.
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \underline{\qquad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{ \quad \}$.
Le dé étant équilibré, il y a et
$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a et
$P(2) = P(4) = P(6) =$.
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \times \frac{1}{6} =$.
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{}{} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et
$P(2) = P(4) = P(6) = \quad .$
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et
$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}$.
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \quad \times \frac{1}{6} = \quad .$
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et
$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}$.
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \quad .$
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et
$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}$.
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2

On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$,
$A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et
$P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{6}$.
$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un . Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un de l'arbre.

- *Loi des chemins :*
  La probabilité d'une issue est des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.
- *Loi des noeuds :*
  La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut .

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un de l'arbre.

- *Loi des chemins :*
  La probabilité d'une issue est des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.
- *Loi des noeuds :*
  La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut .

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- *Loi des chemins :*
  La probabilité d'une issue est des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.
- *Loi des noeuds :*
  La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut .

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- *Loi des chemins :*
  La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.
- *Loi des noeuds :*
  La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut .

Théorème 3

Lorsqu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite de n expériences aléatoires (ou épreuves), on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- *Loi des chemins :*
  La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.
- *Loi des noeuds :*
  La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Définition 4

On dit qu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite d'épreuves **indépendantes**, **identiquement distribuées** si chaque épreuve ne dépend pas des résultats des épreuves précédentes, c'est à dire si les issues possibles sont les mêmes et avec la même répartition de probabilités.

Exemple 5 (Page 319)

- Tirage avec remise (épreuves indépendantes, identiquement distribuées) dans une urne contenant 2 boules bleues, 2 rouges et une noire.
- Représentation de l'expérience par un arbre pondéré.

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω. Définir une **variable aléatoire** (réélle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réél. Autrement dit, X est une $\qquad X : \quad \to \quad .$

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω. Définir une **variable aléatoire** (réélle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réél. Autrement dit, X est une fonction $X : \quad \rightarrow \quad$.

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω. Définir une **variable aléatoire** (réélle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réél. Autrement dit, X est une fonction $X : \Omega \to$.

Définition 6

Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω. Définir une **variable aléatoire** (réélle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réél. Autrement dit, X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.
Il y a seulement valeurs possibles pour cette variable aléatoire : .

Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.
Il y a seulement 3 valeurs possibles pour cette variable aléatoire : .

Exemple 7

On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.
Il y a seulement 3 valeurs possibles pour cette variable aléatoire : $0, 1, 2$.

Définition 8

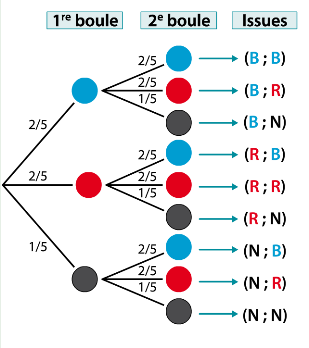
Soit Ω un univers muni d'une fonction de probabilité $P : \Omega \rightarrow [0; 1]$.
Soit X une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec $x_i, i = 1, .., k$ ses différentes valeurs.
Établir la **loi de probabilité** de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement .

Définition 8

Soit Ω un univers muni d'une fonction de probabilité $P : \Omega \to [0; 1]$.
Soit X une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $x_i, i = 1, .., k$ ses différentes valeurs.
Établir la **loi de probabilité** de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $X = x_i$.

