Zur Berechnung der Handbewegung zu einer gegebenen Poibahn

Bärbel Hanle

2. März 2020

Im Rahmen eines Softwaretechnikprojekts beschäftigen wir uns damit, wie wir aus einer gegebenen Poikurve einen Vorschlag für die Handbewegung errechnen können. Dieses Paper beschreibt, wie wir diese Aufgabe mit Hilfe der Fourierreihe angehen.

1 Grundlagen

1.1 *T*-periodische Kurven in $\mathbb{C}$

Def. 1.1 (T-periodische Kurve in $\mathbb{C}$)**.** Sei $T \in \mathbb{R}$, sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. f ist eine ***T*-periodische Kurve**, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = f(t + T)$$

Anschaulich gesprochen sind T-periodische Kurven diejenigen Kurve, die nach Zeit T „wieder von vorne beginnen“. Im Rahmen unseres Projekts arbeiten wir mit stetigen Kurven in $\mathbb{C}$

Def. 1.2 (stetige Kurve in $\mathbb{C}$)**.** Eine Kurve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist **stetig**, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$$

Jede Kurve, die wir „in einem Zug“ auf dem Bildschirm zeichnen können ist stetig.

1.2 Komplexe Fourierreihe

Ziel der Fourieranalyse ist es, eine stetige T-periodische Kurve in $\mathbb{C}$ in eine Summe aus Kreisbewegungen zu zerlegen.

Def. 1.3 (Fourierkoeffizient)**.** Sei $T \in \mathbb{R}$ mit $T > 0$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige T-periodische Kurve. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$c_k := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-2\pi i \frac{kt}{T}\right) dt$$

der Fourierkoeffizient von f zum Index k

Lem. 1.4 (Fourierreihe)**.** Sei $T \in \mathbb{R}$ mit $T > 0$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige T-periodische Kurve. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ die Folge der Fourierkoeffizienten von f, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp\left(2\pi i \frac{kt}{T}\right)$$

Mit $f(t) = a(t) + ib(t)$ für reelle Funktionen $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wir die Fourierkoeffizienten folgendermaßen berechnen

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T (a(t) + ib(t))(\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right))\ dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T ((a(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)) + i(b(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - a(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)))\ dt
\end{aligned}$$

somit sind

$$\text{Re } c_k = \frac{1}{T}\int_0^T (a(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right))\ dt \tag{1}$$

$$\text{Im } c_k = \frac{1}{T}\int_0^T (b(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - a(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right))\ dt \tag{2}$$

Für große T lassen sich diese Integrale näherungsweise berechnen durch

$$\text{Re } c_k \approx \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}(a(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)) \tag{3}$$

$$\text{Im } c_k \approx \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}(b(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - a(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)) \tag{4}$$

Lem. 1.5. Falls

- $a(t)$ **gerade** und $b(t)$ **ungerade** ist, gilt $\text{Im } c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
- $a(t)$ **ungerade** und $b(t)$ **gerade** ist, gilt $\text{Re } c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

Beweis. Aufgrund der T-Periodizität von $\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$, $a(t)$ und $b(t)$ (für $k \in \mathbb{Z}$ lassen sich (1) und (2) umschreiben zu

$$\text{Re } c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (a(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right))\ dt \tag{5}$$

$$\text{Im } c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (b(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - a(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right))\ dt \tag{6}$$

Falls $a(t)$ gerade und $b(t)$ ungerade ist, so ist $b(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) - a(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$ ungerade und damit nach (6) $\text{Im } c_k = 0$. Falls dagegen $a(t)$ ungerade und $b(t)$ gerade ist, so ist $a(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + b(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$ ungerade und damit nach (5) $\text{Re } c_k = 0$. □

1.3 Hauptkreis

Def. 1.6 (Hauptfrequenz). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Kurve mit Fourierkoeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Dann ist $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ eine **Hauptfrequenz** von f, falls für alle $k' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$|c_k| \geq |c_{k'}|$$

Def. 1.7 (Hauptkreis). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Kurve, k eine Hauptfrequenz von f. Dann ist $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = c_k \exp\left(2\pi i\frac{kt}{T}\right)$ ein **Hauptkreis** von γ

