### **Correction 1**

D'après son tableau de variation, la fonction f est croissante sur l'intervalle [-1;4[. On en déduit que la tangente au point d'abscisse 1 a un sens de variation croissant : le coefficient directeur de cette tangente est positif.

Le nombre dérivée de la fonction f en x=1 est positif.

# Correction 2

D'après le tableau de signe, la fonction f' admet une image négative pour x=2.

On en déduit que le coefficient directeur de la tangente (T) est négative : la tangente (T) est décroissante.

# **Correction 3**

Etudions la courbe  $\mathcal{C}_f$ :

- La fonction f est décroissante sur [-8;-1]: la fonction f' doit être négative sur l'intervalle.
  On en retient que les courbes \( \mathscr{C}'\_3 \) et \( \mathscr{C}'\_4 \) comme courbe représentative de la fonction f'.
- La fonction f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2, on en déduit : f'(2) = 0.

On en déduit que la fonction f' admet pour représentation graphique la courbe  $\mathscr{C}'_3$ .

### Correction 4

1. Voici le tableau de signe de la fonction f:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f(x)	+	0	_	•	+

On en déduit le tableau de variation de la fonction g:

x	-∞	-1	3	$+\infty$
$\begin{array}{c} \text{Variation} \\ \text{de } g \end{array}$				*

2. Voici le tableau de variation de la fonction f:

x	-∞	<del>-</del> 7	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\begin{array}{c} \text{Variation} \\ \text{de } f \end{array}$	/			*

On en déduit le tableau de signe de la fonction h :

x	$-\infty$	-7		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
h(x)	+	0	_	ø	+

#### Correction 5

• La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse -0.5. Or, aucune fonction ne s'annule en 0.5. Dans cet exercice, la fonction f représente forcemment la dérivée d'un fonction.

La fonction f s'annule en -2 et en 1, ainsi la courbe de la fonction associée à f doit posséder deux tangentes horizontales pour ces valeurs. On en déduit que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction  $\mathscr{C}_i$  et  $\mathscr{C}_\ell$ 

La fonction f est positive sur l'intervalle  $\left[-4\,;-2\right]$ : la fonction associée doit être croissante sur cet intervalle. On en déduit la relation :

$$\ell' = f$$

• De même, la courbe  $\mathcal{C}_h$  admet trois tangentes horizontales. Or, aucune des fonctions présentent dans cet exercice admet trois racines : la fonction h représente la dérivée d'une fonction.

La fonction h s'annule en -2 et en 1: la courbe de la fonction associée doit posséder deux tangentes horizontales aux points d'abscisses -2 et 1. Il ne reste plus que la fonction j.

On a la relation : j' = h

ullet Ainsi, les fonction g et k sont associées entre elles.

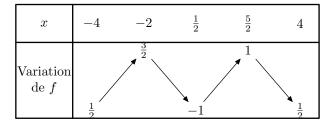
La fonction k s'annule en 4 mais la courbe  $\mathcal{C}_g$  n'admet pas de tangente horizontale au point d'abscisse 4. La fonction k n'est pas la dérivée de la fonction g.

Par élimination des cas possibles, on en déduit que la fonction g est la dérivée de la fonction k:

$$k' = g$$

# Correction 6

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation cidessous :



- 2. a. On observe que le coefficient directeur de la droite  $(T_1)$ , tangente au point d'abscisse -3 de la courbe  $\mathscr{C}_f$ , est positif.
  - b. Le coefficient directeur de la droite  $(T_2)$  est négatif
  - c. Le coefficient directeur de la droite  $(T_3)$  est nul : la tangente au point d'abscisse -2 est horizontale.
- 3. a. On a f'(-1) < 0 car la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet au point d'abscisse -1 est une droite décroissante.
  - b. On a f'(2)>0 car la tangente à la courbe  $\mathscr{C}_f$  admet au point d'abscisse -1 est une droite croissante.
  - c. On a f'(2,5)=0 car la tangente à la courbe  $\mathscr{C}_f$  admet au point d'abscisse -1 est une droite constante.
- 4. Graphiquement et par des raisonnement similaires à la question précédente, on obtient le tableau de signe suivant :