Exemple 9

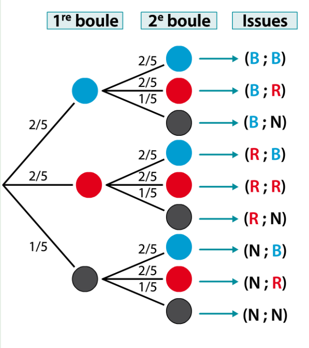
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$P(X = 0)$
$= P(\qquad)$
$=$
$= \quad + \quad + \quad + \quad =$

Exemple 9

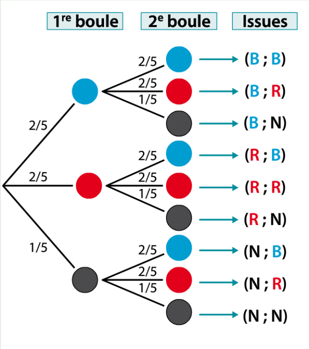
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$P(X = 0)$
$= P(\{(B; B); (B; N); (N; B); (N; N)\})$
$=$
$= \quad + \quad + \quad + \quad =$

Exemple 9

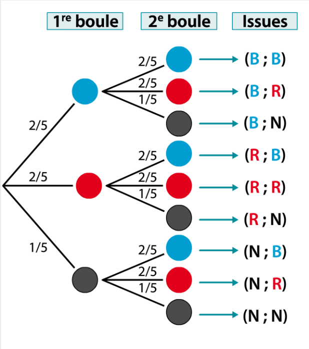
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
&P(X=0)\\
&= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})\\
&= P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)\\
&= \quad + \quad + \quad + \quad =
\end{aligned}$$

Exemple 9

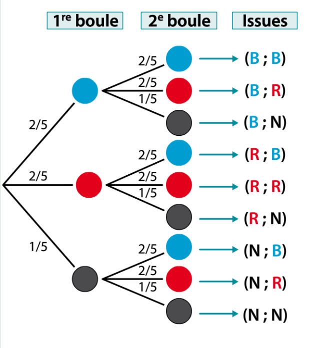
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}&P(X=0)\\&=P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})\\&=P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)\\&=(\tfrac{2}{5})^2+\quad+\quad+\quad=\end{aligned}$$

Exemple 9

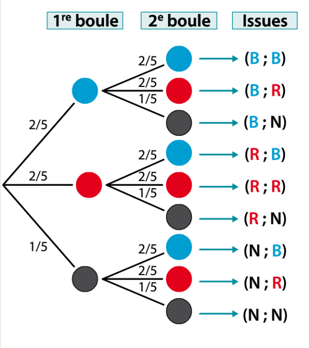
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}
&P(X=0)\\
&= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})\\
&= P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)\\
&= (\tfrac{2}{5})^2+\tfrac{2}{5}\,\tfrac{1}{5}+\qquad+\qquad=
\end{aligned}$$

Exemple 9

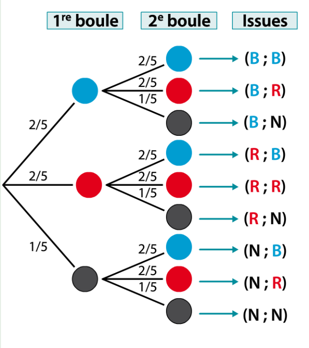
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned}&P(X=0)\\&=P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})\\&=P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)\\&=(\tfrac{2}{5})^2+\tfrac{2}{5}\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}\tfrac{2}{5}+\qquad =\end{aligned}$$

Exemple 9

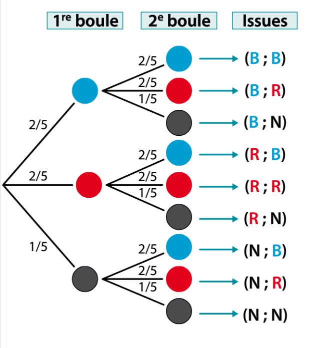
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned} &P(X=0)\\ &= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})\\ &= P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)\\ &= (\tfrac{2}{5})^2+\tfrac{2}{5}\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}\tfrac{2}{5}+(\tfrac{1}{5})^2 = \end{aligned}$$

