DM Lycée - CPGE

Antoine Becquet, Thomas Cometx

Préambule

Public Ce devoir s'adresse aux futur·e·s élèves de GPGE des filières MP2I ou MPSI : les exercices proposés visent à préparer spécifiquement le premier semestre de celles-ci. Cependant, les élèves des autres filières de classes préparatoires ainsi que celles et ceux poursuivant des études de mathématiques en général y trouverons également matière à apprendre et progresser.

Objectifs Trois objectifs majeurs :

1. Revenir avec un peu de recul sur les points importants de l'enseignement des mathématiques au lycée en insistant sur ceux qui posent le plus problème dans le supérieur.
2. Proposer quelques notions et techniques peu voire jamais abordées au lycée mais qu'il est bon d'avoir rencontrées au moins une fois avant la prépa.
3. Prendre de bonnes habitudes de rédaction. C'est sans doute le point le plus important : que ce soit en devoir, pour les concours ou pour la rédaction de textes mathématiques en général, une mauvaise rédaction sera toujours extrêmement pénalisante. À partir de maintenant, vos lecteurs et lectrices passerons moins de temps à essayer de comprendre ce que vous avez maladroitement cherché à dire qu'à évaluer ce que vous avez vraiment dit et comment.

Avant de commencer *Téléchargez, imprimez, lisez, apprenez par coeur et encadrez le Petit manuel de bonne rédaction de Christophe Bertault. Considérez que vous n'aurez répondu à un exercice de ce devoir que si votre rédaction suit toutes les règles énoncées dans ce petit manuel.*

*

* *

1 Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Exercice 1 *Écriture d'assertions quantifiées*

1. Écrire les assertions suivantes à l'aide des quantificateurs et symboles logiques présentés ci-dessus.
   (a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^3$.
   (b) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.
   (c) Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un rationnel.
2. Écrire les définitions suivantes avec quantificateurs et symboles logiques.
   (a) $n \in \mathbb{N}$ est impair.
   (b) $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire.
   (c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est périodique.

Exercice 2 *Démonstrations d'assertions quantifiés*

1. Démontrer les assertions suivantes.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y > x.$
   (b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R},\ x < z < y.$
   (c) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n.$
2. Montrer que les assertions suivantes sont fausses.
   (a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ e^x < e^y.$
   (b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ln(k + 1) \leq e^N.$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = N.$

Exercice 3 *Démonstration d'implications*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $n \mid m$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x^n - 1 = 0$, alors $x^m - 1 = 0$.
3. Soient (u_n) géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$. Démontrer que si $-1 < q < 1$, alors (S_n) est convergente.
4. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propriétés portant sur les éléments d'un ensemble E. Démontrer que :

$$(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \quad \Rightarrow \quad (\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E,\ \mathcal{Q}(x))$$

Exercice 4 *Réciproques et équivalences*

1. Énoncer les réciproques des propositions de l'exercice précédent.
2. Pour chacune d'elles, démontrer leur véracité ou fausseté.
3. Énoncer les équivalences éventuelles.

Exercice 5 *Contraposées*

Démontrer les implications suivantes en utilisant la contraposée.

1. Soient x et $y \in \mathbb{N}$. Démontrer que Si $7 \mid (x^2 + y^2)$ alors $7 \mid x$ et $7 \mid y$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 6 *Quelques preuves par récurrence*

1. Démontrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2.$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{n} \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 *Démonstration du principe de récurrence forte*

On se propose dans cet exercice de démontrer le principe de récurrence forte :

> *Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ une proposition portant sur des entiers vérifiant :*
> — ***Initialisation :*** *$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;*
> — ***Hérédité forte :*** *Pour tout $n \geq n_0$, ($\mathcal{P}(k)$ vraie quelque soit k entre n_0 et n) $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie ;*
> *alors, on a :*
> — ***Conclusion :*** *$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.*

1. Écrire le principe de récurrence « simple » avec la même présentation que ci-dessus.
2. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ une proposition portant sur des entiers. On définit la propriété $\mathcal{Q}$ par :
$$\mathcal{Q}(n) : \forall k \in [\![n_0 \,; n]\!]\,,\ \mathcal{P}(k)$$
Vérifier que si $\mathcal{P}$ vérifie les hypothèses du principe de récurrence forte, alors $\mathcal{Q}$ vérifie les hypothèses du principe de récurrence simple.
3. Écrire une démonstration par récurrence simple du principe de récurrence forte.

