02 - Nombres Réel

September 2025

Contents

1 Notation sur les ensembles

1.1 $\cup$

$$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

Généralisation:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E, \exists k \in [1, n],\ x \in A_k\}$$

1.2 $\cap$

$$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \textbf{ et } x \in B\}$$

Généralisation:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \in E, \forall k \in [1, n],\ x \in A_k\}$$

2 Inégalités

- $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
- si $c > 0,\ a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$
- si $c < 0,\ a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$
- si $(a, b, c, d) > 0$, alors $(a \leq b \ et \ c \leq d) \implies ac \leq bd$

3 Valeur Absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$ la **valueur absolue** de x, notée $|x|$ vaut:

- x, si $x > 0$
- $-x$ si $x < 0$

Toutes les regles de calculs associées à $|x|$:

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $x \leq |x|$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

Inégalité triangulaire:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

4 Partie Entière

$Definition$: La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand ntier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tq $n \leq x$, on le not alors: $\lfloor x \rfloor$
On a:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

5 Majorant, Minorant, Ensemble Borné

5.1 Majorant / Minorant

- Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}, x \leq M, \forall x \in A$
- Une partie de $A \subset \mathbb{R}$ est dite **minorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}, x \geq M, \forall x \in A$
- Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite bronée si elle est à la fois **minorée** et **majorée**

5.2 Théorème de la borne Supérieur / Inférieur

5.2.1 Th. de la borne Sup

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il existe un unique plus petit majorant de A au sens où tout autre majorant de A lui est supérieur. Alors:

- Le plus petit majorant de A est appelé **borne supérieur** de A, notée $sup(A)$
- Si $sup(A) \in A$ alors $sup(A)$ est le plus grand élément de A

5.2.2 Th. de la borne Inf

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il existe un unique plus grand minorant de A au sens où tout autre minorant de A lui est inférieur. Alors:

- Le plus grand majorant de A est appelé **borne inférieur** de A, notée $inf(A)$
- Si $inf(A) \in A$ alors $inf(A)$ est le plus petit élément de A