

Suites explicites et récurrentes

Exercice 1

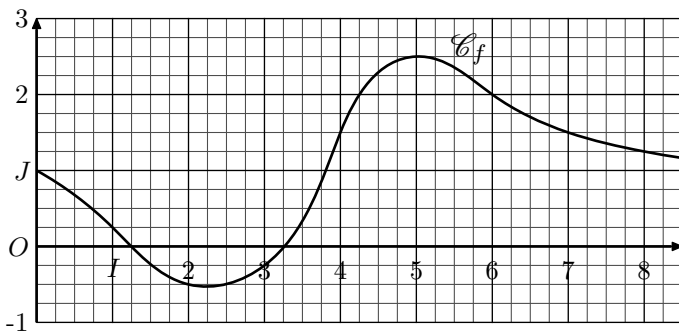
On considère l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 0 à 5
  a ← i × (i-1)
Fin Pour
```

- Lors de l'exécution pas à pas de cet algorithme, donner les valeurs prises par la variable a .
- Donner l'expression d'une suite (u_n) dont les six premiers termes sont les valeurs affichées par l'algorithme.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée dans le repère orthonormal $(O; I; J)$ ci-dessous :



On définit la suite (u_n) par la relation :
 $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\frac{3}{2}$.
- Déterminer la valeur des termes :
 u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6

Exercice 3

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

- $u_n = 2 \cdot n^2 - n + 1$
- $v_n = \frac{2 \cdot n + 1}{2 - 3 \cdot n}$
- $w_n = \sqrt{3n + 25}$
- $x_n = 3 \cdot [1 + (-1)^n] + 2$

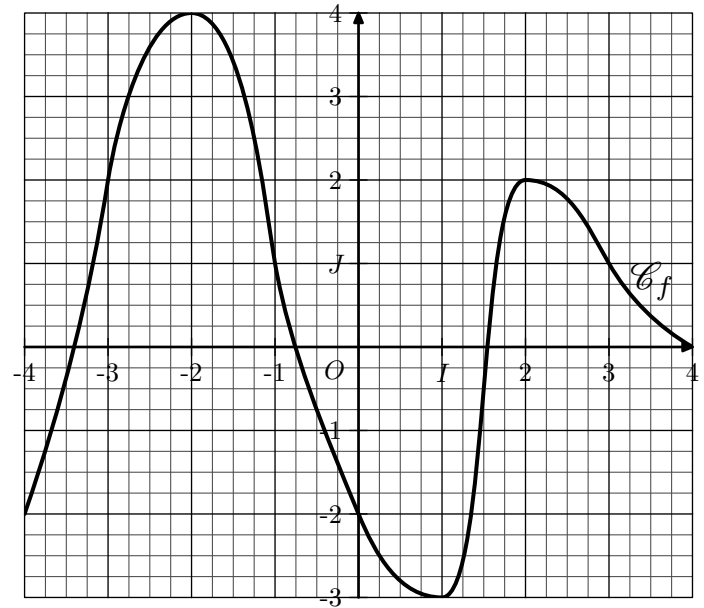
Exercice 4

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
 $u_n = 5 + 2 \times n$ pour tout entier naturel n .
 - Exprimer la valeur u_{n-3} en fonction de n .
 - Donner la forme simplifiée de $u_{n-3} + u_3$.
 - Donner la forme simplifiée de $u_{n-5} + u_5$.
 - Soit k et n deux entiers tels que $k \leq n$. Montrer que $u_k + u_{n-k}$ a sa valeur indépendante de k .
- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite :
 $v_n = 2n^2 - 3n + 2$ pour tout entier naturel n .
 On souhaite étudier la différence entre deux termes consécutifs de la suite (v_n) :
 - Donner l'expression du terme v_{n+1} en fonction de n .

- Etudier la valeur de $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n .

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère la représentation \mathcal{C}_f d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$:



On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad v_{n+1} = f(v_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$u_0 = -1 \quad ; \quad v_0 = -4$$

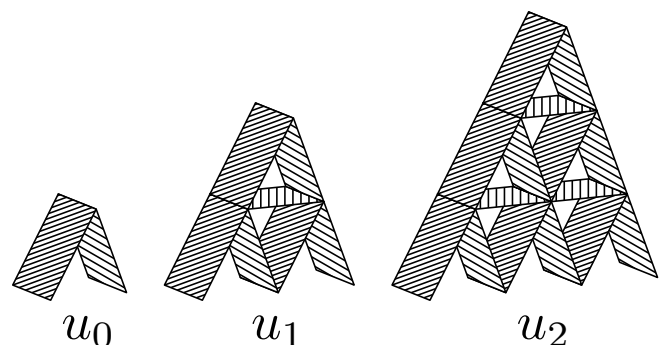
Déterminer les 100 premiers termes de chacune de ces deux suites.

Exercice 6

- On définit la suite par récurrence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation :
 $u_0 = 5$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
- On définit la suite par récurrence $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la relation :
 $v_1 = -2$; $v_{n+1} = \frac{1 - v_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
 Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 7

On considère la construction d'un château de cartes :



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignant le nombre de cartes utilisées dans la construction du château à l'étape n .

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. Pour tout entier naturel n , déterminer une expression du terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et du rang n .
3. A quel étape de construction peut-on arriver avec deux jeux de 72 cartes ?

Exercice 8

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

- a. $u_0 = 5$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- b. $u_0 = 1$; $u_1 = 4$; $u_{n+1} = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- c. $u_0 = 3$; $u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- d. $u_0 = -1$; $u_n = \frac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 9

On considère l'algorithme suivant :

