

La représentation des entiers relatifs

1. Première idée.

Pour représenter les entiers relatifs en base 2, on s'appuie sur celle des entiers naturels vue précédemment. Une première intuition est de rajouter un bit pour le signe et d'utiliser les autres pour représenter sa valeur absolue.

Remarques : La valeur absolue d'un nombre est :

- Ce nombre s'il est positif
- Son opposé s'il est négatif
- Par exemple, la valeur absolue de -4 est 4, la valeur absolue de 4 est 4.

Exercice

Avec des mots de 4 bits, on réserve le bit de poids fort (le plus à gauche) pour le signe. Il en reste donc 3 pour la valeur absolue. Compléter la liste ci-dessous :

0000 :

0001 : 1

0010 :

0011 :

0100 :

0101 :

0110 :

0111 :

1000 :

1001 : -1

1010 :

1011 :

1100 :

1101 :

1110 :

1111 :

Inconvénient

Il y a 2 représentations du nombre 0, ce qui pose des problèmes dans les calculs et d'utilisation de mémoire. Ce n'est donc pas la représentation qui est usuellement utilisée.

2. Le complément à 2 (C2).

Principes sur 4 bits

Entier naturel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Etat	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110
Entier relatif	0	1	2	3	4	5	6	7	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2

Exercice :

A partir de l'observation de ce tableau, compléter les remarques ci-dessous (double-cliquez sur les " __ ") :

Remarques :

- Le bit de poids fort(premier à gauche) est le signe : __ pour un nombre positif et __ pour un nombre négatif.
- On représente les entiers relatifs...avec des entiers naturels ! Avec __ bits, on obtient __ états pour représenter les entiers de ____ à ____ .
- 0000 : C'est le nombre ____
- ____ : C'est le nombre -1
- 1000 : C'est le nombre ____
- La représentation de -6 en C2 est la même que celle de l'entier positif ____
- La représentation de -8 en C2 est la même que celle de l'entier positif ____
- La représentation de 6 en C2 est la même que celle de ____ .

Sur 8 bits

Les principes restent les mêmes mais on peut représenter plus de valeurs. 8 bits, c'est $2^8 = 256$ états possibles avec lesquels on représente :

- Les entiers relatifs positifs de 0 à 127
- Les entiers relatifs négatifs de -128 à -1
- Les entiers relatif positifs sont représentés comme les entiers naturels.
- Un entier relatif x strictement négatif est représenté par l'entier naturel $x + 2^8$

Exercice

Complétez les phrases ci-dessous :

La représentation de 0 est ___

La représentation de -1 est ___

La représentation de 127 est ___

La représentation de -128 est ___

La représentation de l'entier relatif -42 est la même que celle de l'entier naturel ___

La représentation de l'entier relatif 42 est la même que celle de l'entier naturel ___

Synthèse

En utilisant cette représentation dite du complément à deux (two's complement) sur n bits, on dispose de 2^n états possibles, avec lesquels on représente :

- Les entiers positifs de 0 à $2^{n-1} - 1$
- Les entiers négatifs de -2^{n-1} à -1
- Les entiers relatifs positifs sont représentés comme les entiers naturels.
- Un entier relatif x strictement négatif est représenté par l'entier naturel $x + 2^n$

Remarques :

- La notation dépend du nombre de bits que l'on utilise
- Il n'y a qu'un seul zéro
- Cette représentation permet les opérations usuelles (multiplication, addition)
- La même suite de bits peut représenter un entier naturel ou un entier relatif. Le système doit donc savoir s'il travaille avec des entiers non signés ou des entiers signés.

Exercices :

1. Quelle est la représentation de l'entier -42 sur 8 bits ?
2. Quels entiers relatifs peut-on représenter avec 16 bits ?
3. Quels entiers relatifs peut-on représenter avec 32 bits ?

Réponses :

- 1.
- 2.
- 3.

3. Méthodes de conversion

Trouver la représentation binaire sur n bits d'un entier relatif.

On a vu que :

- Si l'entier relatif x est positif ou nul, on le représente comme l'entier naturel x .
- S'il est strictement négatif, on le représente comme l'entier naturel $x + 2^n$.

