Correction 1

D'après son tableau de variation, la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[-1\,;4\right[$. On en déduit que la tangente au point d'abscisse 1 a un sens de variation croissant : le coefficient directeur de cette tangente est positif.

Le nombre dérivée de la fonction f en $x=1$ est positif.

Correction 2

D'après le tableau de signe, la fonction f' admet une image négative pour $x=2$.

On en déduit que le coefficient directeur de la tangente (T) est négative : la tangente (T) est décroissante.

Correction 3

Etudions la courbe $\mathscr{C}_f$:

- La fonction f est décroissante sur $\left[-8\,;-1\right]$: la fonction f' doit être négative sur l'intervalle.
  On en retient que les courbes $\mathscr{C}'_3$ et $\mathscr{C}'_4$ comme courbe représentative de la fonction f'.
- La fonction f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2, on en déduit :
  $f'(2) = 0$.

  On en déduit que la fonction f' admet pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}'_3$.

Correction 4

1. Voici le tableau de signe de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Variation de g		↗		↘		↗	

2. Voici le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de f		↗		↘		↗	

On en déduit le tableau de signe de la fonction h :

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 5

- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $-0{,}5$. Or, aucune fonction ne s'annule en 0,5. Dans cet exercice, la fonction f représente forcemment la dérivée d'un fonction.

  La fonction f s'annule en -2 et en 1, ainsi la courbe de la fonction associée à f doit posséder deux tangentes horizontales pour ces valeurs. On en déduit que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction $\mathscr{C}_j$ et $\mathscr{C}_\ell$

  La fonction f est positive sur l'intervalle $\left[-4\,;-2\right]$: la fonction associée doit être croissante sur cet intervalle. On en déduit la relation :
  $\ell' = f$
- De même, la courbe $\mathscr{C}_h$ admet trois tangentes horizontales. Or, aucune des fonctions présentent dans cet exercice admet trois racines : la fonction h représente la dérivée d'une fonction.

  La fonction h s'annule en -2 et en 1 : la courbe de la fonction associée doit posséder deux tangentes horizontales aux points d'abscisses -2 et 1. Il ne reste plus que la fonction j.

  On a la relation : $j'=h$
- Ainsi, les fonction g et k sont associées entre elles.

  La fonction k s'annule en 4 mais la courbe $\mathscr{C}_g$ n'admet pas de tangente horizontale au point d'abscisse 4. La fonction k n'est pas la dérivée de la fonction g.

  Par élimination des cas possibles, on en déduit que la fonction g est la dérivée de la fonction k :
  $k' = g$

Correction 6

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation ci-dessous :

x	-4		-2		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		4
Variation de f	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$

2. a. On observe que le coefficient directeur de la droite (T_1), tangente au point d'abscisse -3 de la courbe $\mathscr{C}_f$, est positif.

   b. Le coefficient directeur de la droite (T_2) est négatif

   c. Le coefficient directeur de la droite (T_3) est nul : la tangente au point d'abscisse -2 est horizontale.

3. a. On a $f'(-1)<0$ car la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse -1 est une droite décroissante.

   b. On a $f'(2)>0$ car la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse -1 est une droite croissante.

   c. On a $f'(2{,}5)=0$ car la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse -1 est une droite constante.

4. Graphiquement et par des raisonnement similaires à la question précédente, on obtient le tableau de signe suivant :

x	-4		-2		$0{,}5$		$2{,}5$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Correction 7

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation de la fonction f

x	-3		-1		3		6
Variation de f		↗		↘		↗	

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'une somme ; on dérive donc l'expression de la fonction f terme à terme :

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(3x^2) - (2x) - 3 = x^2 - 2x - 3$$

b. L'expression de la fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-2)^2 - 4\times 1\times(-3) = 4 + 12 = 16$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-2)-4}{2\times 1} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-2)+4}{2\times 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Le signe du coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On remarque une correspondance entre signe de la dérivée et variation de la fonction :

- Lorsque la fonction f' est positive alors la fonction f est croissante ;
- Lorsque la fonction f' est négative alors la fonction f est décroissante.