Exemple 9

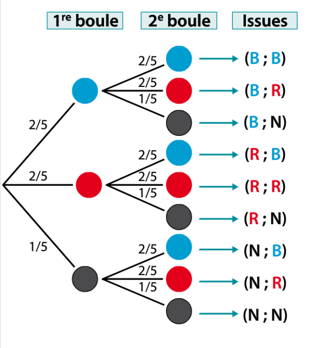
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$$\begin{aligned} &P(X=0) \\ &= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\}) \\ &= P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N) \\ &= (\tfrac{2}{5})^2+\tfrac{2}{5}\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}\tfrac{2}{5}+(\tfrac{1}{5})^2=\tfrac{9}{25} \end{aligned}$$

Exemple 9

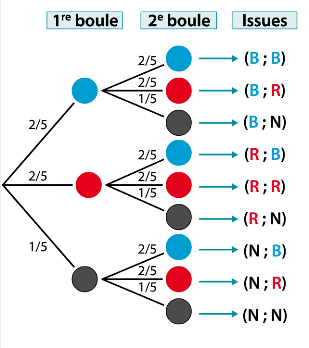
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$P(X=0)$
$= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})$
$= P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)$
$= (\frac{2}{5})^2+\frac{2}{5}\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\frac{2}{5}+(\frac{1}{5})^2=\frac{9}{25}$
$P(X=1)$
$= P(\{(B;R);(R;B);(R;N);(N;R)\})$
$= P(B;R)+P(R;B)+P(R;N)+P(N;R)$
$= (\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^2+\frac{2}{5}\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$
$P(X=2)$
$= P(\{(R;R)\})$
$= P(R;R)$
$= (\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$

Exemple 9

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



$P(X=0)$
$= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})$
$= P(B;B)+P(B;N)+P(N;B)+P(N;N)$
$= (\frac{2}{5})^2+\frac{2}{5}\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\frac{2}{5}+(\frac{1}{5})^2 = \frac{9}{25}$
$P(X=1)$
$= P(\{(B;R);(R;B);(R;N);(N;R)\})$
$= P(B;R)+P(R;B)+P(R;N)+P(N;R)$
$= (\frac{2}{5})^2+(\frac{2}{5})^2+\frac{2}{5}\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\frac{2}{5} = \frac{12}{25}$
$P(X=2)$
$= P(\{(R;R)\})$
$= P(R;R)$
$= (\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

Une loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

est l'estimation des fréquences obtenues en faisant des statistiques sur un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
f_i	f_1	f_2	$\dots$	f_k

De même que nous avons défini les paramètres moyenne, variance et écart-type d'une série statistique, nous définissons espérance $E(X)$, variance $var(X)$ et écart-type σ_X d'une variable aléatoire X.

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum^{k} \quad =$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} \quad - (\sum_{i=1}^{k} \quad)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} \qquad =$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} \qquad - (\sum_{i=1}^{k} \qquad)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i =$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} \qquad - (\sum_{i=1}^{k} \qquad)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} \qquad - (\sum_{i=1}^{k} \qquad)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} \qquad - (\sum_{i=1}^{k} \qquad)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} \quad)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} p_i x_i)^2$$

$$\sigma_X =$$

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + \ldots + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} p_i x_i)^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = \quad \times P(\qquad) + \quad \times P(\qquad) + \quad \times P(\qquad)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \qquad\qquad =$

$Var(X) = \quad - \qquad = \frac{\quad - \quad}{\qquad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(\qquad) + \quad \times P(\qquad) + \quad \times P(\qquad)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \qquad =$

$Var(X) = \quad - \quad = \frac{\quad - \quad}{\quad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + \quad \times P(\quad) + \quad \times P(\quad)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \quad = \quad$

$Var(X) = \quad - \quad = \frac{\quad - \quad}{\quad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(\qquad) + \quad \times P(\qquad)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \qquad\qquad =$

$Var(X) = \quad - \qquad = \frac{\quad - \quad}{\qquad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \quad \times P(\qquad)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \qquad\qquad =$

$Var(X) = \quad - \qquad = \frac{\ -\ }{\qquad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(\qquad)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \qquad = $

