ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

Αναφορά 2ης Εργαστηριακής Άσκησης

Authors
Θωμάς Λάγκαλης, 2021030079
Γιώργος Μπίτσης, 2021030043
Μάρκος Παπαδάκης, 2021030212

ΤΗΛ 301 Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πολυτεχνείο Κρήτης

Οκτώβριος 2023

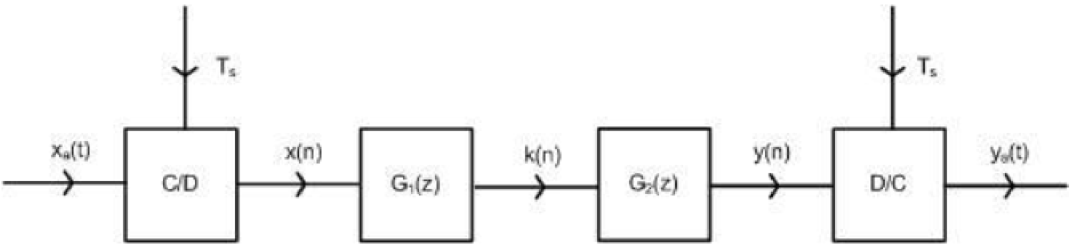
Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Το παραδοτέο συμπιεσμένο αρχείο περιέχει δύο αρχεία matlab για τη κάθε άσκηση. Σε αυτή την εργασία αναπτύχθηκαν τόσο θεωρητικές όσο και πρακτικές γνώσεις πάνω στον μετασχηματισμό Z.

2 1η Άσκηση

Στην πρώτη άσκηση μελετήθηκε ο το σύστημα του σχήματος 2. Συγκεκριμένα, βρέθηκε η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, μελετήθηκε η ευστάθειά του και η απόκριση συχνότητας. Επίσης, μελετήθηκε η επίδραση των πόλων και των μηδενικών στην απόκριση συχνότητας του συστήματος.



Σχήμα 1: Σύστημα άσκησης 1

2.1 Υποερώτημα - α

Αρχικά, έχουμε την εξίσωση διαφορών:

$$k(n) = 0.9k(n-1) + 0.2x(n) \Rightarrow K(z) = 0.9K(z)z^{-1} + 0.2X(z) \Rightarrow K(z)(1 - \frac{0.9}{z}) = 0.2X(z)z$$
$$\iff k(z) = \frac{0.2X(z)z}{z-0.9}$$

Επομένως αφού υπολογίσαμε το μετασχηματισμό Z του K συναρτήσει του X, έπειτα υπολογίζουμε το $G_(z)$

$$G_1(z) = \frac{K(z)}{X(z)} = \frac{0.2X(z)z}{(z-0.9)X(z)} = \frac{0.2z}{z-0.9} \tag{1}$$

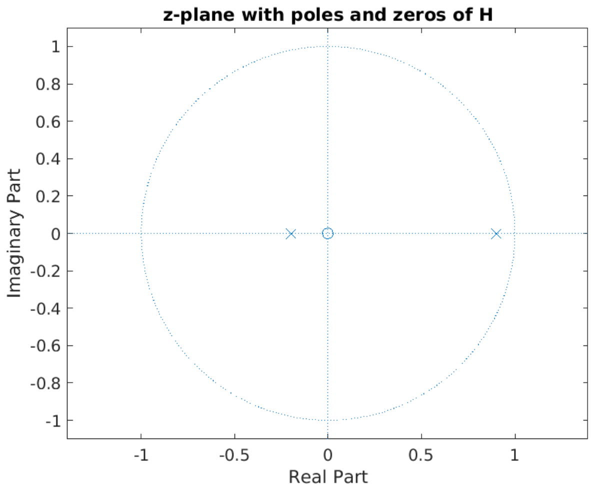
Καταλήγουμε στην συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$G_1(z)G_2(z) = \frac{0.2z}{z-0.9}\frac{1}{z+0.2} = \frac{0.2z}{(z-0.9)(z+0.2)} = \frac{0.2z}{z^2-0.7z-0.18} \tag{2}$$

2.2 Υποερώτημα -β

Στο κώδικα της matlab ορίζονται τα διανύσματα που περιέχουν τους συντελεστές των πολυωνύμων του αριθμητή και παρανομαστή (num και den) αντίστοιχα. Ακόμη ορίζεται και η περίοδος δειγματοληψίας του σήματος. Υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς με τη χρήση της μεθόδου tf η οποία αξιοποιεί τις προαναφερθείσες μεταβλητές. Τα μηδενικά και οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς αποθηκεύονται με σκοπό να τα προβάλουμε στο z επίπεδο με τη χρήση της συνάρτησης zplane.

2.3 Υποερώτημα - γ



Σχήμα 2: Ζητούμενο επίπεδο z

Ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο Z περιλαμβάνεται στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Δηλαδή υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης μεταφοράς. Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό αυτό σημαίνει ότι η κρουστική απόκριση του είναι δεξιόπλευρη επομένως η περιοχή σύγκλισης του εξαρτάται από τον πιο απομακρυσμένο πόλο της συνάρτησης μεταφοράς που η απόσταση του είναι ίση με 0.9. Δηλαδή περιοχή σύγκλισης έχουμε την |z|>0.9.

