Sheet 2

2014-05-19

by 768201 & 766414

Exercise 6

a

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4+\beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\alpha \\ 20+5\beta \\ 5\gamma \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4+\beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 4x \\ \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ 4+\beta+4x \\ \gamma+\gamma^2 \end{pmatrix}$$

c

$$\begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4+\beta \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3 \\ 6\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta+1 \\ \gamma-6\alpha \end{pmatrix}$$

d

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = \sqrt{2} \cdot 5$$

e

$$\text{norm}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

f

$$\begin{pmatrix} 3 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 6 + 16 + 30 = 52$$

g

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{52}{\sqrt{50 \cdot 56}}\right. = 10.67°$$

h

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 8 - 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 - 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 7

a

2 Richtungsvektoren der Ebene berechnen:

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Normalvektor:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da der Vektor ein Richtungsvektor ist, kann man ihn normalisiert aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b

Da in allen drei Vektoren die y-Koordinate 0 ist kann man die Rechnung vereinfachen in dem man die Punkte nur als zwei dimensional betrachtet. Die Punkte wären dann: $(5, 0)$, $(0, 5)$ und $(10, 5)$.
Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz ergibt sich:

$$area(P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \cdot \left|(0 - 5) \cdot (5 - 0) - (10 - 5) \cdot (5 - 0)\right| = \frac{1}{2} |-25 - 25| = 25$$

Exercise 8

a

$$a = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 28 \\ 45 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 3z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 1 & \delta \\ 0 & \zeta & 0 & \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x + 1 \\ \beta \cdot z \\ \gamma \cdot x + z + \delta \\ \zeta \cdot \beta + \eta \end{pmatrix}$$

b

$$D \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 10 + 9 + 4 & 3 + 5 + 12 - 12 & 5 + 20 + 9 - 0 & 1 + 10 + 0 - 4 \\ 2 - 6 + 6 - 2 & 3 + 3 + 8 + 6 & 5 + 12 + 6 + 0 & 1 + 6 + 6 + 2 \\ 8 - 10 - 9 - 2 & 12 + 5 - 12 + 6 & 20 - 20 - 9 & 4 + 10 - 9 + 2 \\ 8 - 4 + 21 - 1 & 12 + 2 + 28 + 3 & 20 + 8 + 21 & 4 + 4 + 21 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 8 & 34 & 16 \\ 0 & 20 & 23 & 15 \\ -13 & 11 & 31 & 7 \\ 24 & 45 & 49 & 30 \end{pmatrix}$$

$$E \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 3 + 20 + 4 & 10 + 9 + 25 + 2 & 6 + 6 - 15 + 7 & -8 + 6 + 10 + 1 \\ -2 + 1 + 16 + 8 & -10 + 3 + 20 + 4 & -6 + 2 - 12 + 14 & 8 + 2 + 8 + 2 \\ 3 + 4 + 12 + 12 & 15 + 12 + 15 + 6 & 9 + 8 - 9 + 21 & -12 + 8 + 6 + 3 \\ -1 + 3 - 0 + 4 & -5 + 9 + 10 + 2 & -3 + 6 + 0 + 7 & 4 + 5 + 0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & 46 & 4 & 9 \\ 23 & 17 & -2 & 20 \\ 31 & 48 & 29 & 5 \\ 6 & 6 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

c

$$F = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

d

$$\det(G) = \det\left(\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\right) = 6 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 43$$

$$\det(H) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2\det\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right) + 5\det\left(\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2 \cdot (8+4) - 3 \cdot \left(-2-6\right) + 4 \cdot (2-12) = 2 \cdot 12 - 3 \cdot -8 + 5 \cdot -10 = 24 + 24 - 50 = -2$$

$$\det(J) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2\det\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) - \det\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) + 3\det\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) - 4\det\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2 \cdot 52 - (-39) + 3 \cdot 52 - 4 \cdot 65 = 39$$

e

K	E	
$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zeilen vertauschen und dann zweite Zeile mal -1
$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	erste Zeile mal -2; die Addition als neue zweite Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	zweite Zeile durch 11
$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$	die erste Zeile mal 4; die Additon als neue erste Zeile
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$	die Matrix die nun bei E steht ist die inverse Matrix von K