$Var(X) = \quad - \quad = \frac{-}{\quad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \quad + 2 \times \quad = \quad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \quad \times P(X = 0) + \quad \times P(X = 1) + \quad \times P(X = 2)$

$= \quad\quad =$

$Var(X) = \quad - \quad = \frac{-}{\ } = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$
$= \frac{12}{25} + 2 \times \qquad = \qquad = \frac{4}{5}$
$E(X^2) = \qquad \times P(X = 0) + \qquad \times P(X = 1) + \qquad \times P(X = 2)$
$= \qquad\qquad =$

$Var(X) = \qquad - \qquad = \frac{-}{\qquad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \qquad = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = \qquad \times P(X = 0) + \qquad \times P(X = 1) + \qquad \times P(X = 2)$

$= \qquad\qquad = $

$Var(X) = \qquad - \qquad = \frac{-}{} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$$

$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = \quad \times P(X=0) + \quad \times P(X=1) + \quad \times P(X=2)$$

$$= \qquad =$$

$$Var(X) = \quad - \quad = \frac{-}{\quad} = \frac{12}{25}$$

$$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)$

$=$ $=$

$Var(X) =$ $-$ $=$ $\frac{-}{\quad}$ $= \frac{12}{25}$

$\sigma_X =$ $\simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} =$

$Var(X) = \quad - \quad = \frac{-}{\quad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$

$Var(X) = \quad - \quad = \frac{-}{\quad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$

$Var(X) = \frac{28}{25} - \qquad = \frac{-}{\qquad} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$

$Var(X) = \frac{28}{25} - (\frac{4}{5})^2 = \frac{-}{} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$
$$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$
$$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$
$$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$$
$$Var(X) = \frac{28}{25} - (\frac{4}{5})^2 = \frac{-}{25} = \frac{12}{25}$$
$$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)$

$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$

$Var(X) = \frac{28}{25} - (\frac{4}{5})^2 = \frac{28-}{25} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \quad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$
$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$
$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$
$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$
$Var(X) = \frac{28}{25} - (\frac{4}{5})^2 = \frac{28-16}{25} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \qquad \simeq 0.69$

Exemple 11

On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$

$= \frac{12}{25} + 4 \times \frac{4}{25} = \frac{28}{25}$

$Var(X) = \frac{28}{25} - (\frac{4}{5})^2 = \frac{28-16}{25} = \frac{12}{25}$

$\sigma_X = \frac{2\sqrt{3}}{5} \simeq 0.69$

Théorème 12

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note $aX + b$ la variable aléatoire telle que $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) =$$

$$Var(aX + b) =$$

Théorème 12

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire. On note* $aX + b$ *la variable aléatoire telle que* $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX + b) =$$

Théorème 12

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note $aX + b$ la variable aléatoire telle que $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 var(X)$$

Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de (resp.) de X.

Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de l'espérance (resp.) de X.

Théorème 13 (Loi des grands nombres)

Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de l'espérance (resp. l'écart-type) de X.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et .

En associant à cette expérience aléatoire la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X la loi de probabilité suivante :

k	0	1
		p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.
En associant à cette expérience aléatoire la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X la loi de probabilité suivante :

k	0	1
		p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.
En associant à cette expérience aléatoire la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X la loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X = k)$		p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre   et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.
En associant à cette expérience aléatoire la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X la loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et échec.
En associant à cette expérience aléatoire la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X la loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de

.

$X \hookrightarrow B(\frac{1}{6})$

k	0	1

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$X \hookrightarrow B(\frac{1}{6})$

k	0	1

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$X \hookrightarrow B(\frac{1}{6})$

k	0	1
$P(X=k)$		

Exemple 15

On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire X associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$X \hookrightarrow B(\frac{1}{6})$

k	0	1
$P(X = k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = \quad \times \qquad\qquad + \quad \times \quad = p$

$E(\quad) = \quad \times (1-p) + \quad \times p = p$

$Var(X) = \qquad\qquad - \qquad\qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times \qquad + \quad \times \quad = p$

