Etude de suites

Exercice 1

1. On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Calculer les 4 premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$

2. On considère la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :
$$v_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}$$
Calculer les 4 premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$.

3. Faire une conjecture quant à l'égalité des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$.

4. a. Donner en fonction de n, la valeur de :
$$v_{n+1}-\frac{1}{3}v_n$$
b. En déduire l'égalité des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$.

Exercice 2

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_0=5 \quad ; \quad u_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot u_{n-1}+\frac{6}{n} \quad \text{pour } n\in\mathbb{N}^*$$

1. a. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

b. Faire une conjecture sur la nature de la suite $\left(d_n\right)$ définie par :
$$d_n=u_{n+1}-u_n$$

2. On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par :
$$v_n=4n^2+12n+5 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
a. Donner l'expression simplifiée de l'expression v_{n+1} en fonction de n.

b. Simplifier l'expression de : $\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\cdot v_n+\frac{6}{n+1}$.
(On utilisera la factorisation :
$4x^3+24x^2+41x+21=(x+1)(4x^2+20x+21)$*)*

c. Que peut-on dire des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$.

Exercice 3

1. a. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par la relation :
$$u_0=0 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.

b. On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par la relation :
$$v_n=\frac{n}{n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$
Déterminer les quatre premiers termes de la suite $\left(v_n\right)$.

c. Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$?

2. a. Simplifier l'expression suivante : $v_{n+1}\cdot(2-v_n)$

b. Justifier que les deux suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ sont égales.

Exercice 4

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme de rang n est donné par la formule :
$$u_n=n^2-7n+1$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											

2. Après avoir donner le tableau de variation de la fonction f dont l'image de x est défini par :
$$f(x)=x^2-7x+1$$
Etablir que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante à partir du rang 4.

Exercice 5

1. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$$u_n=-2n^2-3n+2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Etudier la monotonie de chacune des suites ci-dessous, en étudiant la fonction f vérifiant la relation :
$$u_n=f(n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

2. La suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$$v_n=\frac{2n^2+1}{2n+5} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
On considère la fonction f définie par la relation :
$$f(x)=\frac{2x^2+1}{2x+5}$$
a. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

b. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression sur $\mathcal{D}_f$:
$$f'(x)=\frac{4x^2+20x-2}{(2x+5)^2}$$
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d. Justifier que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante à partir du rang 1.

e. Peut-on dire que la suite $\left(v_n\right)$ est croissante sur $\mathbb{N}$?

Exercice 6

Déterminer la monotonie de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite suivante :
$$u_n=\frac{n^2-1}{\sqrt{n}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

Exercice 7

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n-{u_n}^2-1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. En étudiant la différence de deux termes consécutifs, montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.

Exercice 8

Dans cet exercice, on utilisera la méthode de la différence pour prouver la monotonie des suites :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$u_n = -32n + 102 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Montrer que cette suite est décroissante.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$v_n = \sqrt{2n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Montrer que cette suite est croissante.

3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme de rang n est définie par :
$$w_n = 2n - \frac{25}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Montrer que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 9

Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites par la méthode des quotients.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n = \frac{3^n}{4} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$
Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$$v_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Montrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

Exercice 10

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n = \frac{3^n}{2n+1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Simplifier l'expression : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$.
   b. En déduire les variations de la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$v_n = \frac{1-n}{1+n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Déterminer une expression simplifiée de $v_{n+1}-v_n$.
   b. En déduire les variations de la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$.

Exercice 11

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$u_n = \frac{5^n}{n+2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
est une suite croissante sur $\mathbb{N}$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation explicite :
$$v_n = n^3 - 2n^2 - 3n$$
   a. Donner l'expression réduite de : $v_{n+1}-v_n$.
   b. En déduire que la suite (v_n) est croissante pour n supérieur à 2.

Exercice 12

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \frac{n^2+10}{2n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Justifier que (u_n) est croissante à partir du rang 3.

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$$v_n = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
Montrer que (v_n) est décroissante à partir du rang 2.

