Lieux géométriques et formules trigonométriques

Exercice 1

On rappelle la formule de la médiane :

> Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a la relation :
> $$AM^2+BM^2=\frac{1}{2}\cdot AB^2+2\cdot MI^2$$

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;I\,;J)$ et les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
$A(-2\,;-3)$; $B(-1\,;2)$; $C(3\,;1)$

1. Déterminer les mesures AB, AC et BC.
2. a. On note I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer la mesure de la médiane dans le triangle ABC issue du sommet C.

   b. On note J le milieu du segment $[AC]$. Déterminer la mesure de la médiane dans le triangle ABC issue du sommet B.

Exercice 2

On considère un triangle ABC rectangle en A ayant les mesures suivantes :

$AB=6$; $AC=3$

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu de $[IC]$.

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant la relation :

$$MA^2+MB^2+2\cdot MC^2=72$$

1$^{\text{er}}$ méthode :

1. Montrer que tous points M vérifient la relation :
$$MA^2+MB^2+2\cdot MC^2=4\cdot MJ^2+JA^2+JB^2+2\cdot JC^2$$
2. En utilisant par deux fois le théorème de la médiane, démontrer la relation suivante :
$$M\in\mathcal{E}\iff 4\cdot MJ^2+\frac{AB^2}{2}+IC^2=72$$
3. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

2$^{\text{ème}}$ méthode :

On munit le plan du repère $\left(A\,;\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AB}\,;\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C dans ce repère.
2. En notant $(x\,;y)$ les coordonnées du point M, déterminer une équation de $\mathcal{E}$ dans ce repère.
3. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 3

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé et les deux points du plan suivants :
$A\,(-3\,;2)$; $B\,(3\,;-6)$

1. On désignera par M le point de coordonnées $(x\,;y)$:

   a. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

   b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

   c. Déterminer la longueur AB.
2. a. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points vérifiants la relation :
   $MA^2-MB^2=40$

   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.
3. a. Déterminer l'équation de l'ensemble des points vérifiants la relation :
   $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=34$

   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.
4. a. Déterminer l'équation de l'ensemble des points vérifiants la relation :
   $MA^2+MB^2=150$

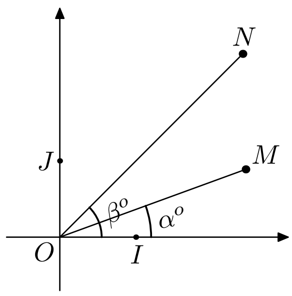
   b. Donner la nature et les éléments caractéristiques des points M vérifiant cette relation.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère les points M et N tel que :

$\|\overrightarrow{OM}\|=a$; $\|\overrightarrow{ON}\|=b$

$\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\alpha$; $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{ON}\right)=\beta$



1. a. Déterminer les coordonnées des points M et N.

   b. Donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.
2. a. Donner la mesure de l'angle orienté : $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$

   b. Donner une autre expression de $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$.
3. En déduire l'égalité :
   $\cos\left(\beta-\alpha\right)=\cos\beta\cdot\cos\alpha-\sin\beta\cdot\sin\alpha$

Exercice 5

Déterminer une simplification des expressions suivantes :

1. $\cos 2x\cdot\cos x-\sin 2x\cdot\sin x$
2. $\sin 3x\cdot\cos 2x-\sin 2x\cdot\cos 3x$

Exercice 6

1. En remarquant l'égalité $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 7*

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)=\sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$$

Exercice 8*

1. Simplifier l'expression suivante :
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\big(\sin 3x\big)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre l'équation suivante :
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

Exercice 9

1. Etablir la relation suivante : $\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)$

2. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$.

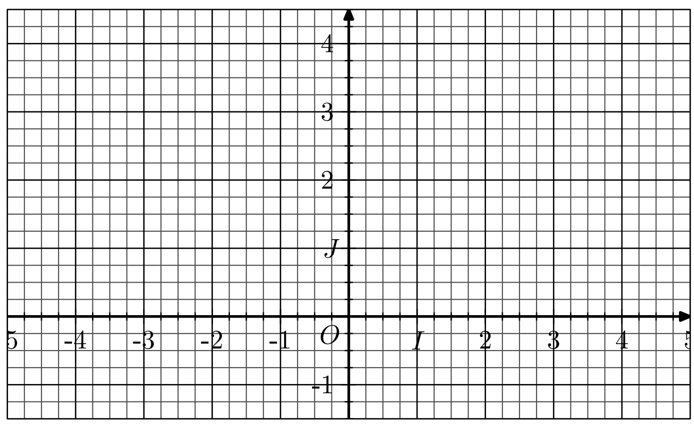
3. Etablir la relation : $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Exercice 10