x	-4	-2		0,5		2,5		4
f'(x)	+	0	_	0	+	0	_	

### Correction 7

1. Graphiquement, on obtient le tableau de variation de la fonction f

x	-3	-1	3	6
$\begin{array}{c} \text{Variation} \\ \text{de } f \end{array}$				<b>A</b>

a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'une somme; on dérive donc l'expression de la fonction f terme à terme :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (3x^2) - (2x) - 3 = x^2 - 2x - 3$$

b. L'expression de la fonction f' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$
  
On a la simplification :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$ 

Le discriminant étant strictement positif, le polynôme admet les deux racines suivantes :

differ less deux racines suivantes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-(-2) - 4}{2 \times 1} \qquad = \frac{-(-2) + 4}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2 - 4}{2} \qquad = \frac{2 + 4}{2}$$

$$= \frac{-2}{2} \qquad = \frac{6}{2}$$

$$= -1 \qquad = 3$$

Le signe du coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
f'(x)	+	0	_	ø	+

- On remarque une correspondance entre signe de la dérivée et variation de la fonction :
  - Lorsque la fonction f' est positive alors la fonction f
  - Lorsque la fonction f' est négative alors la fonction fest décroissante.

# **Correction 8**

1. Le dénominateur est un polynôme du second degré; son discriminant est:

$$\Lambda = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7$$

Le discriminant est strictement négatif; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est  $\mathbb{R}$ .

a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :

$$u(x)=3x^2-2x-2$$
 ;  $v(x)=2x^2+x+1$  qui admettent pour dérivée les fonctions :

$$u'(x) = 6x - 2$$
 ;  $v'(x) = 4x + 1$ 

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f':

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$= \frac{\left(6x - 2\right) \cdot \left(2x^2 + x + 1\right) - \left(3x^2 - 2x - 2\right) \cdot \left(4x + 1\right)}{\left(2x^2 + x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(12x^3 + 6x^2 + 6x - 4x^2 - 2x - 2\right) - \left(12x^3 + 3x^2 - 8x^2 - 2x - 8x - 2\right)}{\left(2x^2 + x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(12x^3 + 2x^2 + 4x - 2\right) - \left(12x^3 - 5x^2 - 10x - 2\right)}{\left(2x^2 + x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{7x^2 + 14x}{\left(2x^2 + x + 1\right)^2}$$

b. Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur; on peut factoriser le numérateur :

$$7x^2 + 14x = 7x(x+2)$$

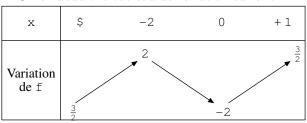
Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif; on obtient le tableau de signe suivant :

Effectuons les calculs suivantes :

• 
$$f(-2) = \frac{3 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) - 2}{2 \times (-2)^2 + (-2) + 1} = \frac{14}{7} = 2$$

• 
$$f(0) = \frac{3 \times 0^2 - 2 \times 0 - 2}{2 \times 0^2 + 0 + 1} = \frac{-2}{1} = -2$$

On en déduit le tableau de variation suivant :



- 3. Puisque  $2 > \frac{3}{2}$  et  $-2 < -\frac{3}{2}$  et d'après le tableau de varia-
  - 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour
  - $\bullet$  -2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour x=0:

### Correction 9

- 1. La seule contrainte sur cette formule est que  $\sqrt{x}$  soit définie; ainsi l'ensemble de définition de f est  $\mathbb{R}_+$ .
- a. L'expression de la fonction f est définie par le produit des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 5x^2 + 5x - 4$$
;  $v(x) = \sqrt{x}$ 

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 10x + 5$$
 ;  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f':

$$\begin{split} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (10x+5) \cdot \sqrt{x} + (5x^2 + 5x - 4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x(10x+5)}{2\sqrt{x}} + \frac{5x^2 + 5x - 4}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{20x^2 + 10x + 5x^2 + 5x - 4}{2\sqrt{x}} = \frac{25x^2 + 15x - 4}{2\sqrt{x}} \end{split}$$

b. La dérivée s'écrit sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est positif; pour étudier son signe, il suffit de connaître le signe du numérateur.

