

Tangentes et nombre dérivé - Fiche d'exercices 5

Exercice 1

Etablir les égalités suivantes :

a. $\frac{x}{x+1} - \frac{2x-3}{x-1} = \frac{3-x^2}{x^2-1}$

b. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{x \cdot (x+1)^2}$

c. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} = \frac{4x+1}{x \cdot (x+1) \cdot (2x-1)}$

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie par la relation :
 $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Déterminer, pour $h \in \mathbb{R}$, une expression simplifiée de $f(1+h)$.

2. Soit g la fonction définie par la relation :

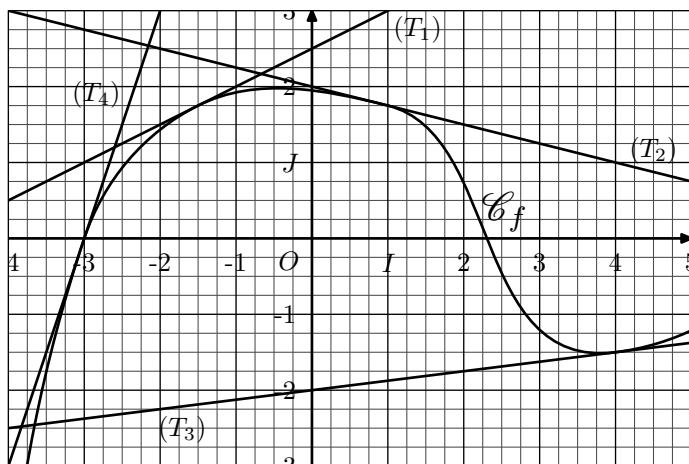
$$g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$$

Etablir, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, l'égalité :

$$g(h+5) = \frac{2}{\sqrt{2h+9}+3}$$

Exercice 3

Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O; I; J)$, la courbe \mathcal{C}_f et quatre de ses tangentes :



1. La droite (T_1) s'appelle :

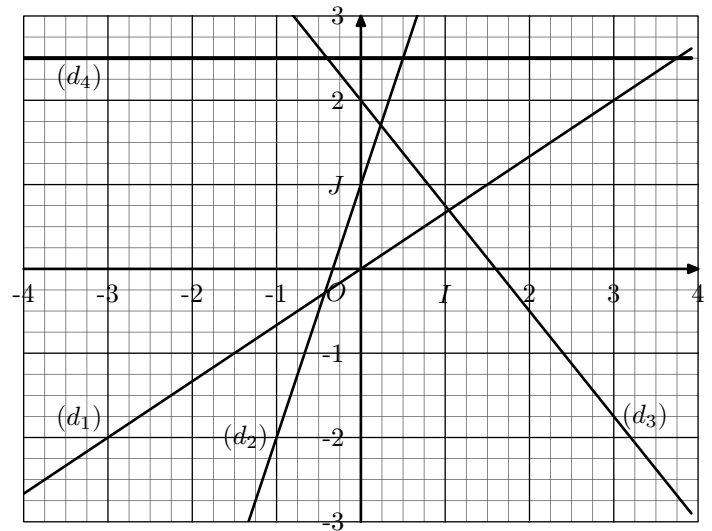
“La tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $-1,5$ ”

Nommez de même les trois autres droites.

2. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces quatre tangentes.

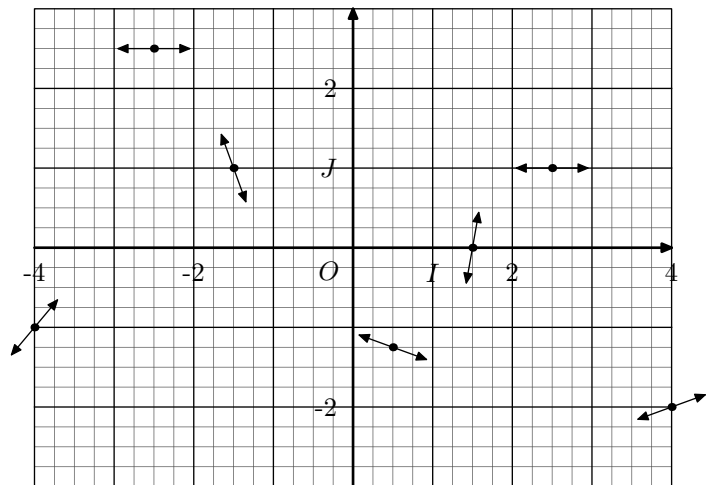
Exercice 4

Déterminer les coefficients directeurs des quatre droites représentées ci-dessous :



