Fiches de révision

September 2025

Contents

1 Fonctions Réelles

1.1 f(E):

Pour un ensemble: $E \subset \mathbb{R}$ et une fonction f définie sur E donnés, l'image de E par f, notée: $f(E)$ on a:

$$f(E) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}$$

1.2 Parité:

- f est **paire** si:

$$\forall x \in R, f(-x) = f(x)$$

  On observe une symétrie axiale (Oy)

- f est **impare** si:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

  On observe une symétrie centrale

1.3 Périodicité:

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $T > 0$. On dit que est **périodique de période T**, On a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) \in E, \quad f(x+T) = f(T)$$

1.4 Fonction Majorée, Minorée, Bornée

- f est majorée si:
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

- f est minorée si:
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$$

- f est bornée si: **Majorée** et **Minorée** Ou soit $f : I \to \mathbb{R}$ On a:

$$\textbf{f est bornée} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leq m, \quad \forall x \in I$$

1.5 Fonction Croissante/Décroissante/Monotone:

- f est **croissante** lorsque:
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y, \quad f(x) \leq f(y)$$

- f est **décroissante** lorsque:
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y, \quad f(x) \geq f(y)$$

- f est **monotone** si elle est ou bien **croissante** ou bien **décroissante**.

1.6 Opération usuelles sur les fonctions:

- $(f + g) : x \to f(x) + g(x)$
- $(\lambda f) = x \to \lambda f(x)$
- $(f \times g) : x \to f(x)g(x)$
- Si f ne annule pas sur E, $(\frac{1}{f}) : x \to \frac{1}{f(x)}$

1.7 Fonctions Réciproques:

Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit f est **bijective** lorsque tout élément de F possède un **unique antécedent** dans E par f. On dit que f est bijéctive.
La fonction **identité** vaut:

$$id_E : E \to E$$
$$x \to x$$

Soit $f : E \to F$ est une bijection ssi il existe $g : F \to E$ telle que:

$$f \circ g = id_E \quad et \quad g \circ f = id_E$$

Alors on dit queg est la **fonction réciproque** de f, on la note:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

Interprétation graphique de la réciproque: Représente une symétrie de la fonction par rapport à $\mathbf{y = x}$

2 Continuité et Dérivation

2.1 Continuité:

2.2 Nombre dérivée:

On appelle **taux d'accroissement**:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On dit alors que la fonction f est dérivable en un point x.

2.3 Fonction dérivée et Opérations:

La dérivée complète d'une fonction s'obtient avec:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On a également les opération suivantes:

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$
- $(fg)' = f'g + g'f$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

2.4 Equation de la droite de la tangente:

La droite de la tangente au point a admet pour équation:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2.5 Dérivée et composition:

$$(f \circ u)' = f'(u(x)) * u'$$

2.6 Dérivée d'une réciproque:

Si f est dérivable en $x \in I$ et si $f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ et on a:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

2.7 Sens de variation d'une fonction:

Si $f : x \to I$ est dérivable sur $E \subset I$, on a:

- Si $f'(x) < 0$ alors f est décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ alors f est croissante.
- Si $f'(x) = 0$ alors f est constante.

2.8 Fonction de classe C^n:

- Notion de dérivées n-èmes: Une fonction pouvant, sur I, être dérivée un nombre n de fois se note:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}$$

- Classe d'une fonction: Une fonction définie sur un intervalle ouvert I est dite de classe $C^{(n)}$ si elle y est dérivable n fois.

Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dérivable sur I et de classe $C^{(n)}$ on a les règles suivantes:

- pour: $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f(x) + g(x) \to C^{(n)}$
- pour: $f(x)g(x) \to C^{(n)} \implies \frac{f(x)}{g(x)} \to C^{(n)}$

2.9 Théorème de la bijection réciproque:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, J une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$:

- **Contiue** sur I,
- **Strictement Monotone** sur I

Alors on dit que f **induit** une bijéction: soit:

$$\begin{aligned} g : I &\to f(I) \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

2.10 Dérivées partielles:

On parle de dérivées partielles lorsque nous sommens en présence de fonction à 2 variables ou plus. On définie les **dérivées partielles** de f en (x, y) (lorsqu'elles existent)par:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

En partique, on decomposera l'analyse en autant de partie qu'il y a de variable. On trouvera la dérivée de la fonction pour chaque variable (les autres seront alors considérées comme des constantes.)

3 Fonction Usuelles

3.1 $f : x \mapsto x^n$

- définie sur $\mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad n = 2k, f(-x) = f(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad n = 2k + 1, f(-x) = -f(x)$
- **Continue** et **Dérivable** sur $\mathbb{R}$

3.2 $f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$

- définie sur $\mathbb{R}^*$
- Conserve les mêmes propriété de parité que x^n
- **Continue** et **Dérivable** sur $\mathbb{R}^*$

3.3 $f : x \mapsto \sqrt{x}$

- définie et continue sur $\mathbb{R}_+$
- Strictement croissante.
- **Continue** et **Dérivable** sur $\mathbb{R}_+^*$

3.4 $f : x \mapsto log$ et exp

- $exp(x)$ est la seule foction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ dont $exp(0) = 1$ et dont la dérivée est égale à elle même.
- La fonction $ln(x)$ est la fonction réciproque de $exp(x)$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Elles sont **strictement** croissante.

On a alors les propriétés suivante:
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in N$:

- $exp(a + b) = exp(a) \times exp(b)$
- $exp(a - b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$
- $exp(n \times a) = exp(a)^n$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in N$:

- $ln(a \times b) = ln(a) \times ln(b)$
- $ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$
- $ln(x^n) = n \times ln(a)$

3.5 Croissances Comparrées:

- Pour $ln(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^n ln(x) = 0$$

- Pour $exp(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{exp(x)}{x^n} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n exp(x) = 0$$

3.6 Exponentielle de base a

Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit a^b, on lit "a exposant b", le nombre:

$$a^b = exp(b \times ln(a))$$