Exercice 8 *Application du principe de récurrence forte*

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et :
$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{n/2} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de (u_n) et conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Démontrer cette conjecture par récurrence forte.

Exercice 9 *Classes d'équivalence modulo n*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on définit $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x modulo n par :
$$\overline{x} = \{\, k \in \mathbb{Z} \mid k \equiv x \quad [n] \,\}$$

1. Donner les classes d'équivalences modulo 4 de 0, 1, 2, 3, 4 et 5.
2. Soient x et y deux entiers distincts entre 0 et $n-1$. Montrer que $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont disjoints.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe x entre 0 et $n-1$ tel que $z \in \overline{x}$.
4. En déduire que les classes d'équivalences modulo n de 0, 1, ... , $n-1$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

Exercice 10 *Domaines des fonctions composées*

Pour chacune des expressions de la fonction f suivantes, écrire f comme une fonction composée $f = g \circ h$ et en déduire l'ensemble de définition de la fonction f.

1. $f(x) = \ln(1 - x^2)$.
2. $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x+2)}$.
4. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+x)}{\ln(1-x)}$.

Exercice 11 *Calcul de bijections réciproques*

Pour chacune des fonctions f suivantes, résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x, où y est un réel fixé de l'ensemble d'arrivée de f.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$,
2. $f : \mathbb{R}\backslash\{5\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{2\}$ définie par $f(x) = \dfrac{3+2x}{x-5}$,
3. $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1\,; +\infty[$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

*

* *

2 Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Exercice 12 *Manipulation de puissances*

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme $\alpha^n\beta^m$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}$.
   (a) $4^8 \times 2^4 \times 3^7 \times \dfrac{1}{3^{-4}}$.
   (b) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2^4 3^2}$.
2. Soient a et b deux entiers non-nuls, p et q deux entiers relatifs. Même question.
   (a) $\dfrac{a^7 b^{12}}{a^{-2}b^2}$.
   (b) $a^{p-q}(ab)^{p-q}$.
   (c) $(a^2)^q b^q \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$.

Exercice 13 *Sommes usuelles*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence les formules suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, où $q \neq 1$.

Exercice 14 *Somme télescopique*

Soit (u_n) une suite. On se propose de démontrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$.

1. <u>Démonstration impropre :</u> retrouver la propriété en écrivant T_n sans le symbole somme mais avec des « ... ».
2. <u>Démonstration par récurrence :</u> en remarquant que $T_{n+1} = T_n + (u_{n+2} - u_{n+1})$, démontrer par récurrence la propriété.

3. Démonstration par changement d'indice :
   (a) En effectuant un changement d'indice $k' = k+1$, démontrer que :
   $$T_n = \sum_{k'=1}^{n+1} u_{k'} - \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   (b) Conclure.

Exercice 15 *Un exemple de somme télescopique*

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Son souhaite calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$
3. En réalisant un changement d'indice $k' = k+1$ dans la deuxième somme (comme dans l'exercice précédent), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}.$$
4. En écrivant
   $$S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$$
   et en simplifant les formes qui apparaissent des deux côtés, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 16 *Formule de Pascal*

On rappelle la définition des coefficients binomiaux : si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Démontrer la formule de Pascal :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N} \mid k < n,\ \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exercice 17 *Application du binôme de Newton*

A l'aide de la formule du binôme de Newton, simplifier les expressions suivantes :

1. $(1-\sqrt{5})^3$
2. $(3+2i)^4$
3. $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^6$

Exercice 18 *Somme des coefficients binomiaux*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exercice 19 *Binône de Newton et matrice nilpotente*

Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Calculer N^0, N^1, N^2, N^3 puis N^k pour $k \geq 4$.
2. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, calculer $\dbinom{n}{0}$, $\dbinom{n}{1}$ et $\dbinom{n}{2}$.
3. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer $(I_3 + \lambda N)^n$.

Exercice 20 *Fonction tangente*

On définit sur $\mathcal{D} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \,\}$ la fonction tangente par l'expression :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

1. Démontrer que tan est une fonction impaire et π-périodique.
2. Étudier les limites de $\tan(x)$ en $\frac{\pi}{2}^-$ et $-\frac{\pi}{2}^+$.
3. Démontrer que tan est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que l'on a pour tout $x \in \mathcal{D}$:
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
4. Soient a et b deux réels de $\mathcal{D}$ tels que $a + b \in \mathcal{D}$. Démontrer que :
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Exercice 21 *Une formule de trigonométrie*

Soit $x \in \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \pi \quad [\pi] \,\}$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$.