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

L	E	
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zeilen 1 und 2 vertauschen
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$	Zeilen 1 (mal -2) und 2 werden addiert und die neue zweite

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zeile; Zeilen 1 (mal 2) und 2 werden addiert und die neue dritte Zeile;
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	Zeilen 2 mal -1; Zeilen 2 und 3 werden addiert und die neue dritte Zeile;
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Zeilen 1 und 2 (mal -1) werden addiert und die neue erste Zeile; Zeilen 2 und 3 (mal -3) werden addiert und die neue dritte Zeile;
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	die Matrix die nun bei E steht ist die inverse Matrix von L

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M	E	
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
...	...	

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -10 & 0 & -12 \\ 15 & -18 & -3 & -18 \\ -13 & 14 & 3 & 18 \\ 11 & -10 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

Exercise 9

a

$X_Q = u \cdot P1_x + v \cdot P2_x + w \cdot P3_x$
$Y_Q = u \cdot P1_y + v \cdot P2_y + w \cdot P3_y$

da $u + v + w = 1$ folgt $w = 1 - u - v$

$$X_Q = u \cdot (P3_x - P1_x) + v \cdot (P3_x - P2_x) + P3_x$$
$$Y_Q = u \cdot \left(P3_y - P1_y\right) + v \cdot \left(P3_y - P2_y\right) + P3_y$$
$$Q = u \cdot \begin{pmatrix} P3_x - P1_x \\ P3_y - P1_y \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} P3_x - P2_x \\ P3_y - P2_y \end{pmatrix} + P_3$$
$$Q = \begin{pmatrix} P3_x - P1_x & P3_x - P2_x \\ P3_y - P1_y & P3_y - P2_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + P_3$$
$$\overrightarrow{QP_3} = \begin{pmatrix} P3_x - P1_x & P3_x - P2_x \\ P3_y - P1_y & P3_y - P2_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P3_x - P1_x & P3_x - P2_x \\ P3_y - P1_y & P3_y - P2_y \end{pmatrix}^{-1} \cdot \overrightarrow{QP_3}$$

Werte einsetzen:

$$A = \begin{pmatrix} P3_x - P1_x & P3_x - P2_x \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4 & 7 - 4 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P3_y - P1_y & P3_y - P2_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-5 & 2-5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$b = \overrightarrow{QP_3} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

A	E	
$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	erste Zeile durch -3
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	erste Zeile (mal 4) und zweite Zeile addiert sind neue Zeile 2
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$	zweite Zeile durch -7
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$	erste Zeile und zweite Zeile addiert sind neue Zeile 1
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$	DIe Matrix bei E ist die inverse Matrix von A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} + \frac{5}{14} \\ -\frac{2}{21} + \frac{5}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{14} \\ \frac{11}{42} \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{6}{14}$$

$$v = \frac{11}{42}$$

$$w = 1 - \frac{18}{42} - \frac{11}{42} = \frac{13}{42}$$

$$\left(\frac{6}{14}, \frac{11}{42}, \frac{13}{42} \right)$$

b

Nach Laplacschen Bildungssatz gilt

$$area(\Delta(P_1, P_2, P_3)) = \frac{1}{2} \det(A)$$

Die det(A) lässt sich aus Aufgabeteil auch darstellen als:

$$\det(A) = \frac{\left(x_Q - P3_x\right)\left(P2_y - P3_y\right) - \left(y_Q - P3_y\right)(P2_x - P3_x)}{u}$$

bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass sich dies auch so darstellen lässt:

$$\det(A) = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} x_Q - P3_x & P2_y - P3_y \\ y_Q - P3_y & P2_x - P3_x \end{pmatrix}\right)}{u}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_2}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{P_3Q}, \overrightarrow{P_3P_2}\right)}{u}$$