Correction 8

1. Le dénominateur est un polynôme du second degré ; son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 2\times 1 = -7$$

Le discriminant est strictement négatif ; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :

$$u(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 + x + 1$$

qui admettent pour dérivée les fonctions :

$$u'(x) = 6x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 4x + 1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(6x-2)\cdot(2x^2+x+1) - (3x^2-2x-2)\cdot(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(12x^3+6x^2+6x\text{-}4x^2\text{-}2x\text{-}2)\text{-}(12x^3+3x^2\text{-}8x^2\text{-}2x\text{-}8x\text{-}2)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(12x^3+2x^2+4x-2) - (12x^3-5x^2-10x-2)}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{7x^2+14x}{(2x^2+x+1)^2}$$

b. Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur ; on peut factoriser le numérateur :

$$7x^2 + 14x = 7x(x+2)$$

Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif ; on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Effectuons les calculs suivantes :

- $f(-2) = \dfrac{3\times(-2)^2 - 2\times(-2) - 2}{2\times(-2)^2 + (-2) + 1} = \dfrac{14}{7} = 2$
- $f(0) = \dfrac{3\times 0^2 - 2\times 0 - 2}{2\times 0^2 + 0 + 1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	\$		−2		0		+1
Variation de f	$\frac{3}{2}$	↗	2	↘	−2	↗	$\frac{3}{2}$

3. Puisque $2 > \frac{3}{2}$ et $-2 < -\frac{3}{2}$ et d'après le tableau de variation :

- 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x = -2$;
- -2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x = 0$;

Correction 9

1. La seule contrainte sur cette formule est que $\sqrt{x}$ soit définie ; ainsi l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

2. a. L'expression de la fonction f est définie par le produit des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 5x^2 + 5x - 4 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 10x + 5 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= (10x+5)\cdot\sqrt{x} + (5x^2+5x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x(10x+5)}{2\sqrt{x}} + \frac{5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{20x^2+10x+5x^2+5x-4}{2\sqrt{x}} = \frac{25x^2+15x-4}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

b. La dérivée s'écrit sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est positif ; pour étudier son signe, il suffit de connaître le signe du numérateur.

Le polynôme du second degré définissant ce quotient a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 15^2 - 4\times 25\times(-4) = 625 > 0$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet donc les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15-25}{50} = \frac{-40}{50} = -\frac{4}{5} \qquad \Big| \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15+25}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$25x^2+15x-4$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$			|		||	$-$	0	$+$	

3. Calculons l'image de $\frac{1}{5}$ par la fonction f :

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{5}\Big) &= \Big[5\times\Big(\frac{1}{5}\Big)^2 + 5\times\frac{1}{5} - 4\Big]\sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= \Big(5\times\frac{1}{25} + 1 - 4\Big)\sqrt{\frac{1}{5}} = \Big(\frac{1}{5} + 1 - 4\Big)\sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= -\frac{14}{5}\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{14\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

Voici le tableau de variation de la fonction f :

x	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
Variation de f	0 ↘	$-\frac{14\sqrt{5}}{25}$	↗ $+\infty$

Correction 10

1. Le second facteur du premier terme est défini sur $\mathbb{R}$, alors que le premier, la racine carrée, n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$$

2. L'expression de la fonction f est données sous la forme :

$$f(x) = u(x)\cdot v(x) + \frac{1}{2}$$

où les fonctions u et v sont données sous la forme :

$$u(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad v(x) = -5x^2 - 5x - 1$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad v'(x) = -10x - 5$$

A l'aide de la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\big(-5x^2-5x-1\big) + \sqrt{x}\big(-10x-5\big) + 0 \\ &= \frac{-5x^2-5x-1+2\big(\sqrt{x}\big)^2\big(-10x-5\big)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-5x^2-5x-1+\big(-20x^2-10x\big)}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-25x^2-15x-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

3. Commençons par étudier le signe de la fonction dérivée ; étant définie par un quotient dont le dénominateur est positif, le signe du quotient ne dépend que de son numérateur. Etudions le polynôme du second degré définissant le numérateur :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4(-25)\times(-1) \\ &= 225 - 100 = 125 \end{aligned}$$

On a la simpliification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Le discriminant de ce polynôme étant positif, il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15-5\sqrt{5}}{-50} = \frac{-3+\sqrt{5}}{10} \qquad \Big| \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15+5\sqrt{5}}{-50} = \frac{-3-\sqrt{5}}{10}$$

Le coefficient du terme du second degré étant nul, on obtient le tableau suivant de la fonction dérivée :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{10}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{10}$		0		$+\infty$
$-25x^2-15x-1$		$-$	|	$+$	|	$-$	|	$-$	
f'			|		|		|	$-$	

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
Variation de f	$\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$