Le polynôme du second degré définissant ce quotient a pour discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 15^2 - 4 \times 25 \times (-4) = 625 > 0$$
  
On a la simplification : 
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{625} = 25$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet donc les deux racines suivantes :

$$x_{1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_{2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-15 - 25}{50} \qquad = \frac{-15 + 25}{50}$$

$$= \frac{-40}{50} \qquad = \frac{10}{50}$$

$$= -\frac{4}{5} \qquad = \frac{1}{5}$$

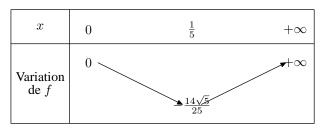
Le coefficient du terme du second degré étant positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	(	)	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$25x^2 + 15x - 4$	+	0	_	_	0	+
f'(x)				_	ø	+

3. Calculons l'image de  $\frac{1}{5}$  par la fonction f:

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left[5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{5} - 4\right] \sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$= \left(5 \times \frac{1}{25} + 1 - 4\right) \sqrt{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5} + 1 - 4\right) \sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$= -\frac{14}{5} \sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{14\sqrt{5}}{25}$$

Voici le tableau de variation de la fonction f:



### **Correction 10**

1. Le second facteur du premier terme est défini sur  $\mathbb{R}$ , alors que le premier, la racine carrée, n'est définie que sur  $\mathbb{R}_+$ :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$$

L'expression de la fonction f est données sous la forme :

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) + \frac{1}{2}$$

où les fonctions u et v sont données sous la forme :

$$u(x) = \sqrt{x}$$
 ;  $v(x) = -5x^2 - 5x - 1$ 

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
 ;  $v'(x) = -10x - 5$ 

A l'aide de la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( -5x^2 - 5x - 1 \right) + \sqrt{x} \left( -10x - 5 \right) + 0$$

$$= \frac{-5x^2 - 5x - 1 + 2(\sqrt{x})^2 \left( -10x - 5 \right)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-5x^2 - 5x - 1 + \left( -20x^2 - 10x \right)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-25x^2 - 15x - 1}{2\sqrt{x}}$$

Commençons par étudier le signe de la fonction dérivée; étant définie par un quotient dont le dénominateur est positif, le signe du quotient ne dépend que de son numérateur. Etudions le polynôme du second degré définissant le numérateur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4(-25) \times (-1)$$
$$= 225 - 100 = 125$$

On a la simpliification suivante :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ .

Le discriminant de ce polynôme étant positif, il admet deux racines:

$$x_{1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_{2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

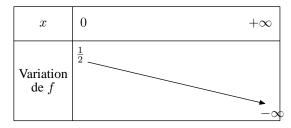
$$= \frac{15 - 5\sqrt{5}}{-50} \qquad = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{-50}$$

$$= \frac{-3 + \sqrt{5}}{10} \qquad = \frac{-3 - \sqrt{5}}{10}$$

Le coefficient du terme du second degré étant nul, on obtient le tableau suivant de la fonction dérivée :

x	$-\infty$ $\frac{-3}{1}$	$\frac{-\sqrt{5}}{0}$ $\frac{-3}{1}$	$\frac{\pm\sqrt{5}}{0}$ (	) +∞
$-25x^2 - 15x - 1$	_	+	_	_
f'				_

On obtient le tableau de variation suivant :



- a. On en déduit que cette fonction ne s'annule qu'une fois puisqu'elle strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ ; sa courbe n'interceptera l'axe des abscisses qu'en un seul point
  - b. Le calcul sur les valeurs approchées permettent

$$f\left(\frac{1}{10}\right) \simeq 0,0098$$
 ;  $f\left(\frac{15}{100}\right) \simeq -0.22$ 