```

a ← 2
Pour i allant de 0 à 5
    a ← a × 2
Fin Pour

```

1. Lors de son exécution pas à pas, indiquer les différentes valeurs prises par la variable a
2. Parmi les expressions choisies qu'elle(s) peuvent être l'expression d'une suite (u_n) afin que ses six premiers termes soient les valeurs prises par la variable a lors de l'exécution de l'algorithme précédent :

- a. $u_n = 2 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}$
- b. $u_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$
- c. $u_n = 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- d. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 \cdot u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- e. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 \cdot u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
- f. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 \cdot u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Exercice 10

On considère l'algorithme suivant :

```

a ← -1
Pour i allant de 0 à 4
    a ← a × 2 - i + 1
Fin Pour

```

1. Donner les différentes valeurs prises par la variable a lors d'une exécution pas à pas de cet algorithme.
2. Donner l'expression d'une suite dont les cinq premiers termes soient les différentes valeurs prises par la variable a prises lors de l'exécution de cet algorithme.

Exercice 11

Dans chaque cas, déterminer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- a. $u_n = \frac{2n^2 + n + 5}{n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- b. $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- c. $u_0 = -1$; $u_{n+1} = u_n + n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- d. $u_0 = 2$; $u_1 = 3$; $u_{n+1} = u_n + 2 \cdot u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 12

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2 \cdot u_{n+1} + u_n & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donner les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

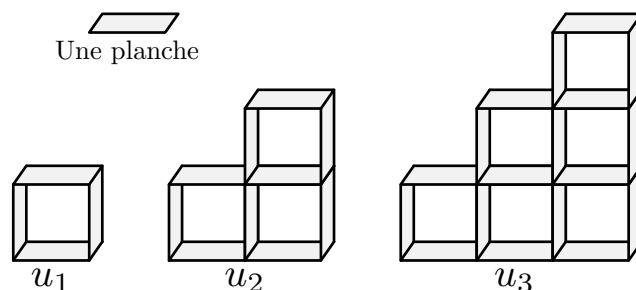
2. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = -3 & ; & v_{n+1} = n - 2 \cdot v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donner les quatre premiers termes de la suite (v_n) .

Exercice 13

On construit successivement un objet comme le représente le schéma ci-dessous :



Pour tout entier naturel n non-nul, on note u_n le nombre de planches nécessaires pour construire la figure à l'étape n .

Donner une relation de récurrence caractérisant la suite (u_n) .

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 & ; & u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.
 - a. Déterminer les cinq premiers termes de (u_n) .
 - b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de (u_n)
2. Montrer que la suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison 3 vérifie la relation : $v_{n+1} = 2 \cdot v_n + 3^n$.

Exercice 15

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 3 & ; & u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
2. Montrer qu'on a la relation suivante : $u_{n+2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. Que peut-on dire des termes de cette suite ?
4. Déterminer la valeur des réels a et b vérifiant la relation suivante : $u_n = a \cdot [1 - (-1)^n] + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$