強い否定を含む直観主義論理について

高 野 道 夫

小論において私は，話を命題論理の範囲にかぎり，標題に示した論理についての解説を試みたい．

この論理はヴォロビエフ［A.14］においてはじめて形式的な演繹体系として定式化されたのであるが，実質的にはネルソン［A.7］にまでさかのぼる．ネルソンは，自然数論の命題の1つの構成的解釈法である帰納的実現可能性（recursive realizability）に関する研究（クリーネ［B.2］，ネルソン［B.5］）をもとにして，命題が“構成的に偽である”という概念を導入し，以前からの古典論理的否定とも直観主義的否定とも異なる否定——すなわち強い否定——を提唱したのである．それによると，P, Qを（自然数論の）任意の命題，$\sim$を命題の強い否定を表わす記号とするとき，$\sim$［PかつQ］，$\sim$［PまたはQ］，$\sim$［PならばQ］，$\sim\sim P$はそれぞれ［$\sim P$または$\sim Q$］，［$\sim P$かつ$\sim Q$］，［Pかつ$\sim Q$］，Pと同値である．また，［‘Pかつ$\sim P$’ならば‘矛盾’］は一般に成立するが，［Pならば‘矛盾’］，［$\sim P$ならば‘矛盾’］は$\sim P$，Pと必ずしも同値でなく，さらに，［Pまたは$\sim P$］や$\sim$［Pかつ$\sim P$］も一般には成立せず，［PならばQ］と［$\sim Q$ならば$\sim P$］とは一般には一方が他方を導かない．

次にマルコフ［A.6］が，直観主義的否定と強い否定をともにもつ自然数論——ここでは$\sim$［Pの直観主義的否定］はPと同値——を考え，また直観主義的否定が強い否定を用いて表わされることを注意した．

そして，はじめに掲げたヴォロビエフ［A.14］において直観主義的否定と強い否定をともにもつ論理，すなわち強い否定を含む直観主義論理，が定式化され，それ以後従来からの記号論理の方法——切断除去（cut elimination），クリプケ・モデル（Kripke model），代数的モデルなど——を利用してこの論理

の性質が解明されてきている.

小論では，強い否定を含む直観主義理論を強い否定を含まない通常の直観主義論理にいくらかの変更を加えるという形で，その演繹体系の1つを提示し，またそのクリプケ・モデルを与える．したがって，強い否定を含む部分を読みとばすことにより，通常の直観主義論理の演繹体系とそのクリプケ・モデルの説明としても読むことができよう（これらについては [B.3], [B.1] が参考になる). 本稿では切断除去や代数的モデルには触れないが，これらについてはそれぞれ [A.16], [A.3], [A.4], [A.12] および [A.1], [A.8], [A.9], [A.10], [A.2] を参照されたい.

小論の主要な部分は演繹体系とクリプケ・モデルに関する §2 と §3 であるが，§1 で両者に共通の基礎となる形式言語を定め，最後の §4 に強い否定を含む直観主義論理の主要な性質を説明，証明ぬきで掲げる.

§1. 形 式 言 語

1.0. (**a**) 論理の形式体系においてはふつう“命題”を形式化した“論理式 (formula)”が主に取り扱われる．これは“命題変数”をもと——素論理式——にしてその言語のもつ“論理記号”と結合の順序を示す“かっこ”を用いて構成される．論理式Cに命題変数Xが現われるすべての場所に論理式Aを代入して得られる論理式を$C[A/X]$と表わそう.

(**b**) 原理的には不要なのだが小論では“式 (sequent)”なるものを利用する．それは任意有限個の論理式 $A_1, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n$ を用いての

$$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$$

という形の表現のことである．この式は‘論理式 $A_1, \cdots, A_m$（の表わす命題）がいずれも正しければ，論理式 $B_1, \cdots, B_n$（の表わす命題）のうちの少なくとも1つは正しい’という主張を表わしているものと考えていただきたい．ここでわれわれは式の定義においてmやnとして0も許している．したがって特に

$$\to B$$

という表現も式である．この式は‘論理式B（の表わす命題）が無条件に正し

い' という主張を表わしている.

