1 Automates finis

Définition 1.1. Un automate fini A est universel ssi

$$A \models \quad \mathit{\Phi}_u \triangleq \left(\nu F \,.\, \lambda X \,.\, X \wedge \bigwedge_{a \in \Sigma} F \quad \langle a \rangle X\right) \quad final$$

où *final* représente le prédicat qui est vrai si un état est final et faux autrement.

En effet, cette formule correspond à l'ensemble de toutes les "traces" ou mots $t \in \Sigma^*$ qui précèdent au moins un état vérifiant *final*. Autrement dit, pour impliquer Φ_u, A doit avoir un état final après chaque trace $t \in \Sigma^*$, A accepte donc tous les mots de Σ^* et est donc un automate universel.

Définition 1.2. Un automate A représente le langage vide ssi

$$A \models \quad \mathit{\Phi}_\varnothing \triangleq \left(\nu F \,.\, \lambda X \,.\, X \wedge \bigwedge_{a \in \Sigma} F \quad [a] X\right) \quad \neg final$$

Si $A \models \mathit{\Phi}_\varnothing$, pour n'importe quelle trace $t \in \Sigma^*$, tous les états qui se trouvent après celle-ci ne sont pas finaux, donc aucun mot n'est reconnu par A, pas même le mot vide, donc A représente le langage vide.

Définition 1.3. Un automate A ⊆ B ssi

$$A,B \models \quad \mathit{\Phi}_\subseteq \triangleq \left(\nu F \,.\, \lambda X, Y \,.\, (X \Rightarrow Y) \wedge \bigwedge_{a \in \Sigma} F \quad \langle a \rangle_1 X \quad \langle a \rangle_2 Y\right) \quad final \quad final$$

Soit deux automates A et B, si $(A, B) \models \mathit{\Phi}_\subseteq$ alors pour chaque trace $t \in \Sigma^*$ qui correspond à un mot reconnu par A, la même trace correspond à un mot reconnu par B. Donc tous les mots reconnus par A sont reconnus par B et $A \subseteq B$.

2 Automates de Büchi

Définition 2.1. Un automate de Büchi A est vide ssi il n'existe pas de mot infini qui mène à un état acceptant infiniment souvent. C'est équivalent à dire qu'il n'existe pas de pair de mots *(w1,w2)* tels que *w1* conduit à un état acceptant depuis l'état initial et depuis cet état acceptant *w2* conduit à un état acceptant infiniment souvent.

Un automate de Büchi A représente le langage vide ssi

$$A \models \quad \Psi_{\varnothing} \triangleq \neg \left(\left(\nu E \,.\, \lambda X \,.\, X \wedge \bigvee_{a \in \Sigma} E \quad \langle a \rangle X \right) \left(\left[\mu F \,.\, \lambda Y \,.\, Y \vee \bigvee_{b \in \Sigma} F \quad \langle b \rangle Y \right] \quad acc \right) \right)$$

où acc représente le prédicat qui est vrai si un état est acceptant et faux autrement.

On procède en construisant la formule qui est vraie ssi A est non-vide puis la négation permet d'obtenir une formule vraie ssi A est vide.

La partie droite de l'équation représente le plus petit point fixe de F qui renvoie les états acceptants les plus proches pour chaque état. Ainsi on applique l'expression de droite à l'expression de gauche et on obtient un prédicat vraie ssi X est vraie càd on a trouvé un état acceptant (le plus proche, donc atteignable avec un mot fini) et en avançant d'un nouveau mot w on peut de nouveau vérifier cette propriété càd trouver un nouvel état acceptant. En prenant le plus grand point fixe, on s'assure donc que il existe un mot infini passant par un nombre d'état acceptant infini, ce qui signifie bien que cette formule représente les langages non-vides et grace à la négation on a bien une formule vraie ssi A représente le langage vide.