Chapitre 4

Nombres complexes et exponentielle complexe

Sommaire

4.1 Définition

Proposition et Définition 4.1 On définit sur $\mathbb{R}^2$ des opérations d'addition et de multiplication par les formules suivantes :

(a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
(b) $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Muni des opérations, $\mathbb{R}^2$ est un corps commutatif (cf. définition 1.52) dont l'élément neutre pour l'addition est $(0, 0)$ et l'élément neutre pour la multiplication est $(1, 0)$. On note ce corps $\mathbb{C}$. C'est le corps des nombres complexes. On définit également la multiplication d'un nombre réel par un nombre complexe de la façon suivante :

(c) $k.(a, b) = (ka, kb)$.

On a donc $(a, b) = a.(1.0) + b.(0, 1)$. Comme $(1, 0)$ est l'élément neutre pour la multiplication, on le note plus simplement 1, et on note $i = (0, 1)$. On écrit ainsi les nombres complexes sous la forme $a+bi$ ou $a+ib$. L'addition et la multiplication sont alors données par les formules :

(a') $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$,
(b') $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$,

et on constate que $i^2 = i \times i = -1$. Si $z = a + ib$, on appelle :

(d) partie réelle de z le nombre réel $\Re e(z) = a$;
(e) partie imaginaire de z le nombre réel $\Im m(z) = b$;
(f) conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$;
(g) module de z le nombre réel postif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On a :

(h) $z = 0$ si et seulement si $|z| = 0$,
(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,
(j) $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$,
(k) $|zz'| = |z| \times |z'|$,
(l) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$,
(m) $z\bar{z} = |z|^2$ d'où l'inverse de $z = a + ib$ est $\dfrac{1}{z} = z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\,\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

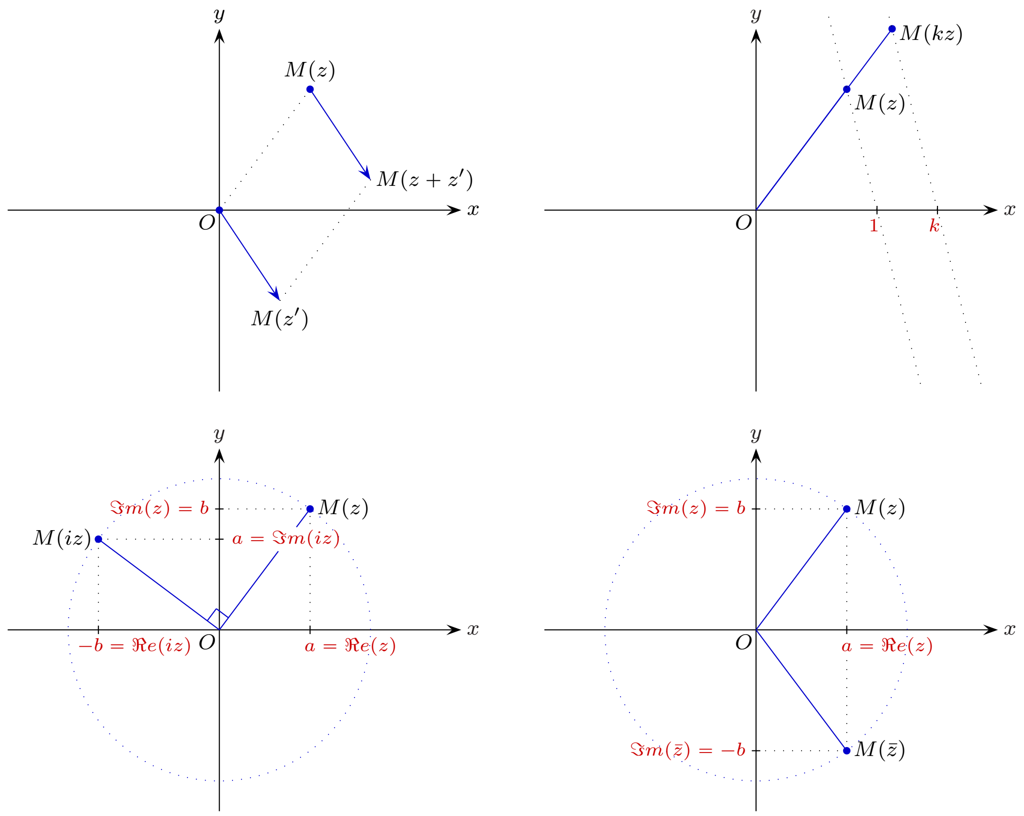
La preuve des propriétés énoncées ci-dessus est laissée au lecteur.

