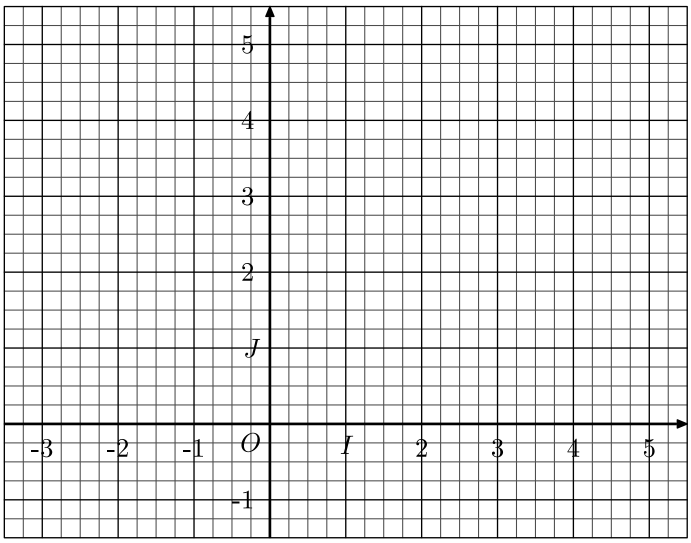
Produit scalaire : projections et coordonnées.

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé.



On considère les points A, B et C définis par :

$A(-3;1)$; $B(4;-1)$; $C(1;3)$

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.

2. Soit J l'image du point A par la symétrie centrale de centre C.

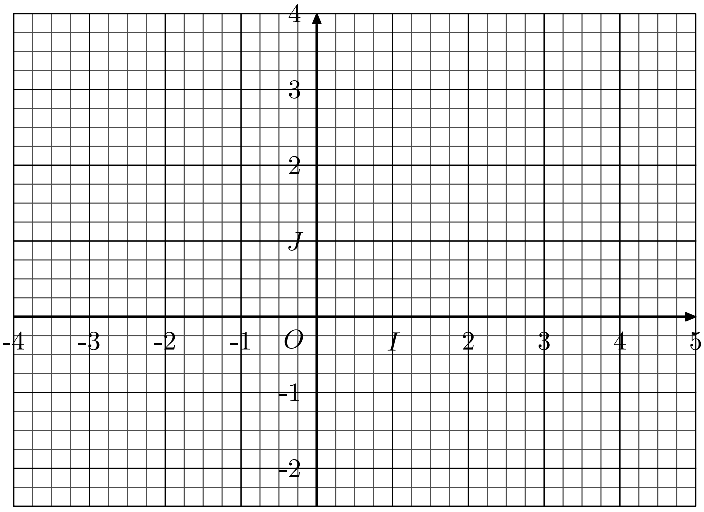
   a. Donner une relation vectorielle vérifiée par les points A, C et J

   b. Déterminer les coordonnées du point J.

3. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

On considère le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé.



1. On rappelle la formule de la distance entre deux points :

   $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

   On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées :

   $A(-3;2)$; $B(-2;-2)$; $C(2;-1)$

   a. Déterminer les distances AB, AC et BC.

   b. Etablir que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur, on définit la norme du vecteur $\vec{u}$ comme le nombre $\|\vec{u}\|$ défini par :

   $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

   On considère les deux points E et F de coordonnées :

   $E(-1;2)$; $G(4;3)$

   et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées :

   $\vec{u}(4;-1)$; $\vec{v}(1;2)$

   a. Déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   b. Déterminer les coordonnées des points F et H vérifiant les deux égalités vectorielles :

   $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$; $\overrightarrow{HG} = \vec{v}$

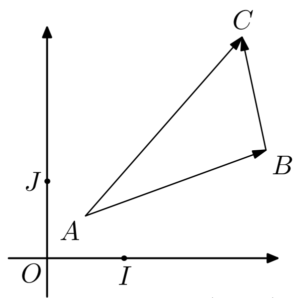
   c. Exprimer le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide des points E, F et G ?

   d. Le triangle EFG est-il rectangle ?

Exercice 3

On considère le plan muni du repère orthonormé $(O;I;J)$ et trois points A, B, C du plan.
On ne connait pas les coordonnées des points A et B mais on note :

$\overrightarrow{AB}(x;y)$; $\overrightarrow{BC}(x';y')$



1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2. Exprimer la longueur de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ en fonction de x, x', y, y'. Elles se notent respectivement $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les droites (AB) et (BC) soient perpendiculaires.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

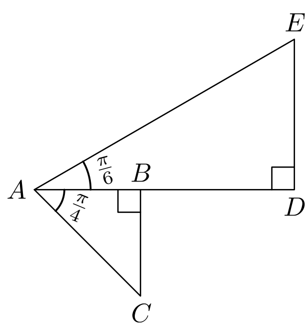
$A(-3;2)$; $B(-2;-2)$; $C(2;-1)$; $D(1;3)$

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 5

On considère la figure ci-dessous où : $AE = 4\,cm$ et $AC = 2\,cm$



1. On considère le repère orthonormé, orienté dans le sens direct, dont l'unité mesure $1\,cm$, et dont l'axe des abscisses est la droite (AD).

   a. Montrer que $E\left(2\sqrt{3};2\right)$

   b. Déterminer les coordonnées des autres points de cette figure.