Exercice 5

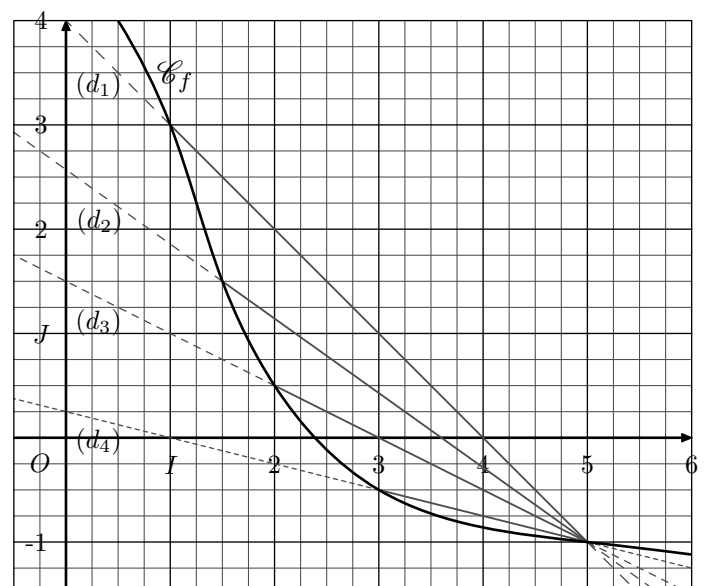
Tracer la courbe représentative d'une fonction passant par tous les points indiqués et respectant en chacun d'eux la tangente représentée :



Exercice 6

On considère le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ dans lequel sont représentées :

- La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f ;
- Les cordes (d_1) , (d_2) , (d_3) et (d_4) à la courbe \mathcal{C}_f .



1. Déterminer les coefficients directeurs des quatre cordes à la courbe \mathcal{C}_f .

2. a. Tracer, à l'aide d'un règle, la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point de coordonnées $(5; -1)$.

b. Donner une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente (T) .

Exercice 7

Dans le repère $(O; I; J)$ ortho-normé ci-contre est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .

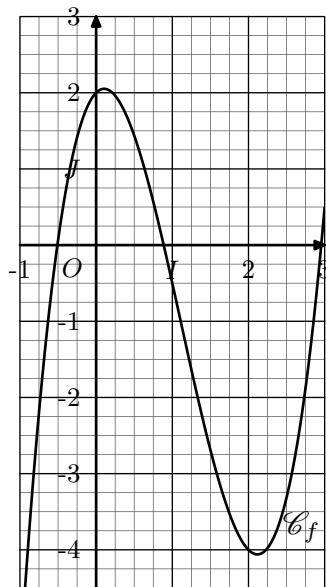
On considère les points A, B, C de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisses respectives 0, 1 et 2

1. Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.

2. Calculer le taux de variation de la fonction f :

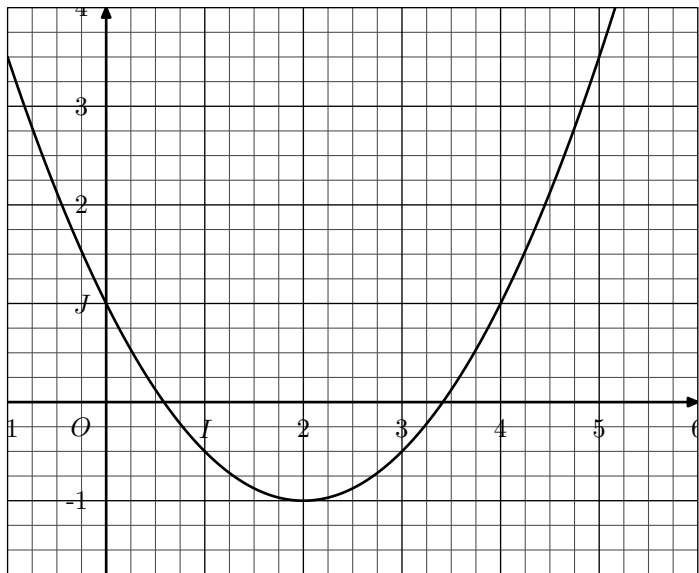
a. entre 0 et 2

b. entre 1 et 2



Exercice 8

On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C} représentative d'une fonction dans un repère $(0; I; J)$:



1. a. Tracer la tangente (d) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 4.

b. Donner le coefficient directeur de la droite (d) .

