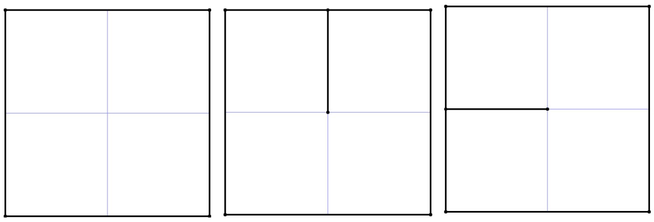
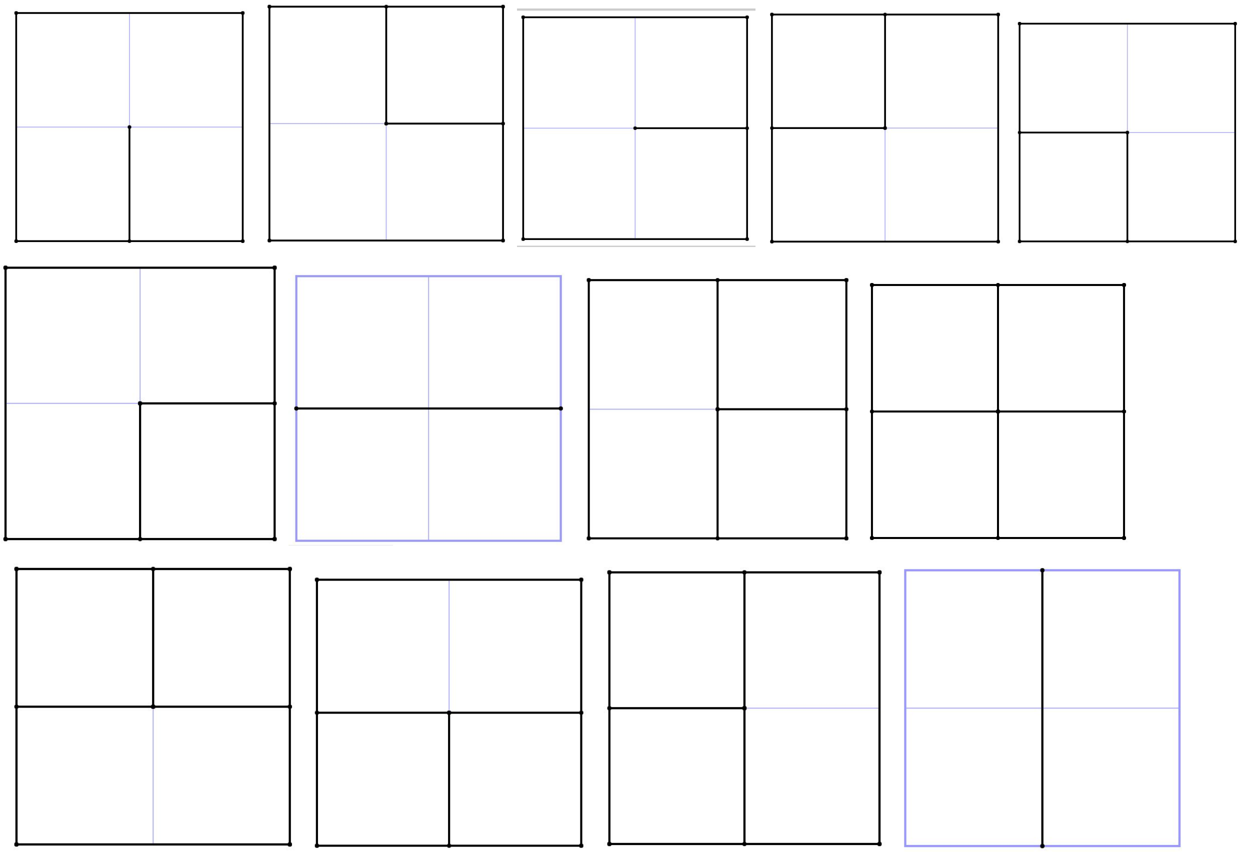
Pierre GARCIA
Victor LEMAIRE
Thomas LEBRET

Projet : Labyrinthe

1. Pseudos-labyrinthes de taille 2x2 :





2. On remarque que le nombre de murs sur une colonne est le nombre de lignes (n) et que le nombre de murs sur une ligne est le nombre de colonne (m).

