

## Propagation d'une impulsion électrique le long d'une fibre nerveuse

Cette propagation est décrite par une variante des équations de Fitzhugh-Nagumo :

$$v_t = Dv_{zz} + v(v-1)(\mu-v) - w + S \quad (1)$$

$$w_t = \beta_1 v - \beta_2 w \quad (2)$$

Dans ces équations  $v(z, t)$  représente l'amplitude de l'impulsion,  $w(z, t)$  est une variable annexe et  $S(z, t)$  est un stimulus externe appliqué au milieu de la fibre. On a également

$$0 \leq z \leq 50 \quad 0 \leq t \leq 200$$

$$D = 0.01 \quad \mu = 0.08 \quad \beta_1 = 0.008 \quad \beta_2 = 2.54\beta_1$$

$$S(z, t) = 0.15 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 2$$

$$= 0 \quad \text{pour } 2 < t$$

$$\text{CI : } v(z, 0) = w(z, 0) = 0$$

$$\text{CL : } v(z_{\min}, t) = v(z_{\max}, t) = 0, w(z_{\min}, t) = w(z_{\max}, t) = 0$$

Il est important de noter que le soin apporté à la modélisation de  $S(z, t)$  est essentiel à l'obtention d'une simulation correcte des phénomènes. Dans une première étape, on se contentera d'appliquer le stimulus en un seul point de la grille spatiale en  $z = 25$ .

### Questions

1° élaboration d'un simulateur de ce système d'équations : écrire le programme qui permette de visualiser la solution  $v(z, t)$  en fonction de  $z$  pour des valeurs de  $t_k = k\Delta t$  avec  $\Delta t = 0.2$  et  $k = 0, \dots, 1000$  en utilisant les outils les plus simples possibles : intégrateur ode45, schémas de différences finies à nombre minimal de points, nombre de points de grille suffisant. Afin d'avoir une représentation réaliste des phénomènes, on visualisera la solution dans une représentation 3D : les traditionnels axes  $ox$  et  $oy$  seront les variables  $z$  et  $t$ , et  $v$  sera porté selon l'axe  $oz$ .

Dès que le simulateur fonctionne, investiguez l'influence du choix de ces outils sur la qualité de la simulation, tant en qualité qu'en temps de calcul : choix de l'intégrateur temporel et des schémas de différences finies. Tenez compte lorsque vous modifiez votre choix d'intégrateur temporel de l'option Jpattern lorsqu'elle est disponible : mesurez-en l'impact sur la simulation et expliquez votre méthode de calcul de Jpattern.

Ajustez également par tâtonnements le nombre de points de grille de manière à rendre vos résultats graphiques indépendants de ce nombre et modifiez vos choix de schémas de différences finies jusqu'à obtention des meilleurs profils graphiques.

Au terme de cette étude, sélectionnez les outils qui selon vous conduisent au meilleur simulateur en termes de qualité des profils  $v(z, t)$  et de temps de calcul.

2° implémentation plus réaliste de  $S(z, t)$  : une implémentation plus réaliste consiste à programmer de manière à imposer

$$\int_0^{50} S(z, t) dz = cte$$

Compte tenu du caractère ponctuel du stimulus, cela se réduit à

$$\int_{z_M - \Delta z/2}^{z_M + \Delta z/2} S(z, t) dz = cte \quad (3)$$

(où  $z_M$  est la coordonnée du point milieu de la fibre et  $\Delta z$  la distance séparant deux points de grille consécutifs).

c'est-à-dire, en imaginant que  $S(z, t)$  est constant et égal à  $S$  sur ce dernier domaine spatial,

$$S \Delta z = cte \quad \text{ou encore} \quad S = \frac{cte}{\Delta z}. \quad (4)$$

On adaptera le simulateur précédent de manière à respecter cette dernière relation en imposant

$$cte = 0.15 \quad (5)$$

Vérifiez que de cette manière vos résultats de simulation sont indépendants du nombre de points de grille (pour autant que ce nombre soit suffisant pour éliminer les imprécisions de calcul dues à une grille trop peu fine).