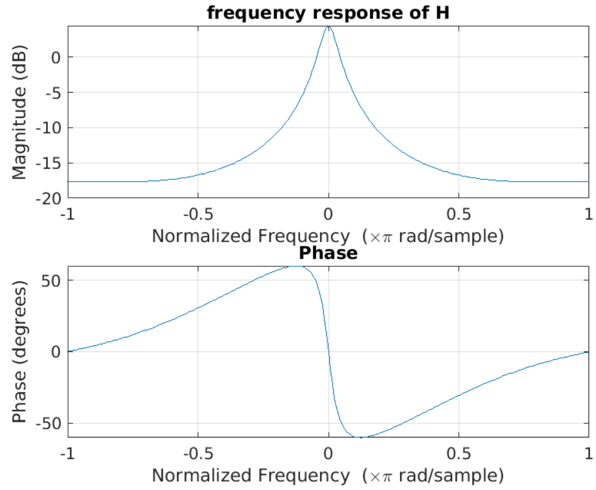
2.4 Υποερώτημα - δ

Παρακάτω φαίνεται η απόκριση συχνότητας του συστήματος η οποία έγινε με την εντολή **freqz**.

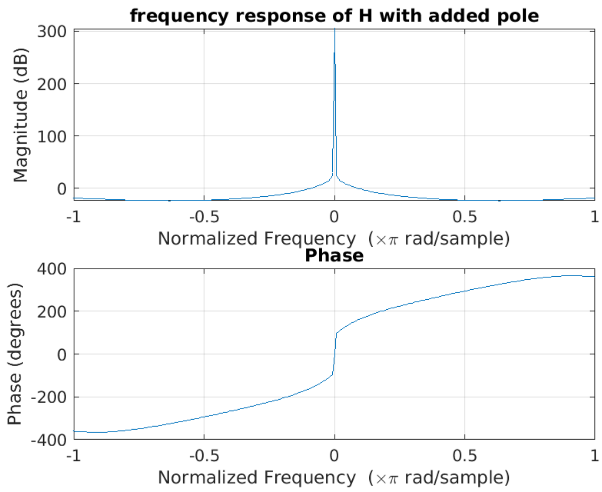
Αν δεν δοθεί το το διάστημα απεικόνισης ως 3ο όρισμα στη συνάρτηση freqz τότε θα γίνει plot η απόκριση συχνότητας μόνο στο διάστημα από 0 έως 1 (με κανονικοποίηση $\times\pi$ rad/δείγμα)

2.5 Υποερώτημα - ε

Έπειτα, για το 5ο υποερώτημα προστέθηκε ένας επιπλέον πόλος z=1 στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Τα αποτελέσματα της απόκρισης συχνότητας φαίνονται στο σχήμα 4. Στον κώδικα του ερωτήματος η προβολή σχήματος έγινε με χρήση της συνάρτησης freqz στην οποία προστέθηκε σαν επιπλέον όρισμα το διάνυσμα W. Το διάνυσμα W ορίζει τα σημεία στον άξονα της συχνότητας για τα οποία λαμβάνουμε τη συχνοτική απόκριση.



Σχήμα 3: Απόκριση συχνότητας συστήματος



Σχήμα 4: Απόκριση συχνότητας συστήματος με την προσθήκη του μοναδιαίου πόλου

Γενικά, όταν ένας πόλος ή ένα μηδενικό είναι απομακρυσμένος από τον μοναδιαίο κύκλο, τότε η απόκριση συχνότητας τείνει να γίνεται πιο επίπεδη (πιο ομαλή). Ενώ όσο πλησιάζουν τον μοναδιαίο κύκλο οι αλλαγές γίνονται πιο απότομες.

3 2η Άσκηση

Για να γίνει ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z πρέπει η συνάρτηση μεταφοράς να έρθει στη μορφή απλών κλασμάτων δηλαδή:

$$X(z) = \sum_{i}^{m} \frac{k_i z}{z - a_i} \qquad \text{\textit{Όπου m ο αριθμός των πόλων.}}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z για δεξιόπλευρους όρους είναι:

$$\frac{k_i z}{z - a_1} \rightarrow k_i a_i^n u(n)$$

Οπότε,

$$H(z) = \frac{4 - 3.5z^{-1}}{1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{4z^2 - 3.5z}{z^2 - 2.5z + 1}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή (πόλοι) είναι z = 2 και z = 1/2. Οπότε παραγοντοποιόντας τον παρονομαστή και εξισώνοντας με την μορφή απλών κλασμάτων προκύπτει:

$$H(z) = \frac{4z^2 - 3.5z}{(z-2)(z-1/2)} = \frac{Az}{z-2} + \frac{Bz}{z-1/2} = \frac{(A+B)z^2 + (-\frac{1}{2}A - 2B)z}{(z-2)(z-1/2)}$$

Εξισώνοντας τα πολυώνυμα υπολογίζουμε το σύστημα που προκύπτει:

$$A + B = 4$$
$$-\frac{1}{2}A - 2B = -3.5$$

Η λύση του συστήματος είναι A = 3 και B = 1. Οπότε η μορφή της H(z) με μορφή απλών κλασμάτων είναι:

$$H(z) = \frac{3z}{z-2} + \frac{z}{z-1/2}$$

βλέπουμε πως και οι δύο πόλοι είναι αριστερά του ROC οπότε και οι δύο όροι είναι δεξιόπλευροι. Άρα, ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι:

$$\boxed{H(z) \longrightarrow H(n) = 3 \times 2^n u(n) + 2^{-n} u(n)}$$

Όπως γίνεται αντιλυπτό στη το output της MatLab είναι το ίδιο με την απουσία των u(n) όρων. Αυτό συμβαίνει διότι, σε Matlab δε μπορούμε αμέσως να μεταφέρουμε τη φυσική σημασία του u[n] με το πεδίο ορισμού του.