4.2 Argument et forme polaire d'un nombre complexe

Proposition et Définition 4.2 On identifie $\mathbb{C}$ au plan en associant au nombre complexe $z = a + ib$ le point M de coordonnées (a, b). Le nombre z est alors appelé affixe de M et on écrit $M = M(z)$.

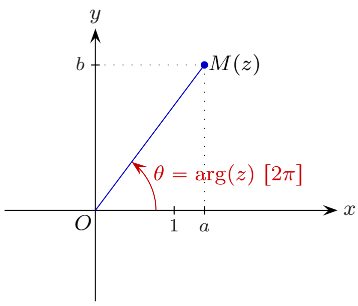
Dans cette représentation :

(a) le module de z n'est autre que la longueur $OM(z)$;
(b) l'addition de z' correspond à la translation de vecteur $\overrightarrow{0M(z')}$;
(c) la multiplication par un nombre réel k correspond à l'homothétie de centre O et de rapport k ;
(d) la multiplication par i correspond à la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$;
(e) la conjugaison correspond à la symétrie par rapport à l'axe Ox.



La preuve des propriétés énoncées ci-dessus est laissée au lecteur.

Définition 4.3 Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On appelle argument de z, et on note $\arg(z)$, l'angle θ entre l'axe Ox et le vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$. L'argument de z est défini à 2π près. On écrit $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

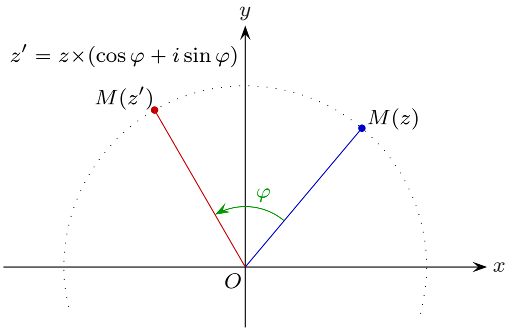


On a alors $\cos\theta = \dfrac{a}{OM(z)} = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{OM(z)} = \dfrac{b}{|z|}$, d'où $z = a+ib = |z|\left(\dfrac{a}{|z|} + i\,\dfrac{b}{|z|}\right) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cette expression s'appelle la forme polaire de z (alors que l'expression $a+ib$ s'appelle la forme cartésienne de z).

Proposition 4.4 Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. On a $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.

Preuve : On pose part de la forme polaire de z et z' : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$. On a alors : $zz' = rr'\big((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\big) = rr'\big(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\big)$. □

Remarque 4.5 On déduit de ce qui précède que la multiplication par le nombre complexe $\cos\varphi + i\sin\varphi$, de module 1 et d'argument φ, correspond, dans le plan, à la rotation de centre O et d'angle φ.



4.3 Exponentielle complexe

Définition 4.6

(a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$; on pose $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$;

(b) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; on pose $\exp(z) = e^a(\cos b + i\sin b)$, où e^a est l'exponentielle usuelle définie sur les nombres réels.

Remarque 4.7

(1) Comme pour l'exponentielle réelle, il est d'usage de noter l'exponentielle complexe également sous la forme e^z, mais attention : alors que pour $x \in \mathbb{R}$, e^x est bien égal à e puissance x, qu'on peut définir indépendamment de l'exponentielle, ce n'est pas le cas pour e^z avec $z \in \mathbb{C}$.

(2) Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ étant périodique de période 2π, la fonction e^z est périodique de période $2i\pi$, c.-à-d. : $e^{z+k2i\pi} = e^z$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(3) De la définition on déduit immédiatement que $|e^z| = e^{\Re e(z)}$ et $\arg(e^z) = \Im m(z)$.

(4) Des valeurs particulières des fonctions sinus et cosinus, on déduit les valeurs particulières suivantes de l'exponentielle complexe.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$e^{i\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	i	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$	-1

θ	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\pi$
$e^{i\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$	$-i$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$	-1

L'intérêt de cette définition réside dans la propriété suivante, analogue à celle de l'exponentielle usuelle définie sur les nombres réels.