2. a. Tracer la tangente (Δ) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

b. Donner le coefficient directeur de la droite (Δ) .

Exercice 9

On considère trois fonctions f, g et h trois fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* par les relations :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad h(x) = \frac{2x^2+x}{5x}$$

On donne ci-dessous un tableau de valeurs pour chacune des fonctions :

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2,1}{3,01}$	$\frac{2,01}{3,0001}$	$\frac{2,0001}{3,000001}$	$\frac{2,00001}{3,00000001}$

x	0,01	0,0001	0,000001
$g(x)$	$\frac{-0,98}{0,1}$	$\frac{-0,9998}{0,01}$	$\frac{-0,999998}{0,001}$

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$h(x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0,12}{0,5}$	$\frac{0,0102}{0,05}$	$\frac{0,001002}{0,005}$	$\frac{0,00010002}{0,0005}$

Remarquez que, dans chaque tableau, les valeurs de x "progressent lentement" vers 0.

1. a. Pour chaque tableau et à l'aide de la calculatrice, observer la progression de des valeurs approchées de ces quotients.

b. Dans chaque cas, faire une conjecture sur la valeur limite de ces images lorsque :

" x tend vers 0 par des valeurs supérieures à 0"

Pour la fonction f , cette valeur se note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

2. A l'aide de votre calculatrice, tracer les courbes représentatives de ces fonctions et observer la courbe au "voisinage" de l'axe des ordonnées.

Exercice 10

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{h \rightarrow 0} h - 2$

b. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + h}{h}$

c. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h^3 + 2h^2}{h}$

d. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+1}{h+2}$

e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + h}{3h}$

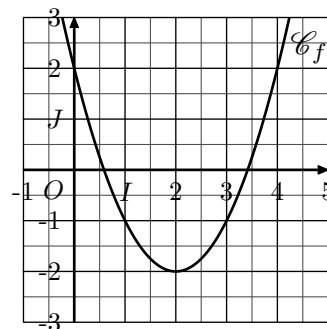
f. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 2h^2}{2h}$

Exercice 11

Dans un repère $(O; I; J)$, on considère la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Au cours de cet exercice, nous allons déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point $A(1; -1)$.



1. a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x - 3 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

b. En déduire le coefficient directeur de la corde à la courbe \mathcal{C}_f passant par les points A et $B(2; -2)$. Vérifier graphiquement votre réponse.

2. On considère les deux fonctions u et v définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par les relations :

$$u(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad ; \quad v(x) = x - 3$$

a. Voici deux tableaux de valeurs de u et de v :

x	1,1	1,01	1,001	1,000 1
$u(x)$	$\frac{-0,19}{0,1}$	$\frac{-0,0199}{0,01}$	$\frac{-0,001999}{0,001}$	$\frac{-0,00019999}{0,0001}$

x	1,1	1,01	1,001	1,000 1
$v(x)$	-1,9	-1,99	-1,999	-1,9999

Que peut-on dire de la valeur de $u(x)$ lorsque le nombre x se rapproche de la valeur 1 ?

- b. Tracer dans le repère la droite (d) d'équation :
 $(d) : y = -2x + 1$

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par la relation :

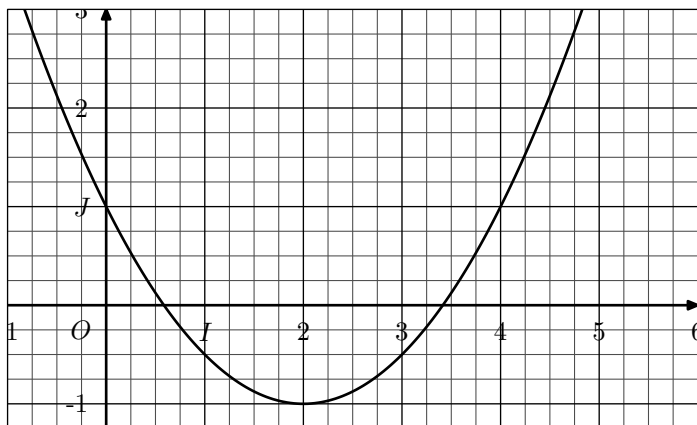
$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$$

