Die Physik des Poi-Spiels

Bärbel Hanle

10. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Paper ist im Rahmen eines Softwaretechnikpraktikums entstanden in dem es unter anderem darum geht, die Bahn, die ein Poikopf beschreibt zu simulieren. Ein Poi ist ein Kleingerät, bestehend aus einem Gewicht (Poikopf), der an einer Schnur hängend in Rotation versetzt wird, um durch seine Flugbahn Figuren zu beschreiben. Ziel der Arbeit ist die Angabe eines Algorithmus, der die Poibahn berechnet. Grundlage dieser Berechnung ist die Newtonsche Bewegungsgleichung. Um diese Gleichung effizient zu lösen, wenden wir das Eulerverfahren auf die Newtonsche Differenzialgleichung an. Im Abschnitt 3 untersuchen wir, welche Kräfte in unserem System von Bedeutung sind und unter welchen Umständen wir sie vernachlässigen können.

2 Newtonsche Mechanik für Punktteilchen

2.1 Punktteilchen

Ein Punktteilchen ist die Abstraktion eines physikalischen Körpers unter Vernachlässigung seiner räumlichen Ausdehnung. Physikalische Objekte nehmen einen 3-dimensionalen Raumbereich ein. Will man ihre Bewegungen berechnen, müsste man die Bewegung aller Teile des Objekts berechnen und dabei komplizierte Effekte berücksichtigen wie zum Beispiel Deformationen aufgrund der wirkenden Kräfte. Für viele praktische Anwendungen ist es aber ausreichend zu wissen, wie sich der Schwerpunkt des Körpers bewegt. In diesen Situationen ist die Betrachtung des Körpers als Punktteilchen gerechtfertigt, also einen Punkt, der eine Masse hat aber kein Volumen.

Will man beispielsweise die Abflachung der Erde aufgrund der Fliehkräfte am Äquator berechnen ist es nicht sinnvoll, die Erde als Punktteilchen anzunehmen. Bei der Berechnung Bahn der Erde um die Sonne ist diese Annahme jedoch in aller Regel gerechtfertigt.

2.2 Die Newtonsche Bewegungsgleichung

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ eines Punktteilchens entspricht der zeitlichen Änderung seiner Position $\vec{x}$.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{x}(t+dt) - \vec{x}(t)}{dt}$$

Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Änderung der Bewegung (Geschwindigkeit) eines Körpers proportional zu der Kraft, die diese Veränderung hervorruft.

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m * \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt}$$

2.3 Eulerverfahren

Wenn man zu einem Zeitpunkt t den Ort $\vec{x}(t)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines Punktteilchens mit Masse m kennt und außerdem weiß, welche Kraft $\vec{F}(t)$ zu diesem Zeitpunkt auf das Teilchen wirkt, kann man den Ort $\vec{x}(t+\Delta t)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}(t+\Delta t)$ nach der Zeit Δt approximieren durch

$$\vec{x}(t+\Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}(t) * \Delta t \tag{1}$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \frac{\vec{F}(t)}{m} * \Delta t \tag{2}$$

Diese Annäherung wird um so präziser, je kleiner man die Zeit Δt zwischen zwei Simulationsschritten wählt.

3 Kräfte beim Poispiel

3.1 Ausgangssituation

Gegeben eine parametrisierte Kurve $t \mapsto \vec{x}_h(t)$, die die Bewegung der Hand eines Poispielers darstellt,so wie den Anfangsbedingungen $\vec{x}(t_0)$ (Position des Poikopfes zum Zeitpunkt t_0) und $\vec{v}(t_0)$ (Geschwindigkeit des Poikopfes zu diesem Zeitpunkt) wollen wir berechnen auf welcher Bahn sich der Poikopf bewegen wird. Dazu müssen wir die Kräfte untersuchen, die auf den Kopf wirken. Als Vereinfachung nehmen wir die Schnur als masselos und den Poikopf als Punktteilchen an.