Une autre hypothèse peu réaliste peut être levée : il est illusoire de générer dans la pratique médicale un stimulus rigoureusement ponctuel. Ceci peut être pris en compte en « élargissant » la plage des coordonnées sur laquelle le stimulus est programmé : on remplace alors (3) par

$$\int_{z_M - k\Delta z - \Delta z/2}^{z_M + k\Delta z + \Delta z/2} S(z, t) dz = cte \quad \text{avec } k \text{ entier.} \quad (6)$$

et (4) par

$$S = \frac{cte}{(2k+1)\Delta z} \quad (7)$$

Adaptez à nouveau votre simulateur à cette modélisation en conservant (5). Procédez alors à plusieurs simulations en modifiant le nombre de points de grille. Commentez les résultats obtenus. Observez l'évolution des résultats quand pour  $k$  maintenu fixe (et différent de zéro) vous augmentez peu à peu le nombre total de points de grille.

2° élaborez un simulateur de ce système d'équations en éléments finis lagrangiens.

3° élaborez un simulateur de ce système d'équations en éléments finis hermitiens.

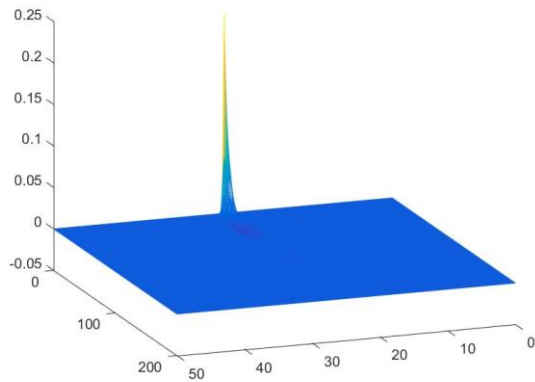
Comparez les mérites respectifs des 3 simulateurs.

## Réponse

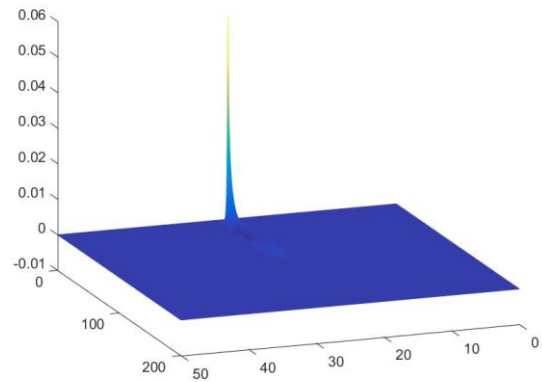
On observe que le problème est non stiff

1° simulation ponctuelle :

201 points de grille



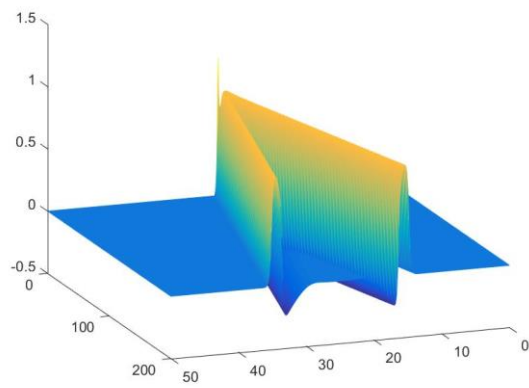
1001 points de grille



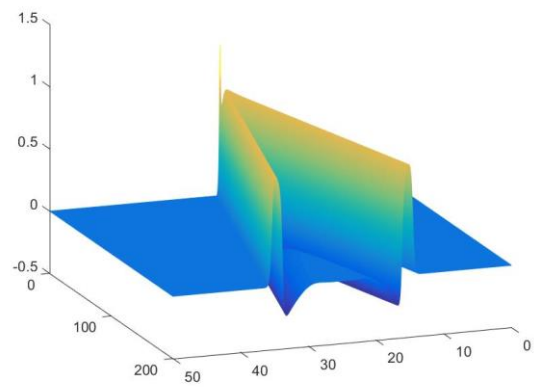
On observe que l'amplitude du signal a changé.