$$\Leftrightarrow area(\Delta(P_1, P_2, P_3)) = area\ \frac{\Delta\left(Q, P_2, P_3\right)}{u}$$

$$\Leftrightarrow area(\Delta(P_1, P_2, P_3)) \cdot u = area\left(\Delta\left(Q, P_2, P_3\right)\right)$$

u lässt sich (aus Aufgabeteil a) darstellen als $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(A^{-1} \cdot b\right)\right|$**;Mit der Matrix gewinnen wir den oberen Wert es Vektores, welcher beim Betrag dann allein ist** $area(\Delta(P_1, P_2, P_3))$ **wissen wir von oben**

$$\Rightarrow area\left(\Delta\left(Q, P_2, P_3\right)\right) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(A^{-1} \cdot b\right)\right| \cdot \frac{1}{2} \det(A)$$

analog dazu ist:

$$\Rightarrow area\left(\Delta\left(Q, P_1, P_3\right)\right) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(A^{-1} \cdot b\right)\right| \cdot \frac{1}{2} \det(A)$$

und

$$\Rightarrow area\left(\Delta\left(Q, P_1, P_2\right)\right) = \left(1 - \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(A^{-1} \cdot b\right)\right| - \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(A^{-1} \cdot b\right)\right|\right) \cdot \frac{1}{2} \det(A)$$

c

Aus Aufgabeteil b $area(\Delta(P_1, P_2, P_3)) \cdot u = area\left(\Delta\left(Q, P_2, P_3\right)\right)$ **ergeben sich dann folgende Verhältnisse**

$$u = \frac{area\left(\Delta\left(Q, P_2, P_3\right)\right)}{area(\Delta(P_1, P_2, P_3))}$$

$$v = \frac{area\left(\Delta\left(Q, P_1, P_3\right)\right)}{area(\Delta(P_1, P_2, P_3))}$$

$$w = \frac{area\left(\Delta\left(Q, P_2, P_1\right)\right)}{area(\Delta(P_1, P_2, P_3))}$$

Exercise 10

V1 - V4 beweisen, dass es eine abelsche Gruppe ist.

1. V1 - Assoziativ:
   $\left(\left(f+g\right)+h\right)(x) = \left(g + \left(f+h\right)(x)\right.$ da $\left(f(x)+g(x)\right)+h(x) = g(x) + \left(f(x)+h(x)\right)$ aus (1)
2. V2 - Existenz eines neutralen Elements bezüglich Addition:
   wenn $g(x) = 0$ dann ist g das neutrale Element für alle $f(x) = f(x) + g(x)$
3. V3 - Existenz eines inversen Elements:
   $f(x)^{-1} = -f(x)$

4. V4 - Kommutativ:
   $\big(f+g\big)(x) = \big(g+f\big)(x)$ da $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$ aus (1)

S1 - S4 garantieren die saubere Multiplikation mit einem Skalar.

1. S1 - Distributiv mit einem Skalar:
   $\Big(\lambda\big(f+g\big)(x)\Big) = \lambda\big(f+g\big)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$ aus (1) & (2)
2. S2 - Skalar distributiv mit Element des Vektorraums
   $\Big(\big(\lambda+\eta\big)f(x)\Big) = \big(\lambda+\eta\big)\big(f\big)(x) = \lambda f(x) + \eta f(x)$ aus (1) & (2)
3. S3 - Assoziativ mit einem Skalar
   $\big(\lambda \cdot \eta\big) \cdot f(x) = \lambda \cdot \big(\eta \cdot f(x)\big)$ aus (2)
4. S4 - Existenz eines neutralen Elements bezüglich Multiplikation mit Skalar:
   Wenn $\lambda = 1$ dann ist λ das neutrale Element für alle $f(x) = \lambda \cdot f(x)\big)$

Da hiermit alle 8 Eigenschaften gezeigt sind, ist $Hom(V, W)$ ein Vektorraum.