RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DE DEGRÉ 2

Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $-x^2+3x-1=0$ b. $x^2-5=0$ c. $-x+2x^2=-4$ d. $5x^2-4x=0$

e. $49x^2-14x+1=0$ f. $-x^2=4$ g. $5+3x=9x^2$ h. $4x^2-36x+9=0$

Pour résoudre une équation du second degré :

- on regarde si on se trouve dans un cas particulier $ax^2+bx=0$ ou $ax^2+c=0$ ou une identité remarquable « évidente » : ces cas ne nécessitent pas de calculer le discriminant et les calculs sont donc beaucoup plus rapides.
- sinon, on applique les formules du cours en veillant à écrire l'équation sous la forme $ax^2+bx+x=0$.
- on donne les valeurs <u>exactes</u> des solutions (en particulier lorsqu'il y a des racines carrées ou des fractions).

Solution

a. $-x^2+3x-1=0$

Il s'agit d'une équation du type $ax^2+bx+x=0$ avec $a=-1; b=3$ et $c=-1$.
Le discriminant vaut donc $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times(-1\times(-1))=9-4=5$.
$\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions qui sont :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{-3-\sqrt{5}}{-2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

On ne laisse pas un dénominateur négatif ! On multiplie alors par -1 le numérateur et le dénominateur.

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{-3+\sqrt{5}}{-2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

---

b. $x^2-5=0$

Ici, on reconnaît une équation du type $ax^2+c=0$. Il n'est pas utile de calculer le discriminant car on sait résoudre ce type d'équation.
$x^2-5=0 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x_1=\sqrt{5}$ ou $x_2=-\sqrt{5}$.
L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}}$

Résoudre $x^2=c$
- Si $c<0$ alors il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- si $c>0$ alors les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $\mathscr{S}=\{-\sqrt{c};\sqrt{c}\}$.

---

c. $-x+2x^2=-4$

L'équation s'écrit aussi : $2x^2-x+4=0$ du type $ax^2+bx+x=0$ avec $a=2; b=-1$ et $c=4$.
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(2\times4)=1-8=-7$.
$\Delta<0$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$

---

d. $5x^2-4x=0$

On reconnaît une équation du type $ax^2=bx=0$. Il n'est pas utile de calculer le discriminant car on sait résoudre ce type d'équation en factorisant par x.
$5x^2-4x=0 \Rightarrow x(5x-4)=0$. On aboutit à une équation « produit nul ».
$x(5x-4)=0 \Rightarrow x=0$ ou $5x-4=0$ soit $x=\frac{4}{5}$.

$\boxed{\mathscr{S}=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}}$

Équation produit nul du type $(ax+b)(cx+d)=0$
Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
- Donc ici soit $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$
- soit $cx+d=0 \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$