Proposition 4.8

(a) Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Conséquence :

(b) pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $e^z \neq 0$ et l'inverse de e^z est e^{-z} ;

(c) pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a : $e^{nz} = \left(e^z\right)^n$.

Preuve :

(a) Soit $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $z' = a' + ib'$ avec $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. On a alors $e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$ et $e^{z'} = e^{a'}(\cos b' + i \sin b')$, d'où $e^z e^{z'} = e^a e^{a'}\big((\cos b \cos b' - \sin b \sin b') + i(\sin b \cos b' + \cos b \sin b')\big)$ c.-à-d. : $e^z e^{z'} = e^{a+a'}\big(\cos(b + b') + i \sin(b + b')\big) = e^{z+z'}$.

(b) D'après le point précédent, on a $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ d'où le résultat annoncé.

(c) Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $e^{nz} = e^{\overbrace{z+z+\cdots+z}^{n \text{ fois}}} = \overbrace{e^z e^z \cdots e^z}^{n \text{ fois}} = \left(e^z\right)^n$. Si $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, alors $n = -k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et alors, par définition, $\left(e^z\right)^n = \dfrac{1}{\left(e^z\right)^k}$, mais $\left(e^z\right)^k = e^{kz}$ donc $\left(e^z\right)^n = \dfrac{1}{e^{kz}} = e^{-kz} = e^{nz}$. Enfin $\left(e^z\right)^0 = 1$ par définition, mais $1 = e^0 = e^{0z}$ d'où $\left(e^z\right)^0 = e^{0z}$. □

4.4 Racines n-ième d'un nombre complexe

4.4.1 Racines n-ième de l'unité

Définition 4.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe ω tel que $\omega^n = 1$.

Remarque 4.10 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$ est une racine n-ième de l'unité. De plus, s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = k + pn$, alors :

$$e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+pn)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}+i2p\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}e^{i2p\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\left(e^{i2\pi}\right)^p = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Proposition 4.11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n nombres complexes qui sont racines n-ièmes de l'unité. Ce sont les nombres :

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant k < n$$

Preuve : Si $\omega^n = 1$, alors $\omega \neq 0$, donc $\omega = re^{i\theta}$ avec $r = |\omega| \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta = \arg(\omega) \in [0, 2\pi[$. On a alors : $r^n e^{in\theta} = 1$, d'où $r^n = 1$ et donc $r = 1$ d'une part, et $n\theta = 0 \pmod{2\pi}$ et donc $n\theta = 2k\pi$, c.-à-d. $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, d'autre part. Ainsi, toute les racines n-ième de l'unité sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. De plus $e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ si et seulement si $\dfrac{2k'\pi}{n} = \dfrac{2k\pi}{n}$ $[2\pi]$, c.-à-d. s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2k'\pi}{n} = \dfrac{2k\pi}{n} + 2p\pi$, c.-à-d. $k' = k + pn$. Mais d'après le théorème de division euclidienne, pour tout $k' \in \mathbb{Z}$, il existe un unique couple (p, k) avec $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leqslant k < n$ et $k' = k + pn$, d'où le résultat. □

4.4.2 Forme polaire des racines n-ième d'un nombre complexe quelconque

Définition 4.12 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de z tout nombre complexe ω tel que $\omega^n = z$.

Proposition 4.13 Soient $z = \rho\, e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement n nombres complexes qui sont racines n-ièmes de z. Ce sont les nombres :

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant k < n$$

Preuve : c'est une conséquence immédiate de la proposition 4.11. □

4.4.3 Forme cartésienne des racines carrées d'un nombre complexe quelconque

D'après la proposition 4.13 tout nombre complexe non nul a exactement 2 racines carrées, mais l'expression qui en est donnée est sous forme polaire. On en donne ici une expression cartésienne.