1. a. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(4+h) - f(4) = \frac{1}{2} \cdot h^2 + 2 \cdot h$$

- b. Déterminer la valeur de la limite : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

2. Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormal, on donne la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f :



- a. Tracer dans le repère ci-dessous, la droite (d) admettant pour équation réduite : $y = 2x - 7$
- b. Justifier que la droite (d) est une tangente à la courbe \mathcal{C}_f dont on précisera le point de contact.

Exercice 13

1. Le nombre dérivé de la fonction carré en 2 :

a. Pour $x \neq 2$, établir l'égalité suivante : $\frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = x + 2$

- b. Soit f la fonction carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

2. Le nombre dérivée de la fonction inverse en 3 :

a. Pour $x \neq 3$, établir l'égalité suivante : $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = -\frac{1}{3x}$

- b. Soit g la fonction inverse.

En déduire la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3}$

3. Le nombre dérivée de la fonction racine carrée en 3 :

a. Pour $x \neq 2$, établir que : $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

- b. Soit h la fonction racine carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2}$

Exercice 14

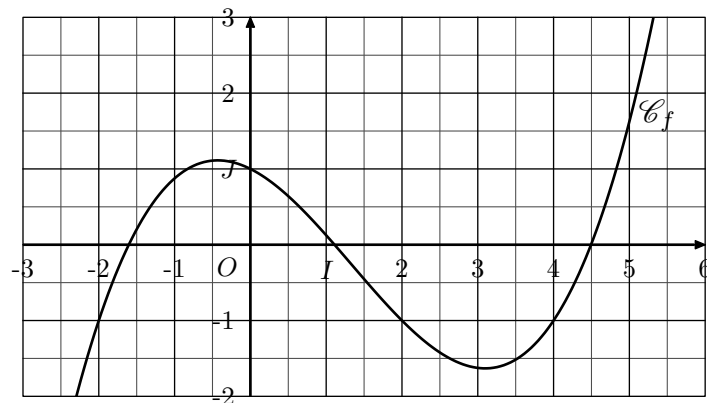
Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions polynomiales suivantes :

1. $f: x \mapsto -3x + 2$ 2. $g: x \mapsto 4x^2 - 4$
 3. $h: x \mapsto 2x^2 + 3x$ 4. $j: x \mapsto 5x^3 - 2x^2$
 5. $k: x \mapsto -2x^2 + 2x$ 6. $\ell: x \mapsto (3x + 11)(4 - x)$

Exercice 15

On considère la fonction f dont l'image de x est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$$



On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Donner l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
2. On considère la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
- a. Donner la valeur du coefficient directeur de (T) .
- b. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .
- c. Dans le repère ci-dessous, tracer la tangente (T) .
3. On considère la droite (d) admettant l'équation réduite :
 $(d) : y = -x + 1$
 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (d) et de la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 16

Déterminer les fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

- a. $f: x \mapsto x - 2\sqrt{x}$ b. $g: x \mapsto 2 \times \frac{1}{x}$
 c. $h: x \mapsto \frac{-5}{x} + \sqrt{x}$ d. $k: x \mapsto x^2 - \frac{1}{x}$

Exercice 17

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f: x \mapsto x - \frac{1}{x}$ 2. $g: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x}$
 3. $h: x \mapsto \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$ 4. $j: x \mapsto 2x^3 + \frac{2}{x}$

On présentera l'expression des dérivées sous la forme d'un quotient.