Exercice 13

On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme 24 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n).
2. Exprimer la valeur du terme v_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 14

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme 5 et de raison 2.

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer la valeur du terme u_n en fonction de son rang n.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 15

Dans chaque cas, préciser, si possible, le sens de variation des suites :

1. (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est positif et la raison négative.
2. (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est négatif et la raison est strictement supérieure à 1.
3. (w_n) est une suite géométrique dont le premier terme est positif et la raison est négative.

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}\cdot u_n + \frac{1}{2} \quad \text{pour tout entier } n\in\mathbb{N}$$

1. On considère la suite (v_n) définie par la relation suivante pour tout entier naturel n :
$$v_n = \frac{1}{2}\cdot u_n - 1$$
   a. Etablir l'égalité ci-dessous pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1} = \frac{3}{4}\cdot v_n$$
   b. Donner le sens de variation de la suite (v_n).

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 17

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (u_n) : $\quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
2. Donner l'expression du terme S_n en fonction de n.
3. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les valeurs au millième près :

n	0	1	2	10	20	24
S_n						

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur des termes de la suite (S_n) lorsque la valeur de n devient très grand ?

Exercice 18

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).

   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour ? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $\quad S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

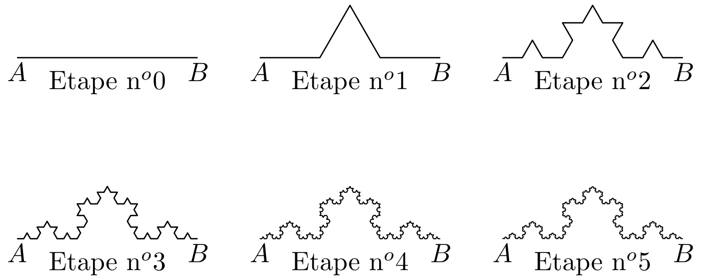
n	10	100	500	750	1000
u_n					

   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand ?

Exercice 19

On construit le flocon de Heige Von Koch de la manière suivante :
- On part d'un segment $[AB]$ de longueur $9\,cm$.
- Pour passer d'une étape à la suivante, en découpant chaque segment présent sur la figure en trois parties égales, puis en enlevant le segment "*central*" et en y construisant un triangle isocèle rectangle.

Voici la représentation des 6 premières étapes de cette construction :



A chaque étape n, on note u_n la longueur de la "*ligne brisée*" ainsi obtenue. On construit ainsi une suite de nombres (u_n) définie pour tout entier naturel n.

1. Déterminer la mesure des trois premiers termes de la suite (u_n).
2. a. A l'étape n, exprimer le nombre de segments s_n formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.

   b. A l'étape n, exprimer la longueur ℓ_n de chacun des segments formant la "*ligne brisée*" en fonction de n.
3. On note L_n la longueur de la "*ligne brisée*" à l'étape n. On obtient ainsi une suite (L_n) de termes numériques définie pour tout entier naturel n.

   a. Exprimer chaque terme de la suite (L_n) en fonction de son rang n.

   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au centième de centimètre près :

n	0	1	10	20	30
L_n					

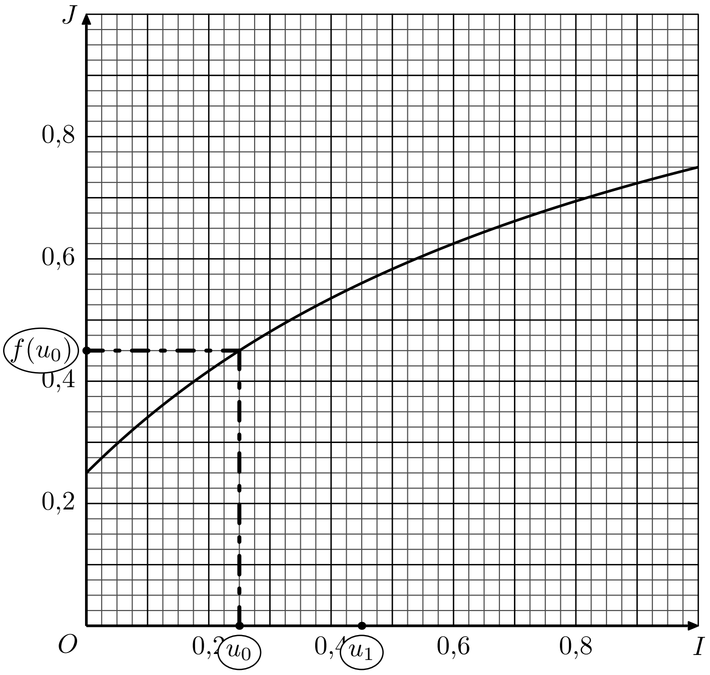
Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par la relation :
$$f(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{x+1}$$