Soit $z = a + i\, b \in \mathbb{C}$ et $\omega = x + i\, y$ tel que $\omega^2 = z$; on a alors :

$$x^2 - y^2 = \Re e(\omega^2) = \Re e(z) = a \qquad 2xy = \Im m(\omega^2) = \Im m(z) = b \qquad x^2 + y^2 = |\omega|^2 = |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

On en déduit que :

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

On distingue plusieurs cas :

- Si $b = 0$ et $a > 0$ alors $y = 0$ et $x^2 = a$ d'où $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, c.-à-d. : $\omega = \sqrt{a}$ ou $\omega = -\sqrt{a}$.
- Si $b = 0$ et $a < 0$ alors $x = 0$ et $y^2 = |a|$ d'où $y = \sqrt{|a|}$ ou $y = -\sqrt{|a|}$ c.-à-d. : $\omega = i\sqrt{|a|}$ ou $\omega = -i\sqrt{|a|}$.
- Si $b > 0$ alors x et y sont de même signe car $2xy = b > 0$ d'où les deux valeurs possibles de ω :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{c.-à-d. :} \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{c.-à-d. :} \quad \omega = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

- Si $b < 0$ alors x et y sont de signes opposés car $2xy = b < 0$ d'où les deux valeurs possibles de ω :

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{c.-à-d. :} \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{c.-à-d. :} \quad \omega = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

Ces formules ne sont pas à retenir par cœur. Voici un exemple pour les illustrer.

Exemple 4.14 soit $z = 4 - 3i$ et $\omega = x + i\, y$ tel que $\omega^2 = z$; on a alors :

$$x^2 - y^2 = \Re e(z) = 4 \qquad 2xy = \Im m(z) = -3 \qquad x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5\,;$$

on en déduit que :

$$x^2 = \frac{9}{2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{1}{2}$$

or $xy < 0$ donc x et y sont de signes opposés, d'où les deux valeurs possibles de ω :

$$x = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{3-i}{\sqrt{2}} \qquad\qquad x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad \omega = \frac{-3+i}{\sqrt{2}}$$

4.5 Suites et fonctions à valeurs complexes

4.5.1 Suites à valeurs complexes

Définition 4.15 Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 4.16

(a) On dit qu'une suite de terme général z_n est bornée si la suite à valeurs réelles de terme général $|z_n|$ est bornée ou si, de manière équivalente, les suites à valeurs réelles de terme généraux $\Re e(z_n)$ et $\Im m(z_n)$ sont bornées.

(b) On dit qu'une suite de terme général z_n a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$.
On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \Re e(z_n) = \Re e(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \Im m(z_n) = \Im m(\ell)$.

(c) On dit qu'une suite de terme général z_n a pour limite l'infini si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$.

Les limites de suites à valeurs complexes vérifient des propriétés similaires à celles des limites de suites à valeurs réelles.

Proposition 4.17 Soient $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexe.

Limite de la somme :

(a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' \in \mathbb{C}$ et si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

(b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ et si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (z_n + w_n) = \infty$.

En particulier, si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie :

(d') Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{C}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (z_n + w_n) = \infty$.

Limite du produit :

(c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell' \in \mathbb{C}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n w_n = \ell\ell'$.

(d) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ et si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n w_n = 0$.

(e) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ et si $\big(|w_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un nombre $m > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n w_n = \infty$.

En particulier, si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie non nulle ou infinie :

(g') Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{C}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n w_n = \infty$.

Limite de l'inverse : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes non nuls :

(f) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell \in \mathbb{C}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

(g) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{z_n} = \infty$,

(h) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{z_n} = 0$.

La preuve de ces propriétés est laissée au lecteur. Il suffit de se rapporter aux définitions et aux propriétés similaires déjà démontrées pour les suites à valeurs réelles (cf. proposition 2.45).

4.5.2 Fonctions à valeurs complexes

Définition 4.18 Une fonction à valeurs complexe est une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (notée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$), c.-à-d., comme pour les fonctions à valeurs réelles, la donnée d'un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$, d'une part, et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, d'un nombre complexe noté $f(x)$, d'autre part. On demande de plus que $\mathcal{D}_f$ soit une réunion d'intervalles d'intérieurs non vides. C'est le domaine de définition de f.

On définit les limites des fonctions à valeurs complexes tout comme celle des fonctions à valeurs réelles.

Définition 4.19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexe définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$. Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$ et soit $\mathcal{A}$ adhérent à $\mathcal{D}_f$ ($\mathcal{A} = \ell \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{A} = +\infty$ ou $\mathcal{A} = -\infty$).

(a) On dit que f est bornée sur I s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|f(x)| \leqslant M$.