$E(\quad) = \quad \times (1-p) + \quad \times p = p$

$Var(X) = \qquad - \qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times (1-p) + \quad \times \quad = p$

$E(\quad) = \quad \times (1-p) + \quad \times p = p$

$Var(X) = \qquad - \qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times \quad = p$

$E(\quad) = \quad \times (1-p) + \quad \times p = p$

$Var(X) = \qquad - \qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$E(\quad) = \quad \times (1-p) + \quad \times p = p$

$Var(X) = \quad\quad - \quad\quad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$E(X^2) = \quad \times (1-p) + \quad \times p = p$

$Var(X) = \qquad - \qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^1 \times p = p$

$Var(X) = \qquad - \qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :
$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^1 \times p = p$
$Var(X) = E(X^2) - \qquad = p - p^2 = p(1-p)$

Proposition 16

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Démonstration :

$E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$

$E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^1 \times p = p$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$E(X) = \quad =$

$Var(X) = \quad \times \quad = \frac{5}{36}$.

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$E(X) = p =$

$Var(X) = \quad \times \quad = \frac{5}{36}.$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :
$E(X) = p = \frac{1}{6}$
$Var(X) = \quad \times \quad = \frac{5}{36}$.

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :

$E(X) = p = \frac{1}{6}$

$Var(X) = \frac{1}{6} \times \qquad = \frac{5}{36}.$

Exemple 17

Dans la situation de l'exemple précédent :
$E(X) = p = \frac{1}{6}$
$Var(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p, l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, et

.

Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \ldots R_n$$

où $R_i = S$ ou $\overline{S}$.
On peut représenter l'expérience par un et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

où k est

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p, l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, indépendantes et identiquement distribuées.
Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 ... R_n$$

où $R_i = S$ ou $\overline{S}$.
On peut représenter l'expérience par un et la probabilité d'une issue est :

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

où k est

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p, l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, indépendantes et identiquement distribuées.
Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 \ldots R_n$$

où $R_i = S$ ou $\overline{S}$.
On peut représenter l'expérience par un arbre pondéré et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

où k est

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)

On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p, l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, indépendantes et identiquement distribuées.
Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1 R_2 ... R_n$$

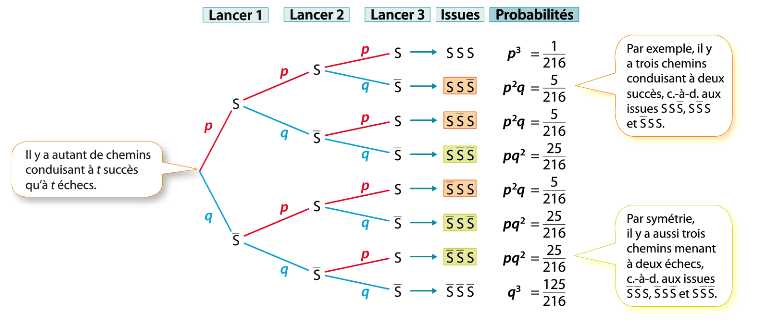
où $R_i = S$ ou $\overline{S}$.
On peut représenter l'expérience par un arbre pondéré et la probabilité d'une issue est :

$$p^k (1-p)^{n-k}$$

où k est le nombre de succès.

Exemple 19

On réalise 3 lancers successifs d'un dé équilibré, en considérant à chaque lancer «obtenir 6» comme le succès. La suite de ces trois épreuves de Bernoulli peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli

et .

Les valeurs possibles pour Y sont .

On représente l'expérience par un . L'événement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont .

On représente l'expérience par un . L'événement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, \ldots, n$.