Et l'on remarque qu'il y a $m-1$ lignes et qu'il y a $n-1$ colonnes. On a donc le nombre maximal de mur dans un labyrinthe de taille $n * m$ est :

$(m-1).n + (n-1).m = 2.m.n - m - n$

3. Si $m = 1$ on remplace m dans l'équation ce qui nous donnes : $n-1$ murs.

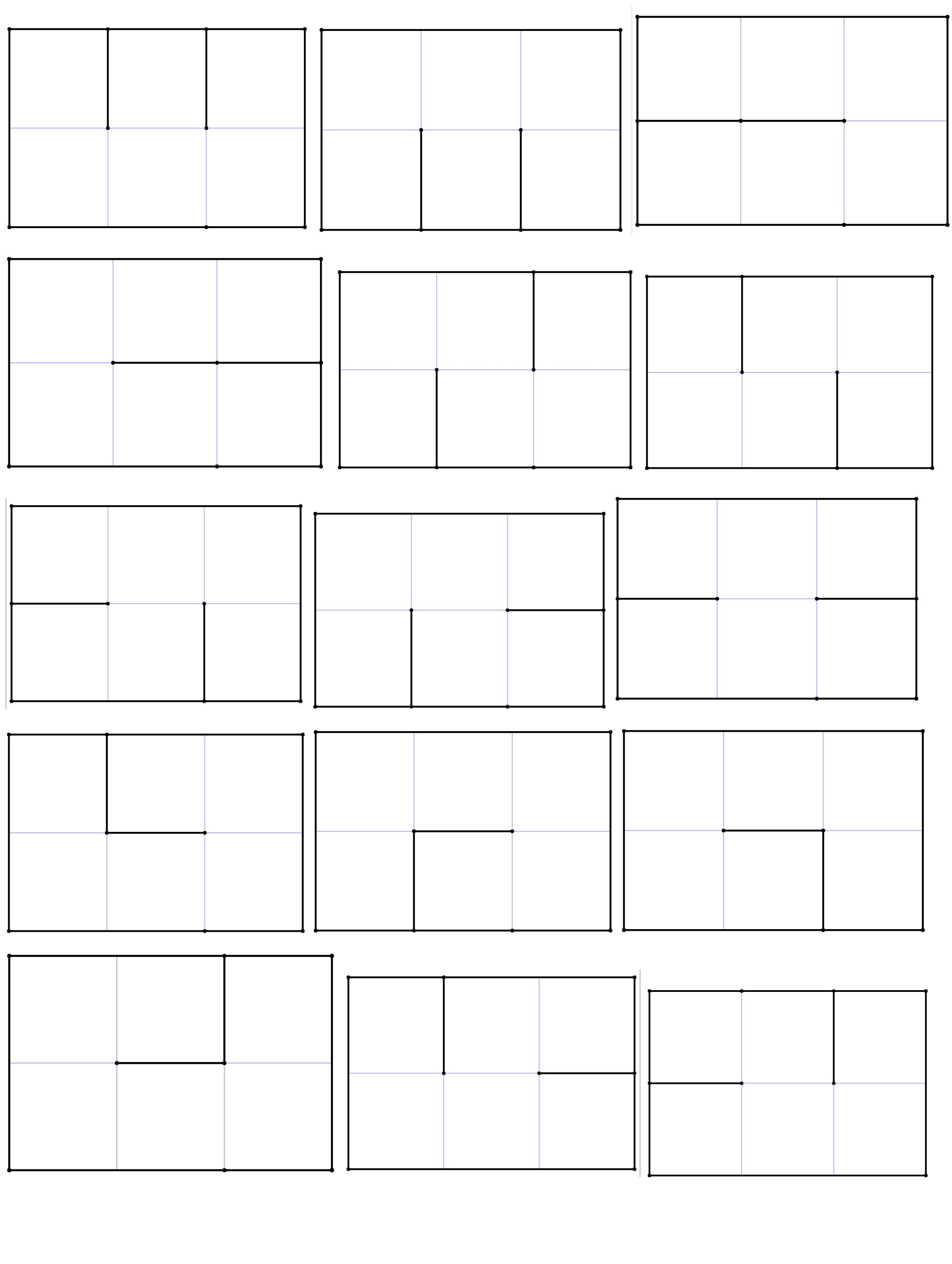
Chaque emplacement de mur a deux états possibles, deux valeurs possibles. On a donc une liste n d'information en binaire on a donc 2^n pseudo-labyrinthes possibles.