4. a. On en déduit que cette fonction ne s'annule qu'une fois puisqu'elle strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$; sa courbe n'interceptera l'axe des abscisses qu'en un seul point

b. Le calcul sur les valeurs approchées permettent d'écrire :

$$f\Big(\frac{1}{10}\Big) \simeq 0{,}0098 \quad ; \quad f\Big(\frac{15}{100}\Big) \simeq -0{,}22$$

Correction 11

Le point N est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse x. Ainsi, le point N a pour coordonnées :

$$N\big(x\,;f(x)\big)$$

Ainsi, on a les mesures suivantes du rectangle $MNPQ$:
$PQ = 2x \quad ; \quad MN = f(x)$

Notons $\mathcal{A}(x)$ l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction de x. L'expression de $\mathcal{A}$ est donnée par :
$\mathcal{A}(x) = MQ \times MN = 2x \times (4 - x^2) = 8x - 2x^3$

Cette fonction admet pour dérivée :
$\mathcal{A}'(x) = 8 - 2\times(3x^2) = 8 - 6x^2$

Etudions le polynôme $8-6x^2$. On a la factorisation suivante :
$$8 - 6x^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 - \left(\sqrt{6}x\right)^2 = \left(\sqrt{8} + \sqrt{6}x\right)\left(\sqrt{8} - \sqrt{6}x\right)$$
Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$\sqrt{8} + \sqrt{6}{\cdot}x_1 = 0$	$\sqrt{8} - \sqrt{6}{\cdot}x_2 = 0$
$\sqrt{6}{\cdot}x_1 = -\sqrt{8}$	$-\sqrt{6}{\cdot}x_2 = -\sqrt{8}$
$x_1 = \dfrac{-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$	$x_2 = \dfrac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{6}}$
$x_1 = \dfrac{-\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$	$x_2 = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$
$x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
$x_1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Le coefficient du terme du secon degré étant négatif, ce polynôme admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$8-6x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, la fonction $\mathcal{A}$ admet le tableau de variation suivant sur l'intervalle $\left[0\,;2\right]$:

La fonction $\mathcal{A}$ admet les images suivantes :

- $\mathcal{A}(0) = 8\times 0 - 2\times 0^3 = 0$
- $\mathcal{A}(2) = 8\times 2 - 2\times 2^3 = 16 - 16 = 0$
- $\mathcal{A}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8\times\frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$
$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} - 2\times\frac{8\times 3{\cdot}\sqrt{3}}{27} = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{48\sqrt{3}}{27}$$
$$= \frac{144\sqrt{3}}{27} - \frac{48\sqrt{3}}{27} = \frac{(144-48)\sqrt{3}}{27} = \frac{96\sqrt{3}}{27} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
Variation de $\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

On en déduit que l'aire du rectangle $MNPQ$ est maximale lorsque x vaut $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Correction 12

1. Le point M a pour abscisse x et appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$; ainsi, le point M a pour coordonnées :
$M\left(x\,;\frac{1}{x^2-x+1}\right)$

Ainsi, le rectangle formé par le point M a pour dimensions x et $\dfrac{1}{x^2-x+1}$. Son aire a pour valeur :
$$\mathcal{A}(x) = x\times\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x}{x^2-x+1}$$

2. **a.** L'expression de la fonction $\mathcal{A}$ est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x^2 - x + 1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2x - 1$
La fonction $\mathcal{A}$ admet pour dérivée la fonction $\mathcal{A}'$ dont l'expression est donnée par la formule :
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$
$$= \frac{1\times(x^2-x+1) - x\times(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$
$$= \frac{x^2-x+1-2x^2+x}{\left(x^2-x+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

b. Le dénominateur de ce quotient est strictement positif sur $\mathbb{R}_+$.
Le polynôme $-x^2+1$ admet pour racines -1 et 1. Son coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signe suvant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-x^2+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}'(x)$						$+$	0	$-$	

c. On a la valeur suivante :
$$\mathcal{A}(1) = \frac{1}{1^2-1+1} = \frac{1}{1} = 1$$
Le signe de la fonction dérivée permet de déterminer le sens de variation de la fonction f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Variation de $\mathcal{A}$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

3. Pour que l'aire du rectangle soit maximale, il est nécessaire que le point M ait pour abscisse 1.

Correction 13

1. En notant x l'abscisse du point M, la longueur du rectangle $OPMN$ a pour valeur :
$OP = x$

Le point M appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ et a pour coordonnée :
$$M(x\,;f(x)) = \left(x\,;\frac{x+1}{3x-2}\right)$$
Ainsi, le rectangle $OPMN$ a pour largeur :
$$ON = \frac{x+1}{3x-2}$$
Ainsi, le triangle $OPMN$ a pour aire :
$$\mathcal{A}(x) = ON\times OP = \frac{x+1}{3x-2}\times x = \frac{x^2+x}{3x-2}$$