3.2 Seilkraft

Beim Poispiel kommt es durch Fliehkräfte in der Regel dazu, dass der Poikopf am Seil zieht und es somit dehnt.

Sei l_0 die Länge des Seils im spannungslosen Zustand, $l := |\vec{x}_h - \vec{x}|$ der Abstand des Poikopfes von der Hand. Ist $l > l_0$, so muss das Seil gedehnt werden und l entspricht der Länge des gedehnten Seiles. In diesem Fall will das Seil den Poikopf in Richtung Hand zurückziehen. Ist andererseits $l < l_0$, der Poikopf also näher an der Hand als die Länge des Seils im spannungslosen Zustand, so wirkt keine Kraft vom Seil auf den Poikopf.

Die Kraft, die der Poikopf durch das Seil erfährt lässt sich durch folgende Formel berechnen

$$\vec{F}_{Seil} = \begin{cases} a\frac{l-l_0}{l} * (\vec{x}_h - \vec{x}) & \text{falls } l > l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

dabei ist a ein vom Seil abhängiger Proportionalitätsfaktor (Seildehnungsfaktor).

Die Seilkraft ist die Kraft, die den Poikopf auf seiner Bahn hält und kann somit in keinem Fall vernachlässigt werden.

3.3 Schwerkraft

Die Schwerkraft $\vec{F}_g$, der ein Körper auf der Erdoberfläche unterliegt setzt sich zusammen aus der Gravitationskraft, die ihn auf der Erdoberfläche hält und der Fliehkraft, die ihn leichter macht. Sie lässt sich durch folgende Formel berechnen

$$\vec{F}_g = mg * \vec{e}_\downarrow \tag{4}$$

wobei m die Masse des Poikopfes ist und $\vec{e}_\downarrow$ ein Einheitsvektor, der nach unten zeigt. g ist die Fallbeschleuningung die vom Ort abhängt. Der mittlere Wert für die Erdoberfläche beträgt ca. $9,81 m/s^2$.

die Schwerkraft ist zwar in allen realistischen Situationen vorhanden in denen Poi gespielt wird, nicht jedoch im gleichen Maße relevant. Wenn wir beispielsweise in einer waagrechten Ebene spielen, wirkt die Schwerkraft in eine Richtung, die wir nicht beachten. Insgesamt wird ihr Einfluss um so kleiner, je höher die Geschwindigkeit ist mit der sich der Poikopf bewegt.

3.4 Luftwiderstand

Bewegt sich ein Körper durch ein Medium z.B. durch Luft, wird er durch die Moleküle, die er dabei verdrängen muss ständig abgebremst. Die Kraft, die dabei wirkt heißt Luftwiderstand und ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit dem sich der Körper bewegt. Sie lässt sich durch folgende Gleichung berechnen

$$\vec{F}_{Luft} = bv * \vec{v} \tag{5}$$

Dabei ist b ein vom Poikopf abhängiger Faktor (Luftwiderstandsfaktor) und v der Betrag der Geschwindigkeit mit der sich der Poikopf bewegt.

Die Abbremsung des Poikopfes durch den Luftwiderstand muss beim Spielen ständig durch Bewegungen aus dem Handgelenk ausgeglichen werden, die dem Poikopf neuen Schwung verleihen.Will man diese ausgleichenden Bewegungen nicht mitmodellieren ist es gerechtfertigt den Luftwiderstand zu vernachlässigen.

4 Algorithmus zur Berechnung der Poibahn

4.1 Koordinatensystem

Wir betrachten die Bewegung des Poikörpers in einer senkrechten Ebene. Dabei benutzen wir für das Koordinatensystem die für **Bildschirmkoordinaten** üblichen Konventionen. Das heißt, die positive x-Achse zeigt nach rechts, die positive y-Achse zeigt - im Gegensatz zu den üblichen Konventioen in der Mathematik - nach **unten**.