(b) On dit que $f(x)$ a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque x tend vers $\mathcal{A}$ si : $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \left|f(x)-\ell\right| = 0$. On écrit alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \ell$.

On remarque que $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \Re e\big(f(x)\big) = \Re e(\ell)$ et $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \Im m\big(f(x)\big) = \Im m(\ell)$.

(c) On dit que $f(x)$ a pour limite l'infini lorsque x tend vers $\mathcal{A}$ si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \left|f(x)\right| = +\infty$.

Les limites de fonctions à valeurs complexes vérifient des propriétés similaires à celles des limites de fonctions à valeurs réelles.

Proposition 4.20 Limites d'une fonction composée : soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$, g une fonction à valeurs complexes définie sur un domaine $\mathcal{D}_g$ et soient $\mathcal{A}$ adhérent à $\mathcal{D}_f$ ($\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{A} = +\infty$ ou $\mathcal{A} = -\infty$) et $\mathcal{B}$ adhérent à $\mathcal{D}_g$ ($\mathcal{B} \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{B} = +\infty$ ou $\mathcal{B} = -\infty$) et soit enfin $\mathcal{L} \in \mathbb{C}$ ou $\mathcal{L} = \infty$. Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \mathcal{B}$ et $\lim\limits_{y\to\mathcal{B}} g(y) = \mathcal{L}$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} (g \circ f)(x) = \mathcal{L}$.

Proposition 4.21 Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un domaine $\mathcal{D}$ et soit $\mathcal{A}$ adhérent à $\mathcal{D}$ ($\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{A} = +\infty$ ou $\mathcal{A} = -\infty$).

Limite de la somme :

(a) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} g(x) = \ell' \in \mathbb{C}$ et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda\ell + \mu\ell'$.

(b) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \infty$ et si $g(x)$ est bornée sur $\mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} (f(x) + g(x)) = \infty$.

En particulier, si $g(x)$ a une limite finie quand x tend vers $\mathcal{A}$:

(d') Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \infty$ et si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} g(x) = \ell \in \mathbb{C}$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} (f(x) + g(x)) = \infty$.

Limite du produit :

(c) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} g(x) = \ell' \in \mathbb{C}$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x)g(x) = \ell\ell'$.

(d) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = 0$ et si $g(x)$ est bornée sur $\mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x)g(x) = 0$.

(e) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \infty$ et si $|g(x)|$ est minorée sur $\mathcal{D}$ par un nombre $m > 0$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x)g(x) = \infty$.

En particulier, si $g(x)$ a une limite finie non nulle ou infinie quand x tend vers $\mathcal{A}$:

(g') Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \infty$ et si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} g(x) = \ell \in \mathbb{C}^*$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x)g(x) = \infty$.

Limite de l'inverse : soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^*$:

(f) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \ell \in \mathbb{C}^*$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

(g) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

(h) Si $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} f(x) = \infty$ alors $\lim\limits_{x\to\mathcal{A}} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Ces propriétés résultent directement de la définition (et notamment du fait qu'une fonction à valeurs complexes à une limite si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire ont chacune une limite) et des propriétés similaires déjà démontrées pour les fonctions à valeurs réelles (cf. propositions 2.60 et 2.61).

On définit la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes tout comme celle des fonctions à valeurs réelles.

Définition 4.22 Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle I (d'intérieur non vide) et soit $a \in I$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in I$, on pose $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(a) Si $\tau_a(h)$ a une limite lorsque h tend vers 0, on dit que $f(x)$ est dérivable en $x = a$ et on note :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Le nombre $f'(a)$ est appelé le nombre dérivé de $f(x)$ en $x = a$. Ceci est équivalent à dire que $f(x)$ est dérivable en $x = a$ si les deux fonctions $\Re e\big(f(x)\big)$ et $\Im m\big(f(x)\big)$ le sont.

(b) Si $f(x)$ est dérivable en tout $x \in I$, on dit que f est dérivable sur I. La fonction f', alors définie sur I, s'appelle la fonction dérivée de f. Il est d'usage de noter également $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ la dérivée de $f(x)$.

(b') S'il existe une fonction F définie sur I telle que $F' = f$, on dit que F est une primitive de f sur I.

(c) On dit que $f(x)$ est dérivable à droite en $x = a$ si $\tau_a(h)$ a une limite lorsque h tend vers 0^+. Le nombre dérivé à droite, s'il existe, est noté $f'(a^+)$.