今後われわれは $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda$ などによって論理式の有限列を表わし，式を $\Gamma \to \Theta$ などと表わすことにしよう．式の定義における $m=0$ や $n=0$ の場合に対応して Γ や Θ は空なる列を表わすこともある．また，“Γ, Δ” や “Γ, A” や “A, Γ” によりそれぞれ，列 Γ の後に列 Δ をつなげた列，論理式 A の前あるいは後に列 Γ をつなげた列を表わそう．そして “$\Gamma \subset \Delta$” によって，現われる順序や回数には関係なく，Γ に現われている論理式は必ず Δ にも現われていることを表わすものとしよう．

1.1. 強い否定を含まない通常の直観主義論理のための言語 $\mathbf{L}$ は，よく知られているように，論理記号として連言（かつ）$\wedge$，選言（または）$\vee$，含意（ならば）$\supset$，否定（でない）$\neg$ の 4 つをもっている．したがって言語 $\mathbf{L}$ の論理式（“$\mathbf{L}$-論理式”）は，素論理式であるか，適当な $\mathbf{L}$-論理式 A，B により，$A \wedge B, A \vee B, A \supset B, \neg A$ のいずれかの形をしている．$\mathbf{L}$-論理式を用いて作られた式を “$\mathbf{L}$-式” といおう．

1.2. 一方，強い否定を含む直観主義論理のための言語 $\mathbf{L}(\sim)$ は，言語 $\mathbf{L}$ の論理記号 $\wedge$，$\vee$，$\supset$，$\neg$ のほかに強い否定 $\sim$ をもっている．したがって言語 $\mathbf{L}(\sim)$ の論理式（“$\mathbf{L}(\sim)$-論理式”）は，素論理式であるか，適当な $\mathbf{L}(\sim)$-論理式 A，B により $A \wedge B$，$A \vee B$，$A \supset B$，$\neg A$，$\sim A$ のいずれかの形をしている．$\mathbf{L}(\sim)$-論理式を用いて作られた式を “$\mathbf{L}(\sim)$-式” といおう．$\mathbf{L}$-（論理）式は $\mathbf{L}(\sim)$-（論理）式でもある．また，素論理式とその強い否定，すなわち任意の命題変数 X を用いての X あるいは $\sim X$ の形の論理式，を総称して “擬素論理式” と呼ぼう．すると任意の $\mathbf{L}(\sim)$-論理式は，擬素論理式であるか，適当な $\mathbf{L}(\sim)$-論理式 A, B により $A \wedge B, A \vee B, A \supset B, \neg A, \sim(A \wedge B), \sim(A \vee B), \sim(A \supset B), \sim\neg A, \sim\sim A$ のいずれかの形をしている．

§2. 演繹体系

2.0. 論理の演繹体系を与えるには，まず言語を定めて（論理）式を確定し，次に “公理” と “推論法則” とを指定しなければならない．われわれは式を利

用した演繹体系を述べようとしているのだから，公理とはある特定の式，推論法則とはいくつかの式（前提）と1つの式（結論）とのある特定の関係にほかならない．公理と推論法則が与えられると“証明可能な式”の範囲が確定する．そして，式 $\to B$ が証明可能であるような論理式Bを“証明可能な論理式”というのである．

2.1. はじめに，強い否定を含まない通常の直観主義論理の演繹体系 **I** を与えよう．

（**a**） まず，体系 **I** の言語は1.1で説明した言語 **L** である．したがって体系 **I** で扱われる（論理）式は **L**-（論理）式である．そして，体系 **I** の公理，推論法則は次の通りである：

基礎式：$A\to A$.

切断：$\dfrac{\Gamma\to\Theta, A \quad A, \Delta\to\Lambda}{\Gamma, \Delta\to\Theta, \Lambda}$.

構造：$\dfrac{\Gamma\to\Theta}{\Delta\to\Lambda}$, ただし $\Gamma\subset\Delta$ かつ $\Theta\subset\Lambda$.

$\wedge$-右：$A, B\to A\wedge B$.

$\wedge$-左：$A\wedge B\to A$ および $A\wedge B\to B$.

$\vee$-右：$A\to A\vee B$ および $B\to A\vee B$.

$\vee$-左：$A\vee B\to A, B$.

$\supset$-右：$\dfrac{A, \Gamma\to B}{\Gamma\to A\supset B}$.

$\supset$-左：$A\supset B, A\to B$.

$\neg$-右：$\dfrac{A, \Gamma\to}{\Gamma\to\neg A}$.

$\neg$-左：$\neg A, A\to$.

