UMONS
Université de Mons

Faculté Polytechnique

Optimisation Non Linéaire

Homework 1

GUILY Thomas, MAGAÑA LOPEZ Gustavo

POLYTECH MONS

Sous la direction du professeur VANDAELE Arnaud

Année Académique 2018-2019

ACADÉMIE UNIVERSITAIRE WALLONIE-BRUXELLES

Partie b: Ecrire le problème de moindres carrés sous la forme quadratique (1)

Premièrement on a la forme quadratique, pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}x^T Q x \;-\; c^T x \;+\; p \tag{1}$$

Le problème de moindres carrés:

$$\min\; \frac{1}{2}\,\|Ax \;-\; b\|_2^2 \tag{2}$$

Pour avoir ce problème sous la forme quadratique (1), il suffit de faire quelques transformations algébriques:

$$\min\; \frac{1}{2}\,\|Ax \;-\; b\|_2^2 \;=\; \min \frac{1}{2}(Ax \;-\; b)^T \cdot (Ax \;-\; b) \tag{3}$$

La suite:

$$\min\; \frac{1}{2}(x^T A^T \;-\; b^T) \cdot (Ax \;-\; b) \tag{4}$$

En faisant le produit, nous avons:

$$\min\; \frac{1}{2}(x^T A^T A x \;-\; x^T A^T b \;-\; b^T A x \;+\; b^T b) \tag{5}$$

De l'hypothèse qu'on a une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et aussi de la définition de la norme, nous avons que chaque élément de la somme appartient à $\mathbb{R}$:

$$x^T A^T b \;=\; (x^T A^T b)^T \tag{6}$$

$$x^T A^T b \;=\; b^T (x^T A^T)^T \tag{7}$$

$$x^T A^T b \;=\; b^T A x \tag{8}$$

Avec cette symétrie l'équation (5) devient:

$$\min\; \frac{1}{2}(x^T A^T A x \;-\; 2b^T A x \;+\; b^T b) \tag{9}$$

$$\min\; \frac{1}{2}x^T A^T A x \;-\; b^T A x \;+\; \frac{1}{2}b^T b \tag{10}$$

Avec les définitions suivantes:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}A^T A \\ c^T &= b^T A \\ p &= \frac{1}{2}b^T b \end{aligned} \tag{11}$$

Le problème de moindres carrés est mis sous la forme (1).