(d) On dit que $f(x)$ est dérivable à gauche en $x = a$ si $\tau_a(h)$ a une limite lorsque h tend vers 0^-. Le nombre dérivé à gauche, s'il existe, est noté $f'(a^-)$.

Les dérivées de fonctions à valeurs complexes vérifient des propriétés similaires à celles des dérivées de fonctions à valeurs réelles.

Théorème 4.23 Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert I et g une fonction à valeurs complexes définie sur un intervalle ouvert J, tels que $f(I) \subset J$, de sorte que $g \circ f$ est définie sur I.

(a) Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$. Si $f(x)$ est dérivable en $x = a$ et $g(y)$ est dérivable en $y = b$, alors $(g \circ f)(x)$ est dérivable en $x = a$ et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \times f'(a) = g'\big(f(a)\big) \times f'(a) = (g' \circ f)(a) \times f'(a).$$

(b) Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Théorème 4.24 Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle I et soit $a \in I$ tel que $f(x)$ et $g(x)$ sont dérivables en $x = a$. Alors :

(a) pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la fonction $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ est dérivable en $x = a$ et on a : $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$;

(b) la fonction $(fg)(x) = f(x)g(x)$ est dérivable en $x = a$ et on a : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors :

(c) la fonction $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ est dérivable en $x = a$ et on a : $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$.

et, en combinant les deux points qui précèdent :

(d) la fonction $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable en $x = a$ et on a : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Par conséquent, si f et g sont dérivables sur I alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont également dérivables sur I et on a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \quad \text{et} \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont également dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Ces propriétés résultent directement de la définition (et notamment du fait qu'une fonction à valeurs complexes est dérivable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont chacune dérivable) et des propriétés similaires déjà démontrées pour les fonctions à valeurs réelles (cf. théorèmes 3.10 et 3.11).

Exemple 4.25 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes définie et dérivable sur un intervalle I (d'intérieur non vide), et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(x) = e^{f(x)}$, où e^z désigne ici l'exponentielle complexe. Alors $\varphi(x)$ est dérivable sur I et $\varphi'(x) = f'(x)e^{f(x)}$. Attention : on ne peut pas pour cet exemple appliquer le théorème 4.23 ; g est bien une fonction composée, mais pas de la façon supposée dans le théorème ; de plus, on n'a pas donné de définition de la dérivation d'une fonction définie sur $\mathbb{C}$; ainsi on ne peut pas dire que la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dérivable. On se ramène donc simplement à la définition de l'exponentielle complexe. On écrit :

$$f(x) = g(x) + i\,h(x)$$

où $g(x)$ et $h(x)$ sont les parties réelles et imaginaires de $f(x)$, d'où :

$$\varphi(x) = e^{f(x)} = e^{g(x)}\cos\big(h(x)\big) + i\,e^{g(x)}\sin\big(h(x)\big)$$

et alors, d'après la définition 4.22, $\varphi(x)$ est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(e^{g(x)}\cos\big(h(x)\big)\Big) + i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(e^{g(x)}\sin\big(h(x)\big)\Big)\\
&= \Big(g'(x)e^{g(x)}\cos\big(h(x)\big) - e^{g(x)}h'(x)\sin\big(h(x)\big)\Big) + i\,\Big(g'(x)e^{g(x)}\sin\big(h(x)\big) + e^{g(x)}h'(x)\cos\big(h(x)\big)\Big)\\
&= \big(g'(x) + i\,h'(x)\big)\Big(e^{g(x)}\cos\big(h(x)\big) + i\,e^{g(x)}\sin\big(h(x)\big)\Big)\\
&= f'(x)e^{f(x)}
\end{aligned}$$

4.6 Application aux équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants

Lemme 4.26 Soit (E) $y' - ay = b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b(x)$ est une fonction à valeurs complexes. Soient alors (E_1) $y' - ay = b_1(x)$ et (E_2) $y' - ay = b_2(x)$ les équations différentielles où $b_1(x) = \Re e\big(b(x)\big)$ et $b_2(x) = \Im m\big(b(x)\big)$. Si $f(x)$ est une fonction à valeurs complexes, solution de (E), alors $f_1(x) = \Re e\big(f(x)\big)$ est solution de (E_1) et $f_2(x) = \Im m\big(f(x)\big)$ est solution de (E_2), et réciproquement, si $f_1(x)$ est une fonction à valeurs réelles, solution de (E_1), et $f_2(x)$ une fonction à valeurs réelles, solution de (E_2) alors $f(x) = f_1(x) + i\,f_2(x)$ est solution de (E).