1. Justifier que t est bien défini.
2. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, montrer que
$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$
3. Montrer que
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
4. En déduire que
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 22 *Factorisation par l'arc moitié*

On considère deux nombres complexes de même module sous forme exponentielle $z_1 = re^{ia}$ et $z_2 = re^{ib}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$. On cherche la forme exponentielle de $z_1 + z_2$.

1. En factorisant $z_1 + z_2$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$, démontrer que $z_1 + z_2 = 2r\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$.
2. Cette écriture ne correspond pas toujours à la forme exponentielle de $z_1 + z_2$, pourquoi ?
3. Application : Soient $a, b \in \,]0\,;\pi[$. Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle. *Refaire la factorisation plutôt qu'appliquer le résultat.*
   (a) $1 + e^{ia}$
   (b) $1 - e^{ia}$
   (c) $e^{3ia} + e^{5ia}$
   (d) $\dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$

Exercice 23 *Le périmètre des polygones réguliers*

On appelle P_n le polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle unité. C'est le polygone à n côtés sont les sommets sont les points d'affixes complexes les racines n-ièmes de l'unité : c'est à dire les n points du plans complexe dont les affixes sont solutions de $z^n = 1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \ldots n-1\}$.
2. On note alors A_k le point d'affixe complexe $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots n-1\}$. Ainsi P_n est le polygone $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$. Montrer que pour tout $k \in 0, \ldots n-2$, la distance A_kA_{k+1} vaut $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Il en est de même pour la distance $A_{n-1}A_0$.
3. En déduire que le périmètre de P_n vaut $2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

4. On admet pour cette dernière question que si une suite (u_n) a pour limite 0, alors $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}$ tend vers 1. Déterminer la limite du périmètre de P_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Le périmètre de quelle figure retrouve-t-on ?

*
* *

3 Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

Exercice 24 *Équations de tangentes*

Donner l'équation des de la tangente au point x_0 à la courbe représentative de la fonction f dans les cas suivants.

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x}$ en $x_0 = 1$.
2. $f(x) = \exp(\cos(x))$ en $x_0 = \pi$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ en $x_0 = -1$.

Exercice 25 *Des primitives*

Pour chacune des expressions de la fonction f suivantes, déterminer les primitives de f sur l'intervalle I donné.

1. $I =]-\infty, 0[, f(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $I = \mathbb{R}, f(x) = x\cos(x^2+x)$
3. $I =]1, +\infty[, f(x)\dfrac{1}{x\ln(x)}$
4. $I =]0, 1[, f(x)\dfrac{1}{x\ln(x)}$
5. $I = \mathbb{R}, f(x) = x^2 e^{-x^3}$,
6. $I =]0, +\infty[, f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$
7. $I =]-1, +\infty[, f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 26 *Intégrations par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que u' et v' sont aussi des fonctions continues sur $[a\,;b]$.

1. Rappeler la formule de la dérivée du produit uv.
2. En déduire que
$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$
3. En déduire que
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$
4. **Application :** Soient u et v définies par $u(t) = e^t$ et $v(t) = t$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^x e^t t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt.$$
5. En déduire la primitive de la fonction $x \mapsto xe^x$ qui s'annule en 0.
6. Déterminer toutes les primitives de la fonction $x \mapsto xe^x$.

Exercice 27 *Exponentielle : une inégalité de convexité*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = e^x - x - 1$$

1. Démontrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions de f' et f''.
2. Étudier les variations de f' et en déduire son signe. *On pourra remarquer que* $f'(0) = 0$.
3. En déduire que quelque soit $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

4. Retrouver ce résultat grâce à la convexité de l'exponentielle.

Exercice 28 *Fraction rationnelle*

On considère une fonction R d'expression $R(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de R et démontrer que R est intégrable sur $\mathcal{D}$.
2. Démontrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que, quelque soit $x \in \mathcal{D}$:

$$R(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

3. En déduire les primitives de R sur $]2\,; +\infty[$.

Exercice 29 *Suites arithmético-géométriques*

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$. On considère une suite (u_n), dite arithmético-géométrique, vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

1. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$ admet un unique point fixe ℓ à déterminer.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$. Démontrer que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique de raison a.
3. En déduire l'expression générale de (v_n) puis celle de (u_n).
4. Étudier la convergence et la monotonie de (u_n) en fonction des valeurs de a, ℓ et u_0.