1.3.1 Eine Handbewegung zu einer gegebenen Poikurve

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Kurve (intendierte Poibewegung) und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein Hauptkreis von f, dann können wir die Handbewegung $\gamma_h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ansetzen als

$$\gamma_h(t) = f(t) - \gamma(t)$$

2 Beispiele

2.1 Kreis

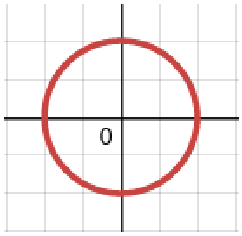

Abbildung 1: Poibewegung Kreis

Für

$$f(t) = \cos\Big(\frac{\pi}{6}t\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi}{6}t\Big) = \exp\Big(i\frac{\pi}{6}t\Big) \qquad (T = 12)$$

ist

$$c_k = \frac{1}{12}\int_0^{12} \exp\Big(i\frac{\pi}{6}t\Big) * \exp\Big(-i\frac{\pi}{6}kt\Big)dt = \frac{1}{12}\int_0^{12} \exp\Big(i\frac{\pi}{6}t(1-k)\Big)dt$$

und somit ist für $k = 1$

$$c_1 = \frac{1}{12}\int_0^{12} \exp(0)dt = \frac{1}{12}\int_0^{12} dt = \frac{1}{12}[t]_0^{12} = 1$$

für $k \neq 1$ gilt dagegen

$$c_k = \frac{1}{12}[\frac{6}{i\pi(1-k)}\exp\Big(i\frac{\pi}{6}t(1-k)\Big)]_0^{12} = \frac{i}{2\pi(k-1)}(\exp(i * 2\pi(1-k)) - 1)$$

und da $1 - k \in \mathbb{Z}$ ist, gilt $(\exp(i * 2\pi(1-k)) = 1$ und somit

$$c_k = 0$$

1 wäre also die einzige Hauptfrequenz von f und der zugehörige Hauptkreis wäre

$$\gamma(t) = c_1 \exp\Big(2\pi i\frac{t}{12}\Big) = \exp\Big(i\frac{\pi}{6}t\Big) = f(t)$$

und somit wäre die zugehörige Handbewegung

$$\gamma_h(t) = f(t) - \gamma(t) = 0$$

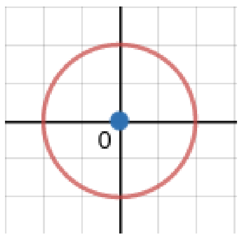

Abbildung 2: Hand- und Poibewegung Kreis

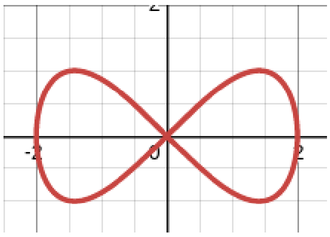

Abbildung 3: Poibewegung Unendlichkeitssymbol

2.2 Unendlichkeitssymbol

Für

$$f(t) = 2\sin\frac{\pi t}{12} + i\,\sin\frac{\pi t}{6} \qquad (T = 24)$$

ist

$$\begin{aligned}\text{Re}\; c_k &= \frac{1}{24}\int_{-12}^{12} (2\,\sin\frac{\pi t}{12}\cos(\frac{\pi t}{12}k) + \sin\frac{\pi t}{6}\sin(\frac{\pi t}{12}k))\,dt \\ &= \frac{1}{24}(\int_{-12}^{12} 2\,\sin\frac{\pi t}{12}\cos(\frac{\pi t}{12}k)\,dt + \int_{-12}^{12}\sin\frac{\pi t}{6}\sin(\frac{\pi t}{12}k)\,dt)\end{aligned}$$

Da $2\sin\frac{\pi t}{12}\cos(\frac{\pi t}{12}k)$ ungerade ist, gilt $\int_{-12}^{12} 2\,\sin\frac{\pi t}{12}\cos(\frac{\pi t}{12}k)\,dt = 0$ und damit

$$\begin{aligned}\text{Re}\; c_k &= \frac{1}{24}\int_{-12}^{12}\sin\frac{\pi t}{6}\sin(\frac{\pi t}{12}k)\,dt \\ &= \frac{1}{24}\int_{-12}^{12}\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi t}{12}(2-k) - \cos\frac{\pi t}{12}(2+k))\,dt\end{aligned}$$

somit sind $\text{Re}\; c_2 = \frac{1}{2}$ und $\text{Re}\; c_{-2} = -\frac{1}{2}$. Für alle anderen $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\text{Re}\; c_k = 0$. Für die Imaginärteile gilt

$$\begin{aligned}\text{Im}\; c_k &= \frac{1}{24}\int_{-12}^{12}(\sin\frac{\pi t}{6}\cos(\frac{\pi t}{12}k) - 2\,\sin\frac{\pi t}{12}\sin(\frac{\pi t}{12}k))\,dt \\ &= \frac{1}{24}(\cos(\frac{\pi t}{12}(k-1)) - \cos(\frac{\pi t}{12}(k+1)))\,dt\end{aligned}$$