Exercice 18

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = 3x^2$ b. $g(x) = \frac{1}{12}x^6$ c. $h(x) = 4\sqrt{x}$
 d. $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ e. $k(x) = \frac{1}{2x}$ f. $l(x) = -\frac{2}{x}$

Exercice 19*

Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- a. $f: x \mapsto 3x^2 + 5x$ b. $g: x \mapsto \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$
 c. $h: x \mapsto 5x^3 - \frac{3}{x}$ d. $j: x \mapsto \frac{8x^3 - 2x^2}{x}$

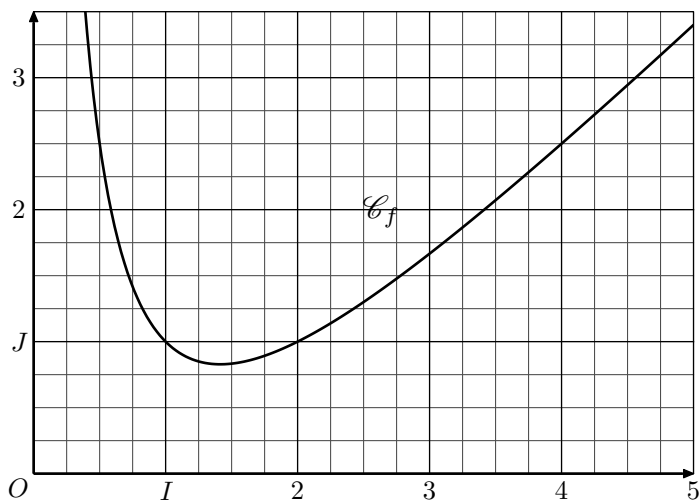
Les dérivées des fonctions g et h seront présentées sous forme de quotient.

Exercice 20*

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - 2$$

La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- Montrer que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est donnée par :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$
- On souhaite déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
 - Donner le coefficient directeur de la tangente (T) . Justifier votre démarche.
 - Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) .
 - Tracer la droite (T) dans le repère ci-dessus.
- On considère la droite (d) d'équation réduite :
 $(d): y = \frac{1}{2}x$
 - Sur $]0; +\infty[$, étudier le signe de l'expression :

$$f(x) - \frac{1}{2}x$$
 - En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de

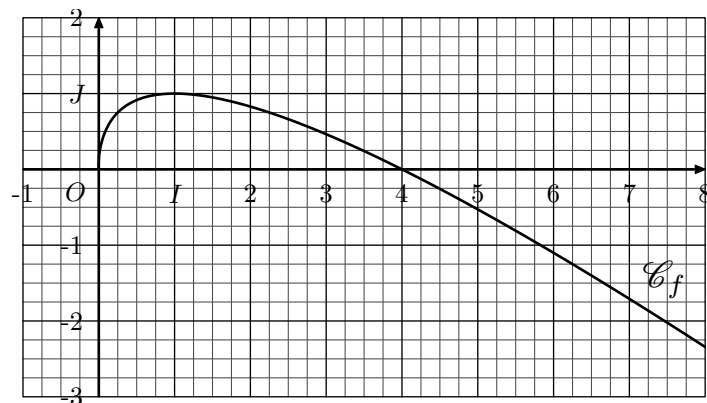
la droite (d) .

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par la relation :

$$f(x) = -x + 2\sqrt{x}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .



- Montrer que la fonction f admet pour dérivée, sur \mathbb{R}_+^* , la fonction f' dont l'expression est donnée par :

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
 - Déterminer la valeur des nombres dérivés de la fonction f en $\frac{1}{4}$ et en 4.
- On note (d) et (Δ) les tangentes à la courbe \mathcal{C}_f aux points d'abscisse respectifs $\frac{1}{4}$ et 4.
 - Déterminer les équations réduites des tangentes (d) et (Δ) .
 - Montrer que les deux droites (d) et (Δ) s'intersectent au point de coordonnées $(1; \frac{3}{2})$.
 - Tracer sur le graphique les droites (d) et (Δ) .

Exercice 22

Soit f définie sur \mathbb{R} par la relation : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$

- Calculer le nombre dérivé de la fonction f en 2.
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.

Exercice 23

- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carrée au point d'abscisse -2 .
- Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction inverse au point d'abscisse 3.

Exercice 24

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto (3x^2 + 3x)(2x + 2) \quad ; \quad g: x \mapsto (2x^2 + 1)\sqrt{x}$$

$$h: x \mapsto \frac{1}{x} \cdot (3 - x^2) \quad ; \quad j: x \mapsto \frac{2}{x} \cdot \sqrt{x}$$

- L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u \cdot v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit

et leur dérivée respective.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

$$f': x \mapsto 18x^2 + 24x + 6 \quad ; \quad g': x \mapsto \frac{10x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$$