#### Correction 11

Le point N est un point de la courbe  $\mathscr{C}_f$  ayant pour abscisse x. Ainsi, le point N a pour coordonnées :

Ainsi, on a les mesures suivantes du rectangle MNPQ:

$$PQ = 2x$$
 ;  $MN = f(x)$ 

Notons A(x) l'aire du rectangle MNPQ en fonction de x. L'expression de  $\mathcal{A}$  est donnée par :

$$\mathcal{A}(x) = MQ \times MN = 2x \times (4 - x^2) = 8x - 2x^3$$

Cette fonction admet pour dérivée :

$$A'(x) = 8 - 2 \times (3x^2) = 8 - 6x^2$$

Etudions le polynôme 
$$8-6x^2$$
. On a la factorisation suivante : 
$$8-6x^2=\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{6}x\right)^2=\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}x\right)\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}x\right)$$
 Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

why nome admics less deax raches survances:
$$\sqrt{8} + \sqrt{6} \cdot x_1 = 0$$

$$\sqrt{6} \cdot x_1 = -\sqrt{8}$$

$$x_1 = \frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{6}}$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{6}}$$

$$x_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Le coefficient du terme du secon degré étant négatif, ce polynôme admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$8 - 6x^2$	_	0	+	ø	_

Ainsi, la fonction  $\mathcal{A}$  admet le tableau de variation suivant sur l'intervalle [0;2]:

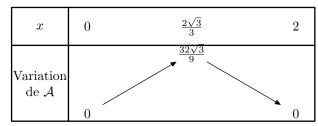
La fonction  $\mathcal{A}$  admet les images suivantes :

- $A(0) = 8 \times 0 2 \times 0^3 = 0$
- $\mathcal{A}(2) = 8 \times 2 2 \times 2^3 = 16 16 = 0$

$$\mathcal{A}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2 \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{3} - 2 \times \frac{8 \times 3 \cdot \sqrt{3}}{27} = \frac{16\sqrt{3}}{3} - \frac{48\sqrt{3}}{27}$$

$$= \frac{144\sqrt{3}}{27} - \frac{48\sqrt{3}}{27} = \frac{(144-48)\sqrt{3}}{27} = \frac{96\sqrt{3}}{27} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$



On en déduit que l'aire du rectangle MNPQ est maximale lorsque x vaut  $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ 

### Correction 12

1. Le point M a pour abscisse x et appartient à la courbe  $\mathscr{C}_f$ ; ainsi, le point M a pour coordonnées :

$$M\bigg(x;\frac{1}{x^2-x+1}\bigg)$$

Ainsi, le rectangle formé par le point M a pour dimensions x et  $\frac{1}{x^2-x+1}$ . Son aire a pour valeur :

$$A(x) = x \times \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{x}{x^2 - x + 1}$$

a. L'expression de la fonction  $\mathcal{A}$  est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x$$
 ;  $v(x) = x^2 - x + 1$ 

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1$$
 ;  $v'(x) = 2x - 1$ 

La fonction  $\mathcal{A}$  admet pour dérivée la fonction  $\mathcal{A}'$  dont l'expression est donnée par la formule :

expression est donnée par la formule :
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$= \frac{1 \times (x^2 - x + 1) - x \times (2x - 1)}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - 2x^2 + x}{\left(x^2 - x + 1\right)^2} = \frac{-x^2 + 1}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$

b. Le dénominateur de ce quotient est strictement positif

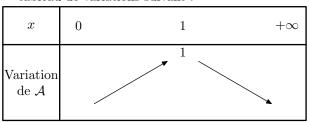
Le polynôme  $-x^2+1$  admet pour racines -1 et 1. Son coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on obtient le tableau de signe suvant :