4.2 Kraftkomponenten

Seilkraft
x-Komponente:

$$F_x^{Seil} = \begin{cases} a\frac{l-l_0}{l} * (x_h - x) & \text{falls } l > l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

y-Komponente:

$$F_y^{Seil} = \begin{cases} a\frac{l-l_0}{l} * (y_h - y) & \text{falls } l > l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Schwerkraft
Da die Schwerkraft nach unten zeigt, hat sie nur eine Komponente in positive y-Richtung.
x-Komponente: $F_x^g = 0$
y-Komponente: $F_y^g = mg$

Luftwiderstand
x-Komponente: $F_x^{Luft} = bv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
y-Komponente: $F_x^{Luft} = bv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

4.3 Pseudocode

Eingabe:

`xh`	Array der x-Positionen der Hand
`yh`	Array der y-Positionen der Hand
`x0`	x-Komponente der Startposition des Poikopfes
`y0`	y-Komponente der Startposition des Poikopfes
`vx0`	x-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit des Poikopfes
`vy0`	y-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit des Poikopfes
`m`	Masse des Poikopfes
`g`	Fallbeschleunigung (default: $9.81m/s^2$)
`a`	Seildehungsfaktor
`b`	Luftwiderstandsfaktor (default: 0)
`dt`	Abstand der Zeitschritte

Code:

```
x = x0 ; y = y0 ;
vx = vx0m ; vy = vy0 ;
for( i = 0 ; i < xh.length ; i++){
   l = sqrt((xh[i]-x)^2+(yh[i]-y)^2) ;                      // Länge des Seils
   Fx = b*vx*sqrt(vx^2+vy^2) ;                              // x-Komponente der Kraft ohne Seilkraft
   if( l>l0){
      Fx = Fx + a*(l-l0)*(xh[i]-x)/l ;                      // x-Komponente der Kraft mit Seilkraft
   }
   Fy = a*(l-l0)*(yh[i]-y)/l+b*vy*sqrt(vx^2+vy^2)+mg ;      // y-Komponente der Kraft
   x = x+vx*dt ; y = y+vy*dt ;                              // neue x- und y-Koordinaten
   vx = vx+Fx*dt/m; vy = vy+Fy*dt/m ;                       // neue Geschwindigkeitskomponenten
   DO WHAT NEEDS TO BE DONE WITH (x,y) ;                    // z.B. (x,y) als Bildschirmpixel ausgeben
}
```

A Formelzeichen und Konstanten

Zeichen	Beschreibung
m	Masse der Poikopfes
t	Zeitparameter
Δt	zeitlicher Abstand zwischen zwei Simulationsschritten
l_0	Länge des Seils im spannungslosen Zustand
l	Länge des Seils unter Krafteinwirkung
Δl	Seillängenänderung ($\Delta l = l - l_0$)
$\vec{x}_h$	Position der Hand
x_h	x-Position der Hand
y_h	y-Position der Hand
$\vec{x}$	Position des Poikopfes
x	x-Position des Poikopfes
y	y-Position des Poikopfes
$\vec{v}$	Geschwindigkeit des Poikopfes
v_x	x-Komponente der Geschwindigkeit des Poikopfes
v_y	y-Komponente der Geschwindigkeit des Poikopfes
$\vec{F}_g$	Gravitationskraft
F_x^g	x-Komponente der Gravitationskraft
F_y^g	y-Komponente der Gravitationskraft
$\vec{F}_{Seil}$	Kraft, die der Seildehnung entgegenwirkt
F_x^{Seil}	x-Komponente der Kraft, die der Seildehnung entgegenwirkt
F_y^{Seil}	x-Komponente der Kraft, die der Seildehnung entgegenwirkt
$\vec{F}_{Luft}$	Luftwiderstand
F_x^{Luft}	x-Komponente des Luftwiderstands
F_y^{Luft}	y-Komponente des Luftwiderstand
g	Fallbeschleunigung
a	Seildehnungsfaktor
b	Luftwiderstandsfaktor