Also $\text{Im}\; c_1 = 1$ und $\text{Im}\; c_{-1} = -1$.
Hauptfrequenzen wären also -1 und 1.
Hauptkreis zu $k = 1$ wäre dann

$$\gamma(t) = c_1 \exp\left(2\pi i\frac{t}{24}\right) = i\,\exp\left(i\frac{\pi}{12}t\right) = i\,\cos\frac{\pi t}{12} - \sin\frac{\pi t}{12}$$

und die zugehörige Handbewegung

$$\gamma_h(t) = 3\sin\frac{\pi t}{12} + i\,(\sin\frac{\pi t}{6} - \cos\frac{\pi t}{12})$$

2.3 Apfel

Für

$$f(t) = \sin\frac{\pi t}{18} + \sin\frac{\pi t}{36} + i\,(\cos\frac{\pi t}{18} + \frac{2}{3}\cos\frac{\pi t}{36}) \qquad (T = 72)$$

sind

- $a(t) = \sin\frac{\pi t}{18} + \sin\frac{\pi t}{36}$ ungerade und

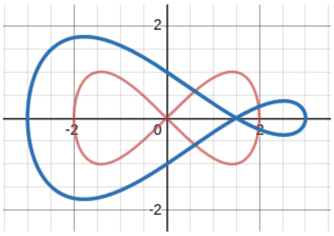

Abbildung 4: Hand- und Poibewegung Unendlichkeitssymbol

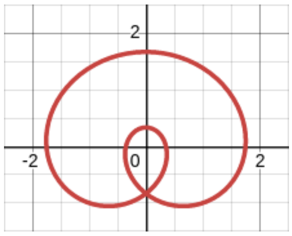

Abbildung 5: Poibewegung Apfel

- $b(t) = \cos\frac{\pi t}{18} + \frac{2}{3}\cos\frac{\pi t}{36}$ gerade

und somit ist nach Lemma 1.5 $\operatorname{Re} c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Für Im c_k gilt:

$$\begin{aligned}\text{Im } c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T (\cos\left(\frac{\pi t}{36}k\right)(\cos\frac{\pi t}{18} + \frac{2}{3}\cos\frac{\pi t}{36}) - \sin\left(\frac{\pi t}{36}k\right)(\sin\frac{\pi t}{18} + \sin\frac{\pi t}{36}))\, dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T (\cos\left(\frac{\pi t}{36}(k+2)\right) + \frac{5}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{36}\right) - \frac{1}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{36}(k-1)\right))\, dt\end{aligned}$$

Damit gelten

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} c_{-2} &= 1 \\ \operatorname{Im} c_{-1} &= \frac{5}{6} \\ \operatorname{Im} c_{1} &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Für alle anderen k ist $\operatorname{Im} c_k = 0$
Einzige Hauptfrequenz wäre also $k = -2$ der zugehörige Hauptkreis

$$\gamma(t) = c_{-2}\exp\left(2\pi i\frac{t}{72}\right) = i\,\exp\left(-i\frac{\pi t}{36}\right) = i\,\cos\frac{\pi t}{36} + \sin\frac{\pi t}{36}$$

und die zugehörige Handbewegung

$$\gamma_h(t) = \sin\frac{\pi t}{18} + i\,(\cos\frac{\pi t}{18} - \frac{1}{3}\cos\frac{\pi t}{36})$$

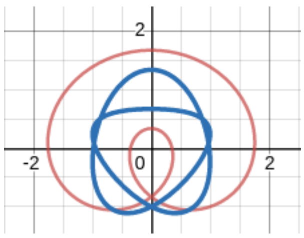

Abbildung 6: Hand- und Poibewegung Apfel