2. La fonction $\mathcal{A}$ associant à chaque nombre x l'aire du rectangle $OPMN$ a son expression définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x^2 + x \quad ; \quad v(x) = 3x - 2$
qui admettent pour dérivée :

$u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v'(x) = 3$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction $\mathcal{A}'$:

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot (3x-2) - (x^2+x) \cdot 3}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(6x^2-4x+3x-2)-(3x^2+3x)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x^2-x-2-3x^2-3x}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2-4x-2}{(3x-2)^2}$$

3. Le dénominateur de la fonction $\mathcal{A}'$ est positif sur $\Big[\frac{2}{3}\,;+\infty\Big[$. Le signe de $\mathcal{A}'$ ne dépend que de son numérateur.

Etudions le polynôme du second degré $3x^2-4x-2$ qui admet pour discriminant :

$\Delta = b^2-4 \cdot a \cdot c = (-4)^2-4 \times 3 \times (-2) = 16+24 = 40$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-4)-2\sqrt{10}}{2 \times 3} = \frac{4-2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \cdot (2-\sqrt{10})}{2 \times 3} = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-4)+2\sqrt{10}}{2 \times 3} = \frac{4+2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 \cdot (2+\sqrt{10})}{2 \times 3} = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, ce polynôme admet le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x-2$		+	0	−	||	−	0	+	

On obtient l tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\Big]\frac{2}{3}\,;+\infty\Big[$

x	$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
Variation de f		↘		↗	

4. A l'aide du tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$, on en déduit que l'aire minimale du rectangle $OPMN$ est atteinte lorsque le point M a pour abscisse $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$

Correction 14

1. x représente la mesure de la longueur AG : x doit être positif.

La droite (CO) étant un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit la mesure $AO = 3\,m$.
Le point G appartenant au segment $[AO]$, on en déduit que la longueur AO ne peut dépasser $3\,m$.

On en déduit que la variable x prend ses valeurs dans l'intervalle $\big[0\,;3\big]$.

2. Le rectangle $DEFG$ a pour longueur GF et pour hauteur GD.

- On a : $\quad AG+GF+FB = 6$
  $x+GF+x = 6$
  $GF = 6-2x$
- Le point D est le point d'abscisse x appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$. Il a pour coordonnées $(x\,;f(x))$.
  Le point G est un point de l'axe des abscisse ayant x pour abscisse. Il a pour coordonnées $G(x\,;0)$.
  On en déduit la mesure de la longueur : $\quad DG = f(x)$.

Ainsi, le rectangle $DEFG$ a pour aire :

$$\mathcal{A}(x) = L \times \ell = \big(6-2x\big) \times f(x) = (6-2x) \times \Big(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\Big)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2+9x+\frac{1}{2}x^3-3x^2 = \frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+9x$$

3. **a.** La fonction $\mathcal{A}$ admet pour fonction dérivée :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2) - \frac{9}{2} \cdot (2x) + 9 = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 9x + 9$$

Le polynôme du second degré définissant la fonction $\mathcal{A}'$ admet pour discriminant :

$$b^2-4 \cdot a \cdot c = (-9)^2-4 \times \frac{3}{2} \times 9 = 81-54 = 27$$

On a la simplification suivante :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)-3\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{3} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{3} = 3-\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)+3\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{9+3\sqrt{3}}{3} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{3} = 3+\sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
$\frac{3}{2} \cdot x^2-9x+9$		+	0	−	0	+	

On en déduit le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$ et le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur $\big[0\,;3\big]$:

x	0		$3-\sqrt{3}$		3
Signe de $\mathcal{A}'$		+	0	-	
Variation de $\mathcal{A}$	0	↗		↘	0

b. On en déduit que l'aire du rectangle $DEFG$ est maximale lorsque le point G a pour abscisse $3-\sqrt{3}$.