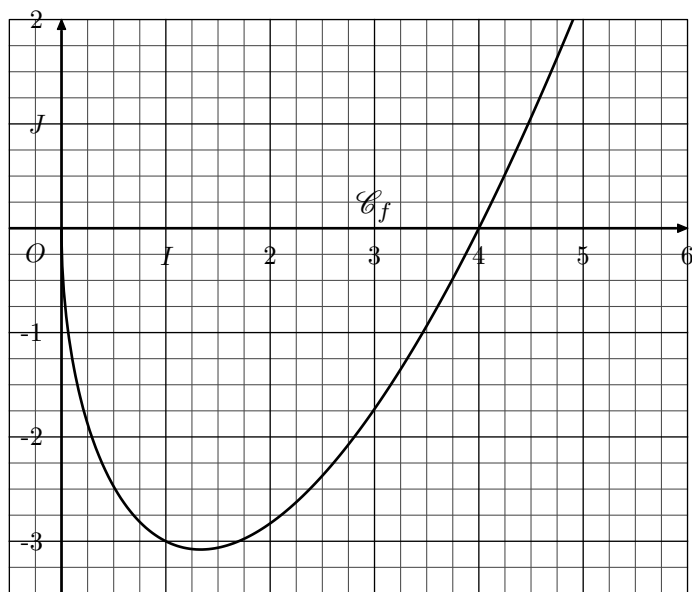
$$h': x \mapsto \frac{-x^2 - 3}{x^2} \quad ; \quad j': x \mapsto -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$$

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par la relation :

$$f(x) = (x - 4)\sqrt{x}$$

La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f est donnée dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
 - Déterminer l'image et le nombre dérivé de la fonction f en 4.
 - Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_1) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 4.
 - Tracer la tangente (T_1) .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente (T_2) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
 - Tracer la tangente (T_2) .

Exercice 26

On souhaite déterminer les expressions des dérivées des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{3-2x}{x+1} \quad ; \quad g: x \mapsto \frac{x^2+4x-1}{2x-1}$$

$$h: x \mapsto \frac{3}{2-x} \quad ; \quad j: x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $\frac{u}{v}$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier le numérateur et le dénominateur de ce quotient et leurs dérivées respectives.

	$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				
$j(x)$				

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Etablir que ces fonctions admettent pour dérivée les fonctions ci-dessous :

$$f': x \mapsto -\frac{5}{(x+1)^2} \quad ; \quad g': x \mapsto \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x-1)^2}$$

$$h': x \mapsto \frac{3}{(x-2)^2} \quad ; \quad j': x \mapsto \frac{1-x}{2(x+1)^2 \cdot \sqrt{x}}$$

Exercice 27

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f: x \mapsto \frac{2-2x}{5x+1}$

b. $g: x \mapsto (3x-2)(2x^2+1)$

c. $h: x \mapsto \frac{1}{3x+1}$

d. $j: x \mapsto (2x^2+3x) \cdot \sqrt{x}$

Exercice 28

On considère les deux fonctions f et g définies par les relations :

$$f(x) = (x^2 - 3x) \cdot \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{3-2x}{x^2-3x-1}$$

Déterminer les expressions des fonctions dérivées f' et g' . (On donnera l'expression de la fonction f' sous la forme d'un quotient simplifié).

Exercice 29

1. On considère les deux fonctions f et g par :

$$f(x) = (2x+1)(3x^2-x+1) \quad ; \quad g(x) = \frac{2x+5}{1-4x}$$

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune de ces deux fonctions.

2. On considère la fonction h dont l'image de x est défini par la relation :

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- Montrer que le nombre de dérivée de h en x s'exprime par :

$$h'(x) = -\frac{3x^2 - 10x + 7}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

Exercice 30

Le tableau ci-dessous vous présente, pour chaque ligne, l'expression de l'image de x par une fonction et l'expression du nombre dérivé en x de cette fonction. Vérifier l'exactitude de l'expression du nombre dérivée en x :

Fonction	Image de x	Nombre dérivé en x
f	$x^3 - 5x^2 + x - 3$	$3x^2 - 10x + 1$
g	$\frac{2x - 1}{x^2 + x}$	$-\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 \cdot (x + 1)^2}$
h	$(x^2 - 3) \cdot \sqrt{x}$	$\frac{5x^2 - 3}{2 \cdot \sqrt{x}}$
j	$\frac{3x - 2}{2 - x}$	$\frac{4}{(x - 2)^2}$