2° simulation de type  $S = \frac{cte}{\Delta z}$  :

301 points de grille



1001 points de grille

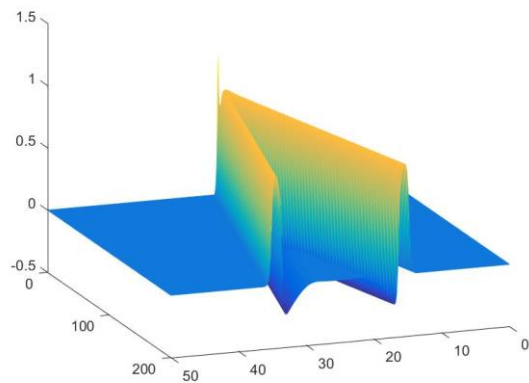


La simulation est la même, à la finesse près, due au maillage.

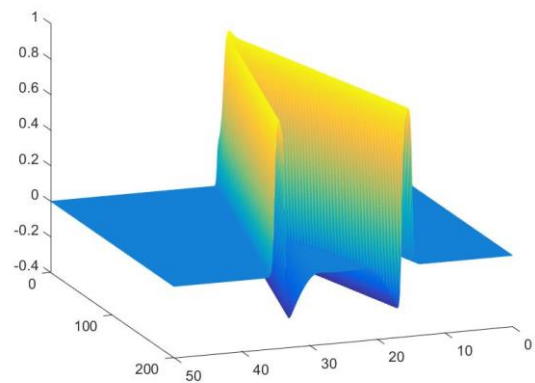
3° simulation de type  $S = \frac{cte}{(2k+1)\Delta z}$

a) 301 points de grille :

k = 1



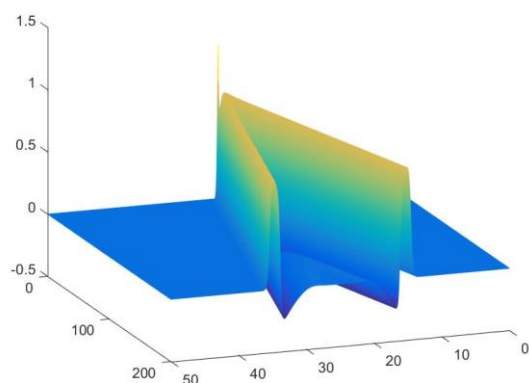
k = 3



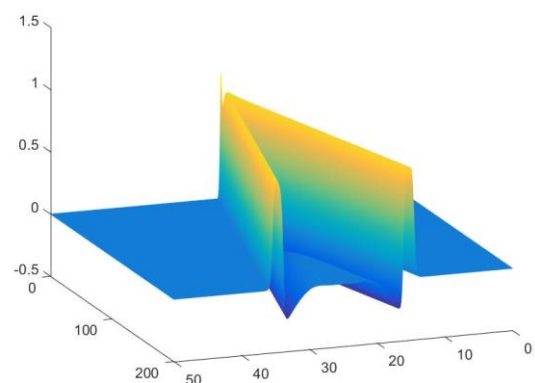
Quand la grille est peu fournie, l'étalement de la zone d'application du stimulus modifie les résultats de simulation

b) 2001 points grille :

k = 1



k = 3



Quand le nombre de points de grille augmente on tend peu à peu au type de simulation obtenue avec k = 1 : pour un nombre de points de grille tendant vers l'infini, la simulation est strictement indépendante de k.