Topics in Convex Optimization - Laboratoire 1

04 novembre 2020

Partie 1. Systèmes linéaires indéterminés.

Soit le système linéaire de $m = 2$ équations à $n = 4$ inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parmi toutes les solutions $x \in \mathbb{R}^4$ de ce système linéaire,

(1.1) trouvez le vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ possédant la plus petite norme ℓ_2.

(1.2) trouvez le vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ minimisant la quantité suivante :

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_F^2,$$

(1.3) trouvez le vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ possédant la plus petite norme ℓ_1.

(1.4) trouvez le vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ possédant la plus petite norme ℓ_∞.

Partie 2. Méthodes du premier ordre pour fonctions quadratiques.

Soit la fonction quadratique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (**avec Q symétrique et semi-définie positive**) :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - c^T x + p. \tag{1}$$

(2.1) Dans le cadre de la méthode du gradient, écrivez la mise à jour du vecteur x effectué à chaque itération pour le problème sans contraintes (1).

Implémentez une fonction `function x=gradient(Q,c,p,x0,maxiter)` effectuant les mises à jour suivantes `maxiter` fois à partir de l'itéré initial `x0` (*le pas est* $\alpha = \frac{1}{L}$ *avec* $L = \lambda_{\max}(Q)$) :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tfrac{1}{L} \nabla f(x^{(k)}).$$

(2.2) Implémentez une fonction `function x=acceleratedgradient1(Q,c,p,x0,maxiter)` effectuant les mises à jour suivantes `maxiter` fois à partir de l'itéré initial `x0` :

$$\alpha_{k+1} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha_k^4 + 4\alpha_k^2} - \alpha_k^2\right),$$
$$\beta_k = \tfrac{\alpha_k(1-\alpha_k)}{\alpha_k^2 + \alpha_{k+1}},$$
$$y = x^{(k)} + \beta_k \left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right),$$
$$x^{(k+1)} = y - \tfrac{1}{L} \nabla f(y).$$

(2.3) Implémentez une fonction `function x=acceleratedgradient2(Q,c,p,x0,maxiter)` effectuant les mises à jour suivantes `maxiter` fois à partir de l'itéré initial `x0` :

$$\beta_k = \tfrac{k-1}{k+2},$$
$$y = x^{(k)} + \beta_k \left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right),$$
$$x^{(k+1)} = y - \tfrac{1}{L} \nabla f(y).$$

(2.4) Exécutez le script `RunMe` afin de comparer les erreurs obtenues.

Partie 3. Méthodes du premier ordre pour une fonction convexe.
Pour les données suivantes :

$a^{(i)}$	$b^{(i)}$
$(1,2)$	1
$(1,3)$	1
$(2,2)$	1
$(2,3)$	1
$(2,1.5)$	0
$(2,1)$	0
$(3,1)$	0
$(3,2)$	0

on définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x_0,x_1,x_2) = \sum_{i:b^{(i)}=1} -\ln\left(\frac{1}{1+e^{-(x_0+a_1^{(i)}x_1+a_2^{(i)}x_2)}}\right) + \sum_{i:b^{(i)}=0} -\ln\left(1-\frac{1}{1+e^{-(x_0+a_1^{(i)}x_1+a_2^{(i)}x_2)}}\right).$$

(3.1) Montrez que f est convexe

(3.2) Minimisez f en appliquant la méthode du gradient et la version accélérée décrite au point (2.3).
(le calcul des pas sera effectué à l'aide des conditions de Wolfe)