これらのうち，基礎式，$\wedge$-右，$\wedge$-左，$\vee$-右，$\vee$-左，$\supset$-左，$\neg$-左が公理，残りの切断，構造，$\supset$-右，$\neg$-右が推論法則である．また，各推論法則において横線の上，下に記された式がそれぞれの前提，結論である．（論理）式が体系 **I** で証明可能であることを“**I**-証明可能”といおう．

論理式や式の正確な解釈のしかたは§3で説明するが，直観的に，上に掲げた各公理が正しい主張を表わし，各推論法則に対しすべての前提が正しい主張を表わしているときその結論も正しい主張を表わすこと，したがって**I**－証明可能な式が正しい主張を表わすことは，容易に認められるであろう．

実は，下に“証明”の例をかねて示すように，“基礎式”と名づけた式は他の公理や推論法則から証明可能なので公理としては不要なのだが，各公理，推論法則の役割を明確にするために一応入れておいた．

式$A \to A$の証明：

（1）　$A, A \to A \wedge A$，$\wedge$－右．

（2）　$A \to A \wedge A$，(1)，構造．

（3）　$A \wedge A \to A$，　$\wedge$－左．

（4）　$A \to A$，　(2)，(3)，切断．

上に示した証明(1)—(4)の次に

（5）　$\to A \supset A$，(4)，$\supset$－右．

を付け加えたものが式　$\to A \supset A$の証明，したがって論理式$A \supset A$の証明であることは明らかであろう．

（**b**）　われわれは同値$\equiv$を言語**L**の論理記号とは認めなかったが，その代わり今後$A \equiv B$を論理式（$A \supset B$)$\wedge$($B \supset A$）の省略形として用いよう．すると証明は略すが以下の７種の式が**I**－証明可能である：

$\to A \equiv A$；$A \equiv B \to B \equiv A$；$A \equiv B, B \equiv C \to A \equiv C$；$A_1 \equiv B_1$，$A_2 \equiv B_2 \to (A_1 \wedge A_2) \equiv (B_1 \wedge B_2)$；$A_1 \equiv B_1$，$A_2 \equiv B_2 \to (A_1 \vee A_2) \equiv (B_1 \vee B_2)$；$A_1 \equiv B_1$，$A_2 \equiv B_2 \to (A_1 \supset A_2) \equiv (B_1 \supset B_2)$；$A \equiv B \to \neg A \equiv \neg B$．

したがって式$A \equiv B \to C[A/X] \equiv C[B/X]$が**I**－証明可能である(1.0(ａ)参照)．

2.2.　さて次に，強い否定を含む直観主義論理の演繹体系**I**(～)を与えよう．

（**a**）　体系**I**(～)の言語は1.2で説明した言語**L**(～)である．したがって体系**I**(～)で扱われる（論理）式は**L**(～)－（論理）式である．すると，論理式の範囲が言語の拡張に応じて拡がったから同じ形の公理や推論法則を用いるに

してもその適用範囲はおのずと拡がるが，その拡がった2.1の公理と推論法則のほかに体系**I**(∼)は以下の公理をもつ：

$\sim$-左：$\sim A, A \to$.

$\sim\wedge$-右：$\sim A \to \sim(A \wedge B)$ および $\sim B \to \sim(A \wedge B)$.

$\sim\wedge$-左：$\sim(A \wedge B) \to \sim A, \sim B$.

$\sim\vee$-右：$\sim A, \sim B \to \sim(A \vee B)$.

$\sim\vee$-左：$\sim(A \vee B) \to \sim A$ および $\sim(A \vee B) \to \sim B$.

$\sim\supset$-右：$A, \sim B \to \sim(A \supset B)$.

$\sim\supset$-左：$\sim(A \supset B) \to A$ および $\sim(A \supset B) \to \sim B$.

$\sim\neg$-右：$A \to \sim\neg A$.

$\sim\neg$-左：$\sim\neg A \to A$.

$\sim\sim$-右：$A \to \sim\sim A$.

$\sim\sim$-左：$\sim\sim A \to A$.

ここでも正確な解釈は3.2に回すが，序文に述べた強い否定の性質を考えあわせることにより上に掲げた新しい各公理が正しい主張を表わすこと，したがって2.1の考察も加えて体系**I**(∼)で証明可能（“**I**(∼)-証明可能”）な式が正しい主張を表わすことを，簡単に見て取ることができよう．

(**b**) 2.1(b)に**I**-証明可能であるとして掲げた7種の式が，今度はA, B, C, A_1, B_1, A_2, B_2を**L**(∼)-論理式とみなして**I**(∼)-証明可能である．そのほかに次の6種の式も**I**(∼)-証明可能である：

$\to \sim A \supset \neg A$; $\to \sim(A \wedge B) \equiv (\sim A \vee \sim B)$; $\to \sim(A \vee B) \equiv (\sim A \wedge \sim B)$; $\to \sim(A \supset B) \equiv (A \wedge \sim B)$; $\to \sim\neg A \equiv A$; $\to \sim\sim A \equiv A$.