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-x^2 + 1$	_	0	+		+	ø	_
$\mathcal{A}'(x)$		·			+	0	_

c. On a la valeur suivante :

$$\mathcal{A}(1) = \frac{1}{1^2 - 1 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Le signe de la fonction dérivée permet de déterminer le sens de variation de la fonction f. On obtient le tableau de variations suivant :



3. Pour que l'aire du rectangle soit maximale, il est nécessaire que le point M ait pour abscisse 1.

#### Correction 13

1. En notant x l'abscisse du point M, la longueur du rectangle OPMN a pour valeur :

$$OP = x$$

Le point M appartient à la courbe  $\mathscr{C}_f$  et a pour coor-

$$M(x; f(x)) = \left(x; \frac{x+1}{3x-2}\right)$$

Ainsi, le rectangle  $\stackrel{\searrow}{OPMN}$  a pour largeur :  $ON = \frac{x+1}{3x-2}$ 

$$ON = \frac{x+1}{3x-2}$$

Ainsi, le triangle 
$$OPMN$$
 a pour aire : 
$$\mathcal{A}(x) = ON \times OP = \frac{x+1}{3x-2} \times x = \frac{x^2+x}{3x-2}$$

2. La fonction  $\mathcal{A}$  associant à chaque nombre x l'aire du rectangle OPMN a son expression définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x^2 + x$$
 ;  $v(x) = 3x - 2$ 

qui admettent pour dérivée :

$$u(x) = 2x + 1$$
 ;  $v'(x) = 3$ 

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $\mathcal{A}'$ :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot (3x-2) - (x^2+x) \cdot 3}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(6x^2 - 4x + 3x - 2) - (3x^2 + 3x)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - x - 2 - 3x^2 - 3x}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2 - 4x - 2}{(3x-2)^2}$$

3. Le dénominateur de la fonction A' est positif sur  $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ . Le signe de  $\mathcal{A}'$  ne dépend que de son numéra-

Etudions le polynôme du second degré  $3x^2-4x-2$  qui admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 16 + 24 = 40$$
  
On a la simplification :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$ 

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux <u>racines</u> suivantes :

$$x_{1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-(-4) - 2\sqrt{10}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6}$$

$$= \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{10})}{2 \times 3}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{10}}{3}$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{3}$$

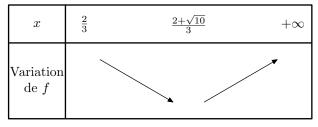
$$= \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{3}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, ce polynôme admet le tableau de signe ci-dessous :

x		$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$	4	2/3	$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$	$+\infty$
3	$x^2 - 4x - 2$	+	0	_	_	0	+

On obtient l'tableau de variation de la fonction  $\mathcal A$  sur l'intervalle  $\left]\frac23\,;\,+\infty\right[$ 



A l'aide du tableau de variation de la fonction  $\mathcal{A}$ , on en déduit que l'aire minimale du rectangle OPMN est atteinte lorsque le point M a pour abscisse  $\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ 

# Correction 14

1. x représente la mesure de la longueur AG: x doit être positif.

La droite (CO) étant un axe de symétrie de la courbe  $\mathscr{C}_f$ , on en déduit la mesure  $AO=3\,m$ .

Le point G appartenant au segment [AO], on en déduit

que la longueur AO ne peut dépasser 3m.

On en déduit que la variable x prend ses valeurs dans l'intervalle [0;3].

- Le rectangle DEFG a pour longueur GF et pour hauteur
  - On a: AG + GF + FB = 6x + GF + x = 6GF = 6 - 2x
  - Le point D est le point d'abscisse x appartenant à la courbe  $\mathscr{C}_f$ . Il a pour coordonnées (x; f(x)).

Le point G est un point de l'axe des abscisse ayant xpour abscisse. Il a pour coordonnées G(x;0).

On en déduit la mesure de la longueur : DG = f(x).

