Sommes de termes de suites arithmétiques et suites géométriques

Exercice 1

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour chacune des sommes suivantes, préciser son nombre de termes :

a. $u_0+u_1+\cdots+u_{32}$

b. $u_5+u_6+\cdots+u_{15}$

c. $u_0+u_1+\cdot+u_n$

d. $u_5+u_6+\cdots+u_n$

e. $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{100}$

f. $u_k+u_{k+1}+\cdots+u_n$

g. $u_0+u_2+\cdots+u_{88}$

h. $u_{3k}+u_{3k+3}+\cdots+u_{99}$

i. $\displaystyle\sum_{k=0}^{64} u_k$

j. $\displaystyle\sum_{k=5}^{16} u_{2k}$

Exercice 2

On considère une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer le nombre de termes de chacune des sommes ci-dessous :

a. $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7+u_8$

b. $u_5+u_6+u_7+u_8+u_9+u_{10}+u_{11}+u_{12}$

c. $u_{11}+u_{12}+u_{13}+\ldots+u_{25}+u_{26}$

d. $u_8+u_9+u_{10}+\cdots+u_{31}+u_{32}$

Exercice 3

Ci-dessous sont présentés des suites "*logiques*" de nombres. Déterminer le nombre de termes de chacune de ces sommes :

a. $1+4+9+16+\ldots+144+169$

b. $3+7+11+15+\ldots+79+83$

c. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+1+2+\ldots+256+512$

d. $\sqrt{5}+\sqrt{7}+3+\sqrt{11}+\ldots+\sqrt{31}+\sqrt{33}$

Exercice 4

On considère une suite $\left(u_n\right)$ arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Exprimer u_1, u_2 et u_3 en fonction de u_0 et de r.

2. Exprimer les termes u_n, u_{n-1} et u_{n-2} en fonction de n, de u_0 et de r.

3. Justifier l'égalité suivante :
$u_2+u_{n-2}=u_1+u_{n-1}=u_0+u_n$

Exercice 5

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{2}$

   a. Calculer la somme des 13 premiers termes de $\left(u_n\right)$:
   $S=u_0+u_1+\cdots+u_{11}+u_{12}$

   b. Calculer la somme des termes de $\left(u_n\right)$ allant de u_5 à u_{20} : $S'=u_5+u_6+\cdots+u_{19}+u_{20}$

2. On considère les deux sommes suivantes :

$$S_1=1+\frac{5}{2}+4+\frac{11}{2}+\cdots+100$$

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}+\cdots+\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

   a. Déterminer les caractéristiques des suites arithmétiques $\left(v_n\right)$ et $\left(w_n\right)$ définissant respectivement les termes des sommes S_1 et S_2.

   b. En déduire la valeur des sommes S_1 et S_2.

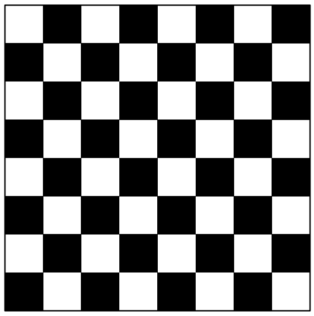
Exercice 6

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{4}$. Déterminer la somme S définie par :
$S=u_{11}+u_{12}+\cdots+u_{25}$

2. Soit $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 12 et de raison $-\sqrt{3}$. Déterminer la somme S' définie par :
$S'=v_5+v_6+\cdots+v_{13}$

Exercice 7

Le prince demande à Sissou de commencer par déposer un grain de riz sur la première case, puis trois grains sur la deuxième case, puis cinq grains sur la troisième case et ainsi de suite pour remplir l'échiquier représenté ci-contre.



Déterminer le nombre de grains de riz dont aura besoin Sissou pour compléter l'échiquier.

Exercice 8

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

   a. Déterminer la somme de ses 10 premiers termes :
   $S=u_0+u_1+\cdots+u_8+u_9$

   b. Déterminer la somme des termes de la suite $\left(u_n\right)$ allant de u_4 à u_{22} :
   $S'=u_4+u_5+\cdots+u_{21}+u_{22}$

2. On considère la somme numérique suivantes :

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

   Déterminer la valeur de S_n en fonction de n.

3. Soit S_3 la somme numérique suivante :

$$S_3=1+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+\cdots+8\sqrt{2}$$

   a. Donner les caractéristiques de la suite géométrique $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la somme des premiers termes est S_3.

   b. En déduire la valeur de S_3.

Exercice 9*

1. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

   a. Déterminer la somme de ses 8 premiers termes :
   $S=u_0+u_1+\cdots+u_7$

   b. Déterminer la somme des termes suivants :
   $S'=u_3+u_4+u_5+u_6$

2. Les termes de chaque somme sont les termes d'une suite géométrique. Déterminer la valeur de ces deux sommes :

   a. $S_1=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{1024}$

b. $S_2 = 2 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{8}$

Exercice 10

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$. Déterminer la valeur de la somme :
$S = u_{10} + u_{11} + \cdots + u_{21}$

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 12 et de raison $-\frac{1}{2}$. Déterminer la valeur de la somme :
$S' = v_7 + v_8 + \cdots + v_{12}$

Exercice 11*

Soit x un nombre réel différent de 1.

1. Exprimer la somme suivante en fonction de x :
$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$

2. En déduire une factorisation du polynôme $1-x^{n+1}$.

Exercice 12*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison $\frac{3}{5}$, déterminer la valeur de la somme suivante :
$S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{21}$

2. On considère la somme suivante dont les termes sont ceux d'une suite géométrique :
$$S' = 16 + 24 + 36 + \cdots + \frac{3^{10}}{2^6}$$
Déterminer la valeur de la somme S'.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot u_n + 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$$v_n = u_n - \frac{2}{3} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

b. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :
$v_{n+1} = -\frac{1}{2}\cdot v_n$

c. Donner la nature et les valeurs des éléments caractéristiques de la suite (v_n).

3. a. Déterminer la valeur de la somme S' définie par :
$S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{14}$

b. Déterminer la valeur de la somme S définie par :
$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{14}$

4. a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

b. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

Exercice 14

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme -3 et de raison 4.

a. Donner l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

b. Quel est le rang du terme de la suite (u_n) ayant pour valeur 605

c. Déterminer la valeur de la somme S définie par :
$S = u_0 + u_1 + \cdot + u_{100}$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 12 et de raison $\frac{1}{4}$.

a. Donner l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.

b. Quel est le rang du terme de la suite (v_n) ayant pour valeur $\frac{3}{64}$

c. Déterminer une expression simplifiée de la somme S définie par :
$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{30}$

Exercice 15

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de premier terme 5 et de raison 3.
Déterminer la valeur de la somme S des 100 premiers termes de cette suite.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{4}$.
Déterminer la valeur de la somme S' des 100 permiers termes de cette suite.

Exercice 16

On souhaite déterminer la valeur de la somme S suivante :
$S = 9 + 15 + 27 + \cdots + 3075$

On remarquera que cette somme peut s'écrire par :
$$S = (3\times2^1+3)+(3\times2^2+3)+(3\times2^3+3)+\cdots+(3\times2^{10}+3)$$

Déterminer la valeur de S

Toutes traces de recherche, même incomplètes, seront prises en compte dans l'évaluation.