実は，2.1の公理と推論法則に上の6種の式を公理として追加しても証明可能な(論理)式の範囲は体系**I**(∼)と変わらないのである．はじめの式 $\to \sim A \supset \neg A$が証明可能であることにより否定∼を“≪強い≫否定”と呼ぶわけが理解されよう．

(**c**) ところで，証明は§3に回すが式$A \supset B \to \sim B \supset \sim A$ および $A \equiv B \to \sim A \equiv \sim B$は一般には**I**(∼)-証明可能でなく，したがって**L**(∼)-式$A \equiv B$

$\rightarrow C[A/X] \equiv C[B/X]$ も一般には $\mathbf{I}(\sim)$ - 証明可能ではない．そこでこのように，‘等値’な部分論理式を入れ換えても‘等値’であるような‘等値’の概念が求められるが，それに答えるのがマルコフ［A.6］による強い同値$\doteqdot$である．$A \doteqdot B$を$(A \equiv B) \wedge (\sim A \equiv \sim B)$の省略形としよう．すると以下の式が$\mathbf{I}(\sim)$ - 証明可能であることが容易にわかる：

$\rightarrow A \doteqdot A$; $A \doteqdot B \rightarrow B \doteqdot A$; $A \doteqdot B$, $B \doteqdot C \rightarrow A \doteqdot C$; $A_1 \doteqdot B_1$, $A_2 \doteqdot B_2 \rightarrow (A_1 \wedge A_2) \doteqdot (B_1 \wedge B_2)$; $A_1 \doteqdot B_1$, $A_2 \doteqdot B_2 \rightarrow (A_1 \vee A_2) \doteqdot (B_1 \vee B_2)$; $A_1 \doteqdot B_1$, $A_2 \doteqdot B_2 \rightarrow (A_1 \supset A_2) \doteqdot (B_1 \supset B_2)$; $A \doteqdot B \rightarrow \neg A \doteqdot \neg B$; $A \doteqdot B \rightarrow \sim A \doteqdot \sim B$.

したがって一般に$\mathbf{L}(\sim)$ - 式$A \doteqdot B \rightarrow C[A/X] \doteqdot C[B/X]$が$\mathbf{I}(\sim)$ - 証明可能である．

これもマルコフ[A.6]の結果であるが，式 $\rightarrow (\neg A) \doteqdot (A \supset \sim A)$も$\mathbf{I}(\sim)$ - 証明可能である．この事実を上に掲げた$\doteqdot$の性質と考えあわせ，体系$\mathbf{I}(\sim)$では直観主義的否定$\neg$は強い否定$\sim$を用いて表わされる，といってよいであろう．

§3. クリプケ・モデル

3.0. (**a**) ここでは与えられた言語に対するクリプケ・モデルというものを考える．それはある条件を満たす集合S，Sの２元の関係R，Sの元と論理式の関係$\vDash$の組（$S, R, \vDash$）のことである．これを次のように理解することができる．つまり，Sの各元は情報を，またsRtは情報tの方が情報sより（同じ内容の場合も含め）より豊かな情報内容をもっていることを，そして$s \vDash A$は情報sをもとにして論理式A（の表わす命題）を正しいと認められることを，それぞれ表わすものと考えるのである．

(**b**) われわれは“式$\Gamma \rightarrow \Theta$がクリプケ・モデル（$S, R, \vDash$）で恒真（valid）である”といういい方をするがこれは，Sの任意の元sに対し≪‘列Γに現われるすべての論理式Aに対し$s \vDash A$’ならば‘$s \vDash B$となる列Θに現われる論理式Bが存在する’≫ということである．また，“論理式Bがクリプケ・モデル（$S, R, \vDash$）で恒真である”ということを，式 $\rightarrow B$がそうであること，つま

りSの任意の元sに対し$s \vDash B$であることとしよう．

3.1. ここでもまず，強い否定を含まない通常の直観主義論理のための言語**L**に対するクリプケ・モデル（“**L**－モデル”）を定めよう．

（**a**） **L**－モデルとは次の条件M1,M2,M3を満たす組$(S, R, \vDash)$のことである：

M1. Sは空でない集合である．

M2. RはS上の反射的かつ推移的関係である．すなわち，

M2.1（反射性）．Sの任意の元sに対しsRs.