Correction 15

Notons x l'abscisse du point M. Le point M étant un point de la courbe $\mathscr{C}_f$, il a pour coordonnées :

$$M\big(x\,;f(x)\big) = \big(x\,;x^2+x\big)$$

Afin de déterminer la distance JM minimale, nous allons plutôt nous intéresser à la valeur de JM^2 :

$$\begin{aligned}JM^2 &= (x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2\\ &= (x-0)^2 + (x^2+x-1)^2\\ &= x^2 + (x^2+x-1)(x^2+x-1)\\ &= x^2 + (x^4+x^3-x^2+x^3+x^2-x-x^2-x+1)\\ &= x^4+2x^3-2x+1\end{aligned}$$

Considérons la fonction d définie par :

$$d(x) = x^4+2x^3-2x+1$$

Cette fonction admet pour dérivée :

$$d'(x) = 4{\cdot}x^3 + 2{\times}(3x^2) - 2 = 4x^3+6x^2-2$$

La factorisation proposée dans l'énoncé donne :

$$= 2(x+1)^2(2x-1)$$

Le facteur $(x+1)^2$ étant positif et ne s'annulant qu'en -1, on obtient le tableau de signe de la fonction d' :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction d admet le tableau de variation suivant :

x	-∞		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variation de d		↘		↘		↗	

On en déduit que la valeur de JM^2 est minimale pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la distance JM est minimale pour $x=\dfrac{1}{2}$.

Correction 16

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un quotient dont le dénominateur s'annule en 1.
On en déduit que la fonction f admet pour ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. L'éxpression de la fonction d est donnée sous la forme du quotient de la fonction u par v définies par :
$u(x) = -x^2-3{\cdot}x+1 \quad ; \quad v(x) = x-1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -2{\cdot}x-3 \quad ; \quad v'(x) = 1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\ &= \frac{\big(-2{\cdot}x-3\big)\big(x-1\big) - \big(-x^2-3{\cdot}x+1\big){\cdot}1}{\big(x-1\big)^2}\\ &= \frac{-2{\cdot}x^2+2{\cdot}x-3{\cdot}x+3+x^2+3{\cdot}x-1}{\big(x-1\big)^2} = \frac{-x^2+2{\cdot}x+2}{\big(x-1\big)^2}\end{aligned}$$

3. Le numérateur de l'expression de la fonction f' est un polynôme du second degré qui admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4{\times}(-1){\times}2 = 4+8 = 12$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2{\times}(-1)} = \frac{-2{\cdot}\big(1+\sqrt{3}\big)}{-2} = 1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2{\times}(-1)} = \frac{-2{\cdot}\big(1-\sqrt{3}\big)}{-2} = 1-\sqrt{3}$$

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2-3{\cdot}x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\big(x-1\big)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

4. On en déduit le tableau de variation de la fonction f :

x	-∞		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
Variation de f		↘		↗	||	↗		↘	

Correction 17

Les droites (NM) et (NO) sont alignées.
Les points N, P, M et les points N, I, O sont dans le même ordre.
D'après le théorème de Thalès, on a les égalités des rapports de longueurs :

$$\frac{NI}{NO} = \frac{NP}{NM} = \frac{PI}{MO}$$

On s'intéresse à l'égalité :

$$\frac{NI}{NO} = \frac{PI}{MO}$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{PI}{1-x}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$x{\cdot}\big(1-x\big) = \big(x+1\big){\cdot}PI$$

$$PI = \frac{x{\cdot}\big(1-x\big)}{x+1}$$

$$PI = \frac{x-x^2}{x+1}$$

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x-x^2}{x+1}$$

qui permet d'obtenir l'ordonnée du point P.

La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x) = x-x^2 \quad ; \quad v(x) = x+1$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1-2{\cdot}x \quad ; \quad v'(x) = 1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{\big(1-2\cdot x\big)\cdot\big(x+1\big)-\big(x-x^2\big)\cdot 1}{\big(x+1\big)^2}$$

$$=\frac{x+1-2\cdot x^2-2\cdot x-x+x^2}{\big(x+1\big)^2}=\frac{-x^2-2\cdot x+1}{\big(x+1\big)^2}$$

Etudions le polynôme $-x^2-2\cdot x+1$ du numérateur. Son discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-2)^2-4\times(-1)\times 1=4+4=8$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-2)-2\cdot\sqrt{2}}{2\times(-1)}=\frac{-2\cdot\big(-1+\sqrt{2}\big)}{-2}=-1+\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-2)+2\cdot\sqrt{2}}{2\times(-1)}=\frac{-2\cdot\big(-1-\sqrt{2}\big)}{-2}=-1-\sqrt{2}$$

On en déduit le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2-2\cdot x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\big(x+1\big)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-x^2-2\cdot x+1}{\big(x+1\big)^2}$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de signe de la fonction f' sur $\big[0\,;2\big]$:

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variation suivant ;

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, le point P a son ordonnée maximale lorsque l'abscisse du point P vaut $x=-1+\sqrt{2}$