Il y a $n-1$ murs dans peut en déduire la formule 2^{n-1} pour le nombre de pseudo labyrinthe de taille $n * m$ avec $m = 1$.

4. Le nombre de murs pour un labyrinthe $m.n$ est égal à $(m-1).n + (n-1).m = 2.m.n - m - n$ comme démontré précédemment.

Pour les memes raisons, on a donc $etatsPossibles^{nombre\ de\ murs} = 2^{(m-1)n + (n-1)m}$.

5.Voici les labyrinthes



6. Il y a 2 murs sur chacun des labyrinthes.

7. Pour l'existence d'un chemin, il s'agit de la propriété (1) du polycopié.
Pour l'unique existence d'un chemin:
Supposons que deux chemins α,β mènent à une même case de coordonnées B depuis une case A, on peut alors rajouter un mur pour bloquer l'un des deux chemins. Quitte à échanger les rôles, bloquons le chemin β.
-Si le chemin β est bloqué, on peut accéder à la case B par le chemin α, or si le chemin β peut être bloqué sans perdre la connexité du labyrinthe, le pseudo-labyrinthe ne vérifie pas la condition (2) pour la case A.
-On cherche à vérifier que le mur utilisé pour bloquer le chemin vers A n'a pas vérifié la condition 2 en bloquant l'accès à d'autres cases. Pour le démontrer, toutes les anciennes cases du chemin β doivent être accessibles, on le démontre par dichotomie:
On peut diviser les cases sur le chemin β en deux, celles avant le mur et celles après le mur:
-pour les cases accessibles avant le mur, on peut les atteindre directement depuis le point A par le(s) même(s) chemin(s).
-pour les cases accessibles après le mur, on peut les atteindre depuis le point B en passant par le chemin α d'abord puis par le chemin β dans l'autre sens.

8. On commence pour des raisons de commodité par calculer le nombre de murs d'un bon labyrinthe. Le nombre total d'emplacement de murs possible est égal à $2.m.n - m - n$, le nombre total d'emplacements vide est donné et est égal à $m.n - 1$.
Donc le nombre de murs d'un 'bon' labyrinthe est $mn - m - n + 1$.

On passe maintenant aux conjectures sur les conditions pour qu'un pseudo-labyrinthe soit un labyrinthe. On en a trouvé deux:

1) On définit un arbre comme une connexion de murs relié à l'enceinte par un mur. Depuis chaque murs de l'arbre le chemin vers l'enceinte doit être unique.

On a donc comme conditions nécessaires et suffisantes:

Un labyrinthe de taille $n * m$ doit contenir $mn - m - n + 1$ murs tous faisant partis d'arbres.

2)Un labyrinthe de taille $n * m$ doit contenir $mn - m - n + 1$ murs et ne doit pas contenir de boucle de murs. (Ce qui revient très facilement à de la connexité).