Utilisation du produit scalaire

Exercice 1

1. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, établir l'égalité suivante :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

2. On considère le parallélogramme $ABCD$ dans le plan. On note : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$

   a. Que représentent les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ pour le parallélogramme $ABCD$?

   b. A l'aide des questions précédentes, établir la proposition suivante :

   "Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors ce parallélogramme est un rectangle."

Exercice 2

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et les trois points suivants :

$$A\,(2\,;3) \quad ; \quad B\,(6\,;5) \quad ; \quad C\,(0\,;6)$$

On note : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

1. a. Déterminer les normes $\left\|\vec{u}\right\|$ et $\left\|\vec{v}\right\|$.

   b. Déterminer la valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$

2. a. Développer l'expression : $\left(3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}\right)^2$.

   b. En déduire la norme : $\left\|3\cdot\vec{u}-2\cdot\vec{v}\right\|$.

Exercice 3

On considère le triangle ABC équilatéral dont les côtés mesurent $6\,cm$; on note I, J, K les milieux respectifs des milieux $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$; M est le centre de gravité du triangle ABC.

1. Déterminer la longueur du segment $[BJ]$ et $[BM]$.

2. Déterminer la valeur des différents produits scalaires suivants :

   a. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$

   c. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$ d. $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MI}$

Exercice 4

Soit ABC un triangle quelconque.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, on a la relation :

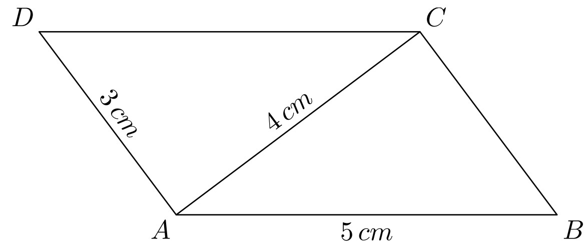
$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

2. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H.

Exercice 5*

Dans le plan, on considère le parallélogramme $ABCD$ ayant pour les mesures suivantes :

$$AB=5\,cm \quad ; \quad AC=4\,cm \quad ; \quad AD=3\,cm$$



1. On rappelle la formule du parallélogramme :

   a. Développer l'expression : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$.

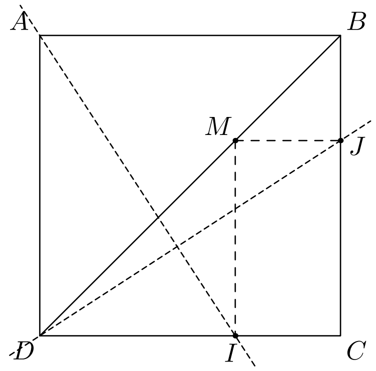
   b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ en fonction de normes de vecteurs.

2. a. Développer l'expression : $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)^2$.

   b. En déduire la mesure de la diagonale $[BD]$.

Exercice 6

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous. M est un point appartenant à la diagonale $[BD]$.
On note I le projeté orthogonal de M sur (DC) et J le projeté orthogonal de M sur $[BC]$.

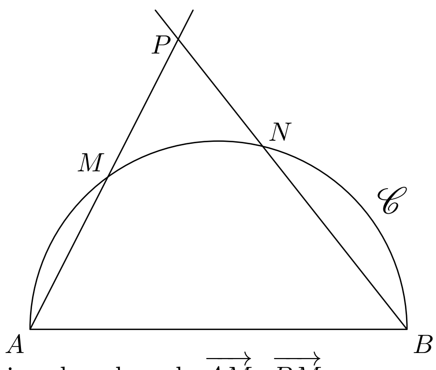


1. Etablir la relation suivante : $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{JC}$

2. En déduire que les droites (AI) et (DJ) sont orthogonales.

Exercice 7

Dans le plan, on considère un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$; soit M et N deux poins de $\mathscr{C}$ tels que les demi-droites $[AM)$ et $[BN)$ s'interceptent au point P :



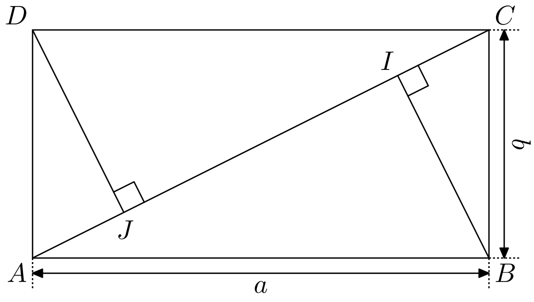
1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$.