On représente l'expérience par un . L'événement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, ..., n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'événement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, ..., n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'événement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant k succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est . On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)

À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.
Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, ..., n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'événement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant k succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est $p^k(1-p)^{n-k}$. On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Théorème 21

On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès pour un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p suit une ***loi binomiale*** *de paramètres n et p. On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) =$$

$$E(Y) =$$

$$Var(Y) =$$

Théorème 21

On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès pour un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p suit une ***loi binomiale*** *de paramètres n et p. On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = \quad p^k(1-p)^{n-k}$$

$$E(Y) =$$

$$Var(Y) =$$

Théorème 21

On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès pour un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p suit une ***loi binomiale*** *de paramètres n et p. On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) =$$

$$Var(Y) =$$

Théorème 21

On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès pour un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p suit une ***loi binomiale*** *de paramètres n et p. On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) = np$$

$$Var(Y) =$$

Théorème 21

On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès pour un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p suit une ***loi binomiale*** *de paramètres n et p. On note $Y \hookrightarrow B(n, p)$. On a*

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$E(Y) = np$$

$$Var(Y) = np(1 - p)$$

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.
C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.
C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de lettres composé de fois la lettre S et fois la lettre E.
C_n^k est aussi le nombre de parties à éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de lettres composé de fois la lettre S et fois la lettre E.

C_n^k est aussi le nombre de parties à éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.
C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.
C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de   fois la lettre S et   fois la lettre E.
C_n^k est aussi le nombre de parties à   éléments d'un ensemble à   éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.
C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n - k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.
C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et fois la lettre E.
C_n^k est aussi le nombre de parties à éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.
C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.
C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E.
C_n^k est aussi le nombre de parties à   éléments d'un ensemble à   éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.
C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.
C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E.
C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à éléments.

Définition 22

On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.
C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un schéma de bernoulli d'ordre n.
C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E.
C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Proposition 23

1. $C_n^0 =$, *pour tout entier naturel* n.
2. $= C_n^{n-k}$, *pour tout entier* $n \geq 0$ *et tout entier* $0 \leq k \leq n$.
3. *Formule du* ***triangle de Pascal*** *:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k +$$

pour tout entier $n \geq 1$ *et* $1 \leq k \leq n$.

Proposition 23

1. $C_n^0 = 1$, *pour tout entier naturel n.*
2. $= C_n^{n-k}$, *pour tout entier* $n \geq 0$ *et tout entier* $0 \leq k \leq n$.
3. *Formule du* ***triangle de Pascal*** *:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k +$$

pour tout entier $n \geq 1$ *et* $1 \leq k \leq n$.

Proposition 23

1. $C_n^0 = 1$, *pour tout entier naturel n.*
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$, *pour tout entier* $n \geq 0$ *et tout entier* $0 \leq k \leq n$.
3. *Formule du* ***triangle de Pascal*** *:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k +$$

pour tout entier $n \geq 1$ *et* $1 \leq k \leq n$.

Proposition 23

1. $C_n^0 = 1$, *pour tout entier naturel n.*
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$, *pour tout entier* $n \geq 0$ *et tout entier* $0 \leq k \leq n$.
3. *Formule du* ***triangle de Pascal*** *:*

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

pour tout entier $n \geq 1$ *et* $1 \leq k \leq n$.

Démonstration 24

1. *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.*
2. *D'après la symétrie de l'arbre.*
3. *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.*

$$+ \qquad =$$

Démonstration 24

1. *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.* $C_n^0 = 1$
2. *D'après la symétrie de l'arbre.*
3. *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.*

$$+ \qquad =$$

Démonstration 24

1. *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.* $C_n^0 = 1$
2. *D'après la symétrie de l'arbre.* $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.*

$$+ \qquad =$$

Démonstration 24

1. *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.* $C_n^0 = 1$
2. *D'après la symétrie de l'arbre.* $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.*

$$C_{n-1}^{k-1} + \qquad =$$

Démonstration 24

1. *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.* $C_n^0 = 1$
2. *D'après la symétrie de l'arbre.* $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.*

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} =$$

Démonstration 24

1. *Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.* $C_n^0 = 1$
2. *D'après la symétrie de l'arbre.* $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. *On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.*

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$