Preuve : Si $f(x)$ est solution de (E) alors $f'(x) - af(x) = b(x)$. En considérant la partie réelle, on a $f_1'(x) - af_1(x) = b_1(x)$ et en considérant la partie imaginaire on a $f_2'(x) - af_2(x) = b_2(x)$, d'où le résultat. La réciproque est immédiate, elle aussi. (Il est essentiel ici que a soit un nombre réel.) $\square$

Ce résultat permet notament de simplifier la recherche de solutions particulières lorsque les fonctions sinus et cosinus apparaissent dans le second membre.

Exemple 4.27 Soit $(c, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$; d'après le point (b) de la proposition 3.45, la fonction $\lambda e^{(c+i\omega)x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) $y' - ay = e^{(c+i\omega)x}$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{1}{c + i\omega - a}$. On écrit alors :

$$\lambda = \lambda_1 + i\,\lambda_2 \quad \text{où} \quad \lambda_1 = \frac{-(a-c)}{(a-c)^2 + \omega^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-\omega}{(a-c)^2 + \omega^2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\lambda e^{c+i\omega x} &= (\lambda_1 + i\,\lambda_2)\big(\cos(\omega x) + i\,\sin(\omega x)\big)e^{cx}\\
&= \big(\lambda_1\cos(\omega x) - \lambda_2\sin(\omega x)\big)e^{cx} + i\big(\lambda_2\cos(\omega x) + \lambda_1\sin(\omega x)\big)e^{cx}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

- $f_1(x) = \big(\lambda_1\cos(\omega x) - \lambda_2\sin(\omega x)\big)e^{cx}$ est solution de (E_1) $y' - ay = \cos(\omega x)e^{cx}$,
- $f_2(x) = \big(\lambda_2\cos(\omega x) + \lambda_1\sin(\omega x)\big)e^{cx}$ est solution de (E_2) $y' - ay = \sin(\omega x)e^{cx}$.

On retrouve ainsi les cas (c) et (e) de la proposition 3.45.

On peut maintenant traiter les cas général des équations différentielles linéaires d'ordre un à coefficients constants où le second membre est produit de fonctions polynomiales, trigonométriques et exponentielles.

Proposition 4.28 Soit (E) $y' - ay = \big(P(x)\cos(\omega x) + Q(x)\sin(\omega x)\big)e^{cx}$ une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions polynomiales (à coefficients réels) et $(\omega, c) \in \mathbb{R}^2$. Il existe une solution particulière de (E) de la forme $f_0(x) = \big(R(x)\cos(\omega x) + S(x)\sin(\omega x)\big)e^{cx}$ où $R(x)$ et $S(x)$ sont des fonctions polynomiales (à coefficients réels).

Preuve : d'après le point (d) de la proposition 3.45, la fonction $A(x)e^{(c+i\omega)x}$ est solution de l'équation différentielle $y' - ay = P(x)e^{(c+i\omega)x}$ si et seulement si :

$$A'(x) - \big((a-c) - i\omega\big)A(x) = P(x).$$

En suivant la méthode du cas (a) de la proposition 3.45, on peut déterminer les coefficients de la fonction polynomiale à coefficients complexes $A(x)$. On écrit alors $A(x) = A_1(x) + i\,A_2(x)$ où $A_1(x)$ et $A_2(x)$ sont à coefficients réels.
On en déduit que : $f_1(x) = \big(A_1(x)\cos(\omega x) - A_2(x)\sin(\omega x)\big)e^{cx}$ est solution de (E_1) $y' - ay = P(x)\cos(\omega x)e^{cx}$.
On construit de même une fonction polynomiale $B(x) = B_1(x) + i\,B_2(x)$ à coefficients complexes telle que

$$B'(x) - \big((a-c) - i\omega\big)B(x) = Q(x).$$

On en déduit que : $f_2(x) = \big(B_2(x)\cos(\omega x) + B_2(x)\sin(\omega x)\big)e^{cx}$ est solution de (E_2) $y' - ay = Q(x)\sin(\omega x)e^{cx}$.
La fonction cherchée est $f_0(x) = f_1(x) + f_2(x) = \Big(\big(A_1(x)+B_2(x)\big)\cos(\omega x) + \big(-A_2(x)+B_1(x)\big)\sin(\omega x)\Big)e^{cx}$. □