Ainsi, le rectangle DEFG a pour aire :

$$\mathcal{A}(x) = L \times \ell = \left(6 - 2x\right) \times f(x) = \left(6 - 2x\right) \times \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)$$
$$= -\frac{3}{2}x^2 + 9x + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x$$

a. La fonction  $\mathcal A$  admet pour fonction dérivée :

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x^2) - \frac{9}{2} \cdot (2x) + 9 = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 9x + 9$$

Le polynôme du second degré définissant la fonction  $\mathcal{A}'$  admet pour discriminant :

on a la simplification suivante:
$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-9)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 9 = 81 - 54 = 27$$
On a la simplification suivante:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_{1} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-9) - 3\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{9 - 3\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{3(3 - \sqrt{3})}{3}$$

$$= 3 - \sqrt{3}$$

$$x_{2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-9) + 3\sqrt{3}}{2 \times \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{3}$$

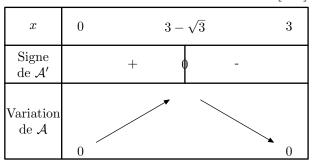
$$= \frac{3(3 + \sqrt{3})}{3}$$

$$= 3 + \sqrt{3}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, ce polynôme admet le tableau de signe suivant:

x	$-\infty$	$3 - \sqrt{3}$	3+	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\frac{3}{2} \cdot x^2 - 9x + 9$	+	0	_ (	) +	-

On en déduit le tableau de signe de la fonction  $\mathcal{A}'$  et le tableau de variation de la fonction  $\mathcal{A}$  sur [0;3]:



b. On en déduit que l'aire du rectangle DEFG est maximale lorsque le point G a pour abscisse  $3-\sqrt{3}$ .

### Correction 15

Notons x l'abscisse du point M. Le point M étant un point de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , il a pour coordonnées :

$$M(x; f(x)) = (x; x^2 + x)$$

Afin de déterminer la distance JM minimale, nous allons plutôt nous intéresser à la valeur de  $JM^2$ :

$$JM^{2} = (x_{M} - x_{J})^{2} + (y_{M} - y_{J})^{2}$$

$$= (x - 0)^{2} + (x^{2} + x - 1)^{2}$$

$$= x^{2} + (x^{2} + x - 1)(x^{2} + x - 1)$$

$$= x^{2} + (x^{4} + x^{3} - x^{2} + x^{3} + x^{2} - x - x^{2} - x + 1)$$

$$= x^{4} + 2x^{3} - 2x + 1$$

Considérons la fonction d définie par :

$$d(x) = x^4 + 2x^3 - 2x + 1$$

Cette fonction admet pour dérivée :

$$d'(x) = 4 \cdot x^3 + 2 \times (3x^2) - 2 = 4x^3 + 6x^2 - 2$$

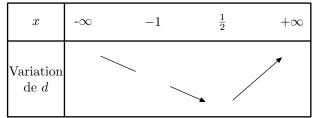
La factorisation proposée dans l'énoncé donne :

$$=2(x+1)^2(2x-1)$$

Le facteur  $(x+1)^2$  étant positif et ne s'annulant qu'en -1, on obtient le tableau de signe de la fonction d':

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
d'(x)	_	ø	_	ø	+

Ainsi, la fonction d admet le tableau de variation suivant :



On en déduit que la valeur de  $JM^2$  est minimale pour  $x = \frac{1}{2}$ . Ainsi, la distance JM est minimale pour  $x = \frac{1}{2}$ .

#### **Correction 16**

- 1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un quotient dont le dénominateur s'annule en 1. On en déduit que la fonction f admet pour ensemble de définition :  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$
- 2. L'expression de la fonction d est donnée sous la forme du quotient de la fonction u par v définies par :  $u(x) = -x^2 - 3 \cdot x + 1$  ; v(x) = x - 1qui admettent pour dérivées :  $u'(x) = -2 \cdot x - 3$  ; v'(x) = 1