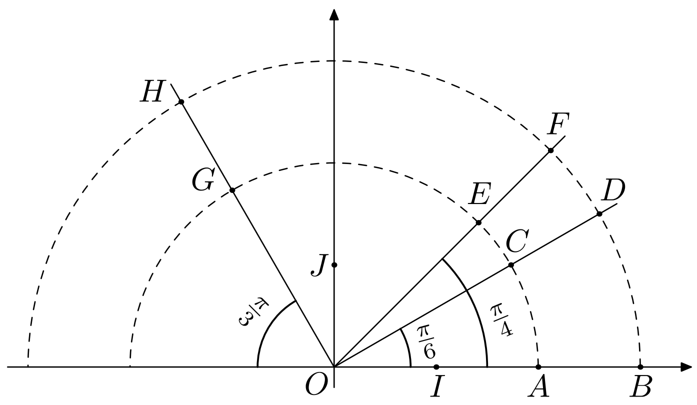
2. Déterminer la valeur des produits scalaires ci-dessous :

   a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ c. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

3. Comment s'appelle le point D relativement au point E ?
Comment s'appelle le point B relativement au point C ?

Exercice 6

On considère le repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



Deux demi-cercles sont tracés : $OA = 2\,cm$ et $OB = 3\,cm$

1. Déterminer les coordonnées des points figurants sur cette figure.

2. Déterminer la valeur des produits scalaires suivants :

   a. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ b. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$

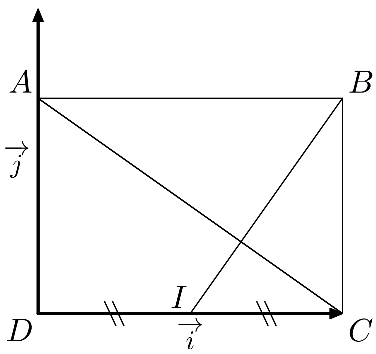
   c. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}$ d. $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OG}$

Exercice 7*

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$AB = a$; $AD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

On note I le milieu de $[CD]$. Une représentation est donnée ci-dessous :



On considère le plan munit d'un repère orthonormé $(D\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ dans le sens direct où $\vec{i} = \overrightarrow{DC}$:

1. Déterminer les coordonnées des différents points de cette figure.

2. En déduire que les droites (AC) et (IB) sont perpendiculaires.

Question subsidiaire : reprendre la question 2. sans utiliser les coordonnées des points.

Exercice 8*

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère :

$A\,(3\,;2)$; $B\,(5\,;-1)$; $C\,(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

3. Calculer les distances AB, AC et BC.

4. Déterminer la mesure des 3 angles ABC.

Exercice 9

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:

1. Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respective $(-2\,;3)$, $(1\,;-4)$ et $(0\,;-2)$

   a. Déterminer les valeurs de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.

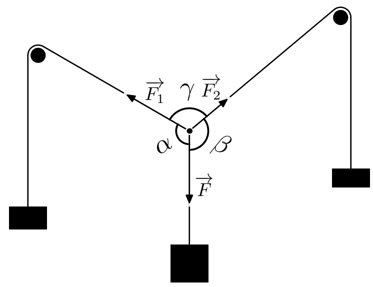
   b. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ au centième près de degrés.

   c. A l'aide d'un dessin à main levé, donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\right)$ où $D\,(3\,;5)$, $E\,(-1\,;0)$, $F\,(2\,;4)$ au centième de degré près.

Exercice 10

Le schéma ci-dessous représente un système de poulis à l'équilibre. Chacun des poids exercice sur le noeud proportionnellement à son poids.



On donne les informations suivantes :

$\left\|\vec{F_1}\right\| = 8\,N$; $\left\|\vec{F_2}\right\| = 6\,N$; $\left\|\vec{F}\right\| = 12\,N$

On note R la résultante de toutes ces forces :

$R = \vec{F} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$

1. Déterminer en fonction de $alpha$, β et γ les trois produits scalaires suivants :

   $\vec{R} \cdot \vec{F_1}$; $\vec{R} \cdot \vec{F_2}$; $\vec{R} \cdot \vec{F}$

2. On suppose maintenant que ce système est en position d'équilibre, ainsi on a $\vec{R} = \vec{0}$

   a. Montrer que les mesures des angles vérifient le système suivant :

   $$\begin{cases} 4\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\beta + 6 = 0 \\ 6\cdot\cos\alpha + 3\cdot\cos\gamma + 4 = 0 \\ 6\cdot\cos\beta + 4\cdot\cos\gamma + 3 = 0 \end{cases}$$

   b. En déduire les valeurs de α, β, γ pour la position d'équilibre.