Rudiments de Logique

September 2025

Contents

1 Notations:

1.1 Ensembles:

- $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels (0,1,2,3...)
- $\mathbb{Z}$: L'ensemble de tous les entiers (... -2,-1,0,15 ...)
- $\mathbb{Q}$: L'ensemble des quotients de la forme: $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{R}$: L'ensemble des réels, par exemple: e, π, $\sqrt{2}$
- $\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes: $i^2 = -1$

1.2 Quantificateurs

1.2.1 Proposition

$Definition$: On appelle proposition tout énoncé pouvant prendre pour valeur "vrai" ou "faux".

1.2.2 Symboles

- $\forall$: "Pour tout"
- $\exists$: "Il existe"
- $\exists!$: "Il existe un unique"
- $\implies$: "Implique"
- $\Leftrightarrow$: "Equivaux à"

1.2.3 Réciproque

$Definition$: La réciproque de la proposition: "$\mathbf{A} \implies \mathbf{B}$" est "$\mathbf{B} \implies \mathbf{A}$"

1.2.4 Contraposée

$Definition$: La Contraposée de la proposition: "$\mathbf{A} \implies \mathbf{B}$" est "$\mathbf{non(B)} \implies \mathbf{non(A)}$"
Pté: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (non(B) \Rightarrow non(A))$

1.2.5 Negations

- $non(\forall) \Leftrightarrow \exists$
- $non(\exists) \Leftrightarrow \forall$
- non(A et B) $\Leftrightarrow$ A ou B
- non(A ou B) $\Leftrightarrow$ A et B
- non($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ A et non(B)

2 Démonstrations Mathématiques

2.1 Démontrer une implication

Pour démontrer une proposition du type: $A \Rightarrow B$, un model est: "Supposons que A... alors B"

2.2 Démontrer une équivalence

Pour montrer que "$A \Leftrightarrow B$" on montre dans un premier temps: $A \Rightarrow B$ puis $B \Rightarrow A$

2.3 Démontrer par contraposition

Pour montrer: $P \Rightarrow Q$ on peut montrer: $non(Q) \Rightarrow non(P)$

2.4 Démontrer par disjonction de cas

Pour montrer un proposition du type: $(A\ ou\ B) \Rightarrow C$:
On montre d'abord: $A \Rightarrow C$ puis $B \Rightarrow C$

2.5 Démontrer par l'absurde

1. On suppose au début de la preuve que A est fausse, on commence donc par ecrire "**Supposons par l'absurde que A est fausse**" (c.à.d: $non(A)$ est vraie)
2. On fait une série dedéduction pour aboutir à une proposition fausse B

2.6 Démontrer par récurrence

2.6.1 Récurrence simple

1. **Initialisation**: On montre que H_0 est vraie.
2. **Hérédité**: On montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n \Rightarrow H_{n+1}$
3. **Conclusion**: La propriété H_n est **initialisée** et **héréditaire** alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ H_n$ est vraie

2.6.2 Récurrence double

:

1. **Initialisation**: On montre que H_0 et H_1 sont vrais.
2. **Hérédité**: On montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ (H_n\ et\ H_{n+1}) \Rightarrow H_{n+2}$
3. **Conclusion**: La propriété H_n est **initialisée** et **héréditaire** alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ H_n$ est vraie

2.7 Démontrer par analyse-synthèse

2.7.1 Cas n°1

"Montrer qu'il existe un **unique** élément $x \in A$ qui vérifie une condition $C(x)$"

1. **Analyse**: On prend un élément $x \in A$ qui vérifie $C(x)$, on trouve que x est forcement égal à un éléments de A.
2. **Synthèse**: On verifie l'élément trouvé.
3. **Conclusion**: On en déduit que x_0 est l'unique solution vérifiant $C(x)$

2.7.2 Cas n°2

"Déterminer **l'ensemble des éléments** $x \in A$ qui vérifie une condition $C(x)$"

1. **Analyse**: On prend un élément $x \in A$ qui vérifie $C(x)$, on trouve que $x \in B,\ B \subset A$.
2. **Synthèse**: On vérifie que chacun des éléments de B satisfont la condition $C(x)$.
3. **Conclusion**: On en déduit quue B est l'ensemble des éléments $x \in A$ qui vérifient $C(x)$