1. a. Etablir les valeurs suivantes :
$$f\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{9}{20} \quad ; \quad (f\circ f)\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{65}{116}$$

   b. Déterminer la valeur de : $\quad (f\circ f\circ f)\Big(\dfrac{1}{4}\Big)$

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



2. a. Donner les valeurs approchées au millième près des nombres suivants :

- $u_0 = \dfrac{1}{4} = \ldots\ldots$
- $u_1 = \dfrac{9}{20} \simeq \ldots\ldots$
- $u_2 = \dfrac{65}{116} \simeq \ldots\ldots$
- $u_3 = \dfrac{441}{724} \simeq \ldots\ldots$

b. Placer les valeurs u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

c. Placer les valeurs $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ sur l'axe des ordonnées.

3. a. Tracer le segment reliant les deux points $A_1(u_1\,;0)$ et $B_1(0\,;f(u_0))$.
Quelle est la nature du triangle OA_1B_1.

b. Pour i allant de 1 à 3, on définit les points :
$A_i(u_i\,;0)$ et $B_i\big(0\,;f\big(u_{i-1}\big)\big)$
De quelles natures sont les triangles OA_iB_i ?

c. Placer les nombres u_4 et u_5 sur l'axe des abscisses définis par les relations :
$f(u_3) = u_4 \quad ; \quad f(u_4) = u_5$

4. *Génération des termes de la suite :*

a. Saisir et exécuter ce programme dans le langage de programmation de votre choix.

```
x ← 0,25
Pour i allant de 0 à 100
    x ← 5/4 − 1/(x+1)
Fin Pour
```

En fin d'exécution, quelle est la valeur de la variable x ?

b. Quelle conjecture peut-on faire sur les termes de cette suite ?

Exercice 21

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (t_n) dont les premiers termes ont été donnés dans la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	t_n
2	0	3	5	6
3	1	7	8	4
4	2	15	10	-8
5	3	31	11	-16
6	4	63	11	0
7	5	255	10	32

1. Vérifier que les formules ci-dessous sont vérifiées par les valeurs du tableau :

- $B5=2*B4+1$
- $C3=C2-A2+3$
- $D6=D5-2*D4$

2. Utiliser ces formules pour en déduire la formule de récurrence définissant chacun des termes de ces suites.

Exercice 22

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 3{\cdot}u_n + 1 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

On définit la suite (a_n) définie par la relation :
$a_n = u_n + \dfrac{1}{2}$

b. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad a_{n+1} = 3{\cdot}a_n$

c. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Donner les valeurs de ses éléments caractéristiques.

d. En remarquant l'égalité $u_{n+1}-u_n=a_{n+1}-a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + 2{\cdot}n + 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur les termes de la suite (v_n) ?

On définit la suite (w_n) définie par :
$w_n = v_{n+1} - v_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. Justifier que la suite (w_n) est une suite arithmétique. On précisera les èlèments caractéristiques de cette suite.

d. Déterminer l'expression de la somme S des n premiers termes de la suite (w_n).

e. En remarquant l'égalité $\left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k\right)+v_0=v_n$, en déduire l'expression du terme v_n en fonction de n.

f. Confirmer la conjecture faite à la question b..