2. Etablir l'égalité suivante :

$$AB^2=AP\times AM+PB\times NB$$

Exercice 8*

On considère, dans le plan, le rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b ; on note J et I les projetés orthogonaux sur la droite (AC) respectivement des points D et B :



1. a. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -AC \times IJ$

   b. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = b^2 - a^2$

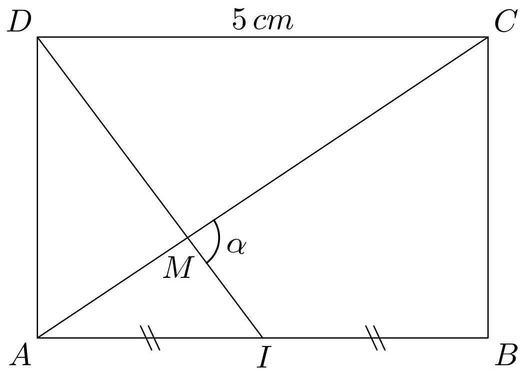
2. En déduire l'expression de la longueur IJ en fonction de a et de b.

Exercice 9*

Dans le plan, on considère le rectangle $ABCD$ tel que :

$AB = 5\,cm \quad ; \quad BC = \dfrac{2}{3} \cdot AB$

I est le milieu du segment $[AB]$; les droites (AC) et (ID) s'interceptent au point M.



1. En exprimant les vecteurs à l'aide de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$, déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AC}$

2. a. Déterminer les longueurs des segments $[DI]$ et $[AC]$.

   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IMC}$ au dixième de degré près.

Exercice 10

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

$AB = 5{,}3\,cm \quad ; \quad AC = 3{,}7\,cm \quad ; \quad BC = 7\,cm$

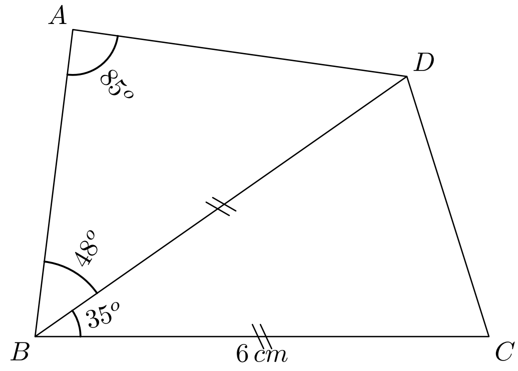
Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC.

Exercice 11

On considère le quadrilatère $ABCD$ représenté ci-dessous :



1. Les formules d'AL-Kashi donne la formule :

   $DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \times BD \times BC \times \cos \widehat{DBC}$

   En déduire la mesure de la longueur DC arrondie au millimètre près.

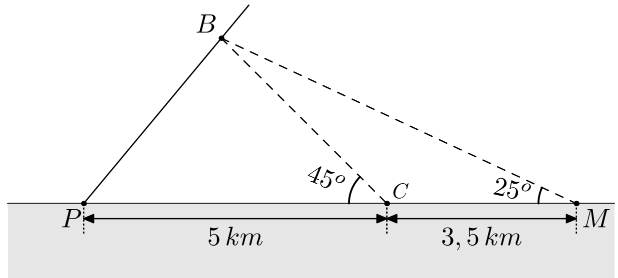
2. La formule des sinus exprimés dans le triangle ABD s'exprime par :

   $$\frac{\sin \widehat{DBA}}{AD} = \frac{\sin \widehat{ADB}}{AB} = \frac{\sin \widehat{DAB}}{DB}$$

   En déduire les mesures des longueurs AB et AD arrondie au millimètre près.

Exercice 12

Un bateau B rejoint le port P en ligne droite ; sur le bord de la rive, Marc et Cléa regarde le bateau rentré au port.



1. a. Déterminer les mesures des angles du triangle BCM.

   b. La formule des sinus s'exprime dans le triangle MBC par :

   $$\frac{\sin \widehat{BCM}}{BM} = \frac{\sin \widehat{CMB}}{CB} = \frac{\sin \widehat{MBC}}{MC}$$

   En déduire la longueur BC arrondie à l'hectomètre près.

2. Dans le triangle CBP, les formules d'Al-Kashi s'exprime par :

   - $PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2 \times PB \times BC \times \cos \widehat{PBC}$
   - $PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2 \times PC \times BC \times \cos \widehat{PCB}$
   - $CB^2 = CP^2 + PB^2 - 2 \times CP \times PB \times \cos \widehat{CPB}$

   En déduire la distance séparant le bateau du port arrondie à l'hectomètre près.

Exercice 13

Déterminer la mesure, au dixième de degrés près, des angles du triangle ABC ayant les mesures suivantes :

$AB = 6{,}4\,cm \quad ; \quad AC = 4{,}8\,cm \quad ; \quad BC = 8\,cm$