Exercice :

Trouver la représentation binaire sur 8 bits des entiers relatifs 127 et -127

Réponses :

-
-

Trouver l'entier relatif donné en écriture binaire sur n bits

On commence par trouver l'entier naturel N qui correspond à l'écriture binaire donnée:

- Si l'écriture commence par 0 , la réponse est N
- Si l'écriture commence par 1 , la réponse est $N - 2^n$

Exercice :

Trouver les entiers relatifs représentés sur 8 bits par :

- 01010101
- 10101010

Réponses :

-
-

Une autre méthode

Pour représenter par exemple -12 sur 8 bits :

- On détermine la représentation de 12 en binaire sur 8 bits : 00001100
- On inverse les bits (ce qui donne la représentation de $255 - 12 = 243$ et qui correspond à l'entier relatif $243 - 256 = -13$: 11110011
- On ajoute donc 1, c'est à dire 1 : 11110100

Exercice :

Avec cette méthode,déterminer la représentation sur 8 bits de l'entier -4

Réponse :

-
-
-

4. Exercices

On pourra vérifier avec la fonction `bin()` certains des résultats des exercices. Attention, il faut tenir compte du nombre de bits avec lequel on travaille.

```
In [6]: print(bin(42)) # renvoie la représentation binaire de l'entier naturel 42, mais sur 6 bits
        print(bin(-42+2**8)) # renvoie la représentation binaire de l'entier relatif -42 sur 8 bits
```

```
0b101010
0b11010110
```

Ex 1 :

Par la méthode de votre choix, calculer la représentation binaire sur 8 bits de l'entier relatif 16, puis de son opposé.

Réponses :

-
-

Ex 2 :

1. Quels sont les entiers relatifs que l'on peut représenter avec 3 bits ?
2. Ecrire la représentation binaire de chacun de ces nombres.

Réponses :

- 1.
2.
 - 0 :
 - 1 :
 - 2 :
 - 3 :
 - -4 :
 - -3 :
 - -2 :
 - -1 :

Ex 3 :

1. Quelle est la représentation de l'entier 3 sur :
 - 3 bits ?
 - 4 bits ?
 - 8 bits ?
 - 16 bits ?
2. Quelle est la représentation de l'entier -3 sur :
 - 3 bits ?
 - 4 bits ?
 - 8 bits ?
 - 16 bits ?
3. Que remarque-t-on ?

Réponses :

1.
 - sur 3 bits :
 - sur 4 bits :
 - sur 8 bits :
 - sur 16 bits :
1.
 - sur 3 bits :
 - sur 4 bits :
 - sur 8 bits :
 - sur 16 bits :

3.

Ex 4 :

Dans chaque cas, quel entier relatif est représenté, et sur combien de bits ?

- 10
- 1000
- 10000000
- 1000000000000000

Réponses :

- 10 :
- 1000 :
- 10000000 :
- 1000000000000000 :

Ex5 :



1. Quel entier naturel est représenté par cette suite ?
2. Quel entier relatif est représenté par cette suite ?

Réponses :

- 1.
- 2.

Ex6 :

Pré-requis programmation : fonction et chaînes de caractères.

Avec python : A l'aide de la fonction `bin()` , compléter la fonction `C2(N,n)` qui prend en paramètres un entier relatif N et qui renvoie la représentation binaire de cet entier sur n bits sous forme de chaîne de caractères Exemples :

- `C2(-3,8)` devra renvoyer `'11111101'`
- `C2(3,8)` devra renvoyer `'00000011'`
- `C2(3,4)` devra renvoyer `'0011'`
- `C2(-3,4)` devra renvoyer `'1101'`

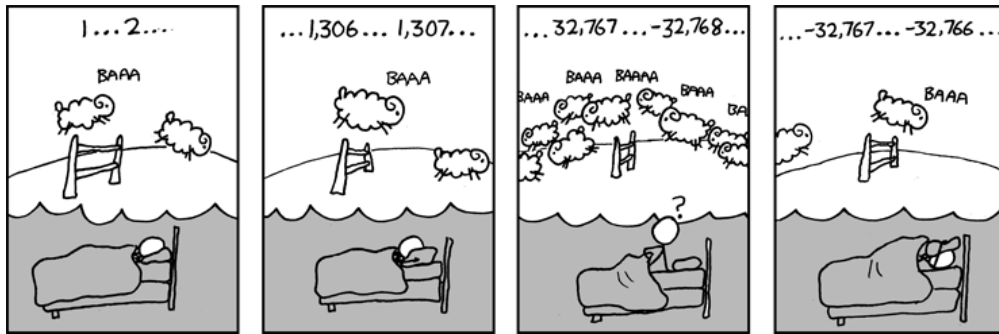
```
In [5]: def C2(N,n):
        binaire = ''
        if N >= 0 :
            print("à faire")

        else :
            print("à faire")

        return binaire

        #print(C2(-3,8))
        #print(C2(3,8))
        #print(C2(3,4))
        #print(C2(-3,4))
```

FIN



(<https://xkcd.com/571/>)