On considère le plan munit d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$ et passant par le point A :
   a. $\vec{u}=\big(2\,;3\big)$ et $A\,\big(1\,;0\big)$
   b. $\vec{u}=\big(-1\,;1\big)$ et $A\,\big(-2\,;1\big)$

2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\vec{u}$ au point A correspondant :



Exercice 11

Dans le plan $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$, on considère les points A, B, C, D de coordonnées :
$$A\big(-1\,;-1\big)\quad;\quad B\big(2\,;-4\big)\quad;\quad C\left(\frac{22}{5}\,;\frac{4}{5}\right)\quad;\quad D\left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$$

1. a. Soit K le milieu du segment $[AB]$. On considère l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ du plan qui vérifie la relation :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{KM}=0$$
Déterminer une équation vérifiée par les coordonnées $(x\,;y)$ du point M.
   b. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice (d) du segment $[AB]$.

2. a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal à la droite (CD).
   b. En déduire l'équation de la droite (CD).

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Exercice 12

On considère les trois équations cartésiennes suivantes :

a. $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

b. $x^2+y^2-2x+6y+10=0$

c. $x^2+y^2+4x-4y+9=0$

1. Ecrire chacune des équations ci-dessus sous la forme :
$$\big(x-a\big)^2+\big(y-b\big)^2=c$$
où a, b, c sont des nombres réels à déterminer.

2. Pour chaque équation, en déduire la nature de l'ensemble des points défini par cette équation et en préciser les éléments caractéristiques

Exercice 13

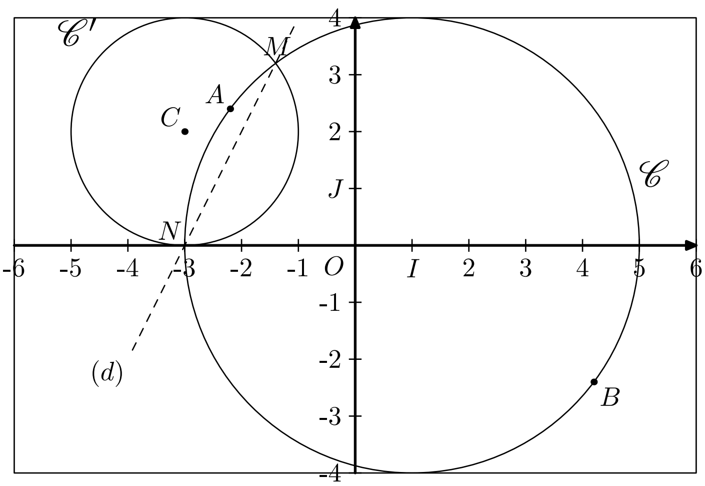
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ dont l'unité est le centimètre.

1. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon r. Dans chaque cas présenté ci-dessous, déterminer l'équation du cercle :
   a. $I\,\big(1\,;2\big)$ et $r{=}3\,cm$
   b. $I\,\big(-3\,;1\big)$ et $r{=}5\,cm$

2. On considère le cercle $\mathscr{C}'$ dont les points A et B sont diamétralement opposés. Déterminer l'équation du cercle dans chacun des suivants :
   a. $A\,\big(-2\,;0\big)$ et $B\,\big(4\,;0\big)$
   b. $A\,\big(2\,;-3\big)$ et $B\,\big(-1\,;2\big)$

Exercice 14*

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère les points $A\left(-\frac{11}{5}\,;\frac{12}{5}\right)$, $B\left(\frac{21}{5}\,;-\frac{12}{5}\right)$, $C\,\big(-3\,;2\big)$; les points A et B sont diamétralement opposés dans le cercle $\mathscr{C}$; le cercle $\mathscr{C}'$ a pour centre C et a pour rayon 2. On note M et N les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



1. Déterminer les équations des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

2. Déterminer les coordonnées des points M et N.

3. En déduire l'équation cartésienne de la droite (d).