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$= \frac{\left(-2 \cdot x - 3\right) \left(x - 1\right) - \left(-x^2 - 3 \cdot x + 1\right) \cdot 1}{\left(x - 1\right)^2}$$

$$= \frac{-2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3 \cdot x + 3 + x^2 + 3 \cdot x - 1}{\left(x - 1\right)^2} = \frac{-x^2 + 2 \cdot x + 2}{\left(x - 1\right)^2}$$

3. Le numérateur de l'expression de la fonction f' est un polynôme du second degré qui admet pour discriminant :  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 4 + 8 = 12$ 

On a la simplification :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines

dimet les deux racines : 
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-2 \cdot (1 + \sqrt{3})}{-2}$$

$$= 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-2 \cdot (1 - \sqrt{3})}{-2}$$

$$= 1 - \sqrt{3}$$

On en déduit le tableau de signe :

x	$-\infty$ 1-	$-\sqrt{3}$	1	1+	$\sqrt{3} + \infty$
$-x^2 - 3 \cdot x + 1$	_	0 +		+	<b>)</b> –
$(x-1)^2$	+	+	0	+	+
f'(x)	_	0 +		+ (	<b>)</b> –

4. On en déduit le tableau de variation de la fonction f:

x	-∞	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$\begin{array}{c} \text{Variation} \\ \text{de } f \end{array}$		\ /	<b>/</b>		

# Correction 17

Les droites (NM) et (NO) sont alignées.

Les points N, P, M et les points N, I, O sont dans le même

D'après le théorème de Thalès, on a les égalités des rapports de longueurs:

$$\frac{NI}{NO} = \frac{NP}{NM} = \frac{PI}{MO}$$

On s'intéresse à l'égalité :

$$\frac{NI}{NO} = \frac{PI}{MO}$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{PI}{1-x}$$

D'après le produit en croix, on a :

$$x \cdot (1 - x) = (x + 1) \cdot PI$$

$$PI = \frac{x \cdot (1 - x)}{x + 1}$$

$$PI = \frac{x - x^2}{x + 1}$$

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x - x^2}{x + 1}$$

 $f(x) = \frac{x-x^2}{x+1}$  qui permet d'obtenir l'ordonnée du point P.

La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et vdéfinies par :

$$u(x) = x - x^2$$
 ;  $v(x) = x + 1$   
qui admettent pour dérivées :  
 $u'(x) = 1 - 2 \cdot x$  ;  $v'(x) = 1$ 

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{\left(1 - 2 \cdot x\right) \cdot \left(x + 1\right) - \left(x - x^2\right) \cdot 1}{\left(x + 1\right)^2}$$
$$= \frac{x + 1 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - x + x^2}{\left(x + 1\right)^2} = \frac{-x^2 - 2 \cdot x + 1}{\left(x + 1\right)^2}$$

Etudions le polynôme  $-x^2-2\cdot x+1$  du numérateur. Son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8$$
 On a la simplification :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

whome admet less deux ractiles:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-(-2) - 2 \cdot \sqrt{2}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-2 \cdot (-1 + \sqrt{2})}{-2}$$

$$= -1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-(-2) + 2 \cdot \sqrt{2}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{2}}{2 \times (-1)}$$

On en déduit le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$ $-1$	$-\sqrt{2}$	-1	-1	1+	$\overline{2} + \infty$
$-x^2-2\cdot x+1$	_	<b>0</b> +		+	0	_
$(x+1)^2$	+	+	0	+		+
$\frac{-x^2-2\cdot x+1}{(x+1)^2}$	_	0 +		+	0	_

On en déduit le tableau de signe de la fonction f' sur  $\left[0\,;2\right]$  :

x	0		$-1+\sqrt{2}$		1
f'(x)		+	0	_	

On en déduit le tableau de variation suivant;

x	0	$-1+\sqrt{2}$	1
$\begin{array}{c} \text{Variation} \\ \text{de } f \end{array}$			

Ainsi, le point P a son ordonnée maximale lorsque l'abscisse du point P vaut  $x\!=\!-1\!+\!\sqrt{2}$