Exemple 4.29 Recherche d'une solution particulière $f_0(x)$ de l'équation différentielle (E) $y' - y = 2x\cos x$.
La fonction $\cos x$ est la partie réelle de e^{ix}. On considère donc l'équation (E') $y' - y = 2x\,e^{ix}$.
Si $A(x)\,e^{ix}$ est solution de (E') alors :

$$A'(x) + (-1+i)A(x) = 2x$$

$A(x)$ a donc degré 1 et s'écrit $A(x) = ax + b$, d'où :

$$a + (-1+i)(ax+b) = 2x \qquad \text{c.-à-d. :} \qquad \begin{cases} (-1+i)a = 2 \\ a + (-1+i)b = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$a = \frac{2}{-1+i} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1-i$$

et :

$$b = \frac{-a}{-1+i} = \frac{-2}{(-1+i)^2} = \frac{-2}{-2i} = \frac{1}{i} = -i$$

d'où :

$$A(x) = ax + b = (-x) + i\,(-x-1)$$

On obtient donc une solution de (E) en prenant la partie réelle de :

$$A(x)\,e^{ix} = \big[(-x) + i\,(-x-1)\big](\cos x + i\sin x)$$

c.-à-d. :

$$f_0(x) = -x\cos x + (x+1)\sin x$$

Vérification :

$$f_0'(x) = -\cos x + x\sin x + \sin x + (x+1)\cos x = x\cos x + (x+1)\sin x$$

d'où, comme attendu :

$$f_0'(x) - f_0(x) = 2x\cos x$$

Exemple 4.30 Recherche d'une solution particulière $f_0(x)$ de l'équation différentielle (E) $y' + y = x\,\sin x\,e^{x}$.
La fonction $\sin x\,e^{x}$ est la partie imaginaire de $e^{(1+i)x}$. On considère donc l'équation (E') $y' + y = x\,e^{(1+i)x}$.
Si $A(x)\,e^{(1+i)x}$ est solution de (E') alors :

$$A'(x) + \big(1 + (1+i)\big)A(x) = x \qquad \text{c.-à-d. :} \qquad A'(x) + (2+i)A(x) = x$$

$A(x)$ a donc degré 1 et s'écrit $A(x) = ax + b$, d'où :

$$a + (2+i)(ax+b) = x \qquad \text{c.-à-d. :} \qquad \begin{cases} (2+i)a = 1 \\ a + (2+i)b = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$a = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,i$$

et :

$$b = \frac{-a}{2+i} = \frac{-1}{(2+i)^2} = \frac{-1}{3+4i} = \frac{-(3-4i)}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}\,i$$

d'où :

$$A(x) = ax + b = \left(\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{25}\right) + i\,\left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{4}{25}\right)$$

On obtient donc une solution $f_0(x)$ de (E) en prenant la partie imaginaire de :

$$A(x)\,e^{(1+i)x} = \left[\left(\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{25}\right) + i\,\left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{4}{25}\right)\right](\cos x + i\sin x)e^x$$

c.-à-d. :

$$f_0(x) = \left[\left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{4}{25}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{25}\right)\sin x\right]e^x$$

Vérification :

$$\begin{aligned} f_0'(x) &= \left[-\frac{1}{5}\cos x - \left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{4}{25}\right)\sin x + \frac{2}{5}\sin x + \left(\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{25}\right)\cos x\right]e^x \\ &\quad + \left[\left(-\frac{1}{5}\,x + \frac{4}{25}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5}\,x - \frac{3}{25}\right)\sin x\right]e^x \\ &= \left[\left(\frac{1}{5}\,x - \frac{4}{25}\right)\cos x + \left(\frac{3}{5}\,x + \frac{3}{25}\right)\sin x\right]e^x \end{aligned}$$

d'où, comme attendu :

$$f_0'(x) + f_0(x) = x\,(\sin x)\,e^x$$