M2.2（推移性）．‘rRsかつsRt’ならばrRt.

M3. $\vDash$は以下の条件M3.1—M3.5を満たすSの元と**L**－論理式との間の関係である：

M3.1. ‘$s \vDash A$かつsRt’ならば$t \vDash A$.

M3.2. $s \vDash A \wedge B$は‘$s \vDash A$かつ$s \vDash B$’と同値．

M3.3. $s \vDash A \vee B$は‘$s \vDash A$または$s \vDash B$’と同値．

M3.4. $s \vDash A \supset B$は‘sRtである任意のtに対し，$t \vDash A$ならば$t \vDash B$’と同値．

M3.5. $s \vDash \neg A$は‘sRtである任意のtに対し，$t \vDash A$でない’と同値．

3.0(a)に与えたクリプケ・モデルの解釈法で各条件が何を意味するかは読者が自分で考えていただきたい．

（**b**） M3.1′を集合Sの2元の関係RとSの元と素論理式の関係$\vDash_0$についての次のような条件としよう：

M3.1′. 素論理式Aに対し，‘$s \vDash_0 A$かつsRt’ならば$t \vDash_0 A$.

いま条件M1,M2,M3.1′を満たす集合S，Sの2元の関係R，Sの元と素論理式の関係$\vDash_0$が与えられたとしよう．すると，$\vDash_0$をSの元と任意の**L**－論理式との間の関係$\vDash$に拡張して組$(S, R, \vDash)$を**L**－モデルにすることができ，このような拡張は一意的である．それは，条件M3.2—M3.5により$\vDash_0$の拡張である$\vDash$が一意的に定まり，この関係$\vDash$が自動的に条件M3.1を満たすからである．したがって**L**－モデルを与えるには，M1,M2,M3.1′を満たす集合S，S

の２元の関係R, Sの元と素論理式の関係 $\models_0$ を指定すれば十分である.

この方式で**L**－モデルの例を１つ挙げてみよう. その前に１つの命題変数に注目しそれをXとしておく. さて, 集合S, Sの２元の関係R, Sの元と素論理式の関係 $\models_0$ を次のように定めよう：

まず$S=\{1,2\}$ とする. また$1R1, 2R2, 1R2$は成り立つが$2R1$は成り立たないものとする. そして, $2\models_0 X$は成り立つが$1\models_0 X$は成り立たず, AがX以外の素論理式を表わすとき$1\models_0 A$も$2\models_0 A$も成り立たないものとしよう.

このとき条件M1, M2, M3.1′が満たされることは容易に確かめられよう. よって $\models_0$ をSの元と任意の**L**－論理式の関係$\models$に拡張して**L**－モデル（S, R, $\models$）を得る.

まずこの**L**－モデルで$1\models X\vee\neg X$でないことを示そう. はじめに$1\models X$でない. 次に$1R2$で$2\models X$であることにより$1\models\neg X$でない. 以上の２つより$1\models X\vee\neg X$でない.

今度は$1\models\neg\neg X\supset X$でないことを示そう. $1R2, 2R2$で$2\models X$であることより$1\models\neg X$でも$2\models\neg X$でもない. つまり$1Rt$である任意のtに対し$t\models\neg X$でない. いいかえれば$1\models\neg\neg X$である. したがって, $1R1$で$1\models\neg\neg X$であるのに$1\models X$でないので$1\models\neg\neg X\supset X$ではない.

以上で論理式$X\vee\neg X$と$\neg\neg X\supset X$がここに与えた**L**－モデル(S, R, $\models$)で恒真ではないことがわかった.

（**c**） さて, くわしい証明はしないが**L**－（論理）式に関して2.1に述べた**I**－証明可能性と本節に述べた**L**－モデルに関する恒真性とを関連づける, 極めて重要な次の“直観主義論理の完全性”が成り立つ：

> **L**－（論理）式が**I**－証明可能であるための必要十分条件は, それがすべての**L**－モデルで恒真なことである.

必要性≪**I**－証明可能ならすべての**L**－モデルで恒真≫の方の証明は比較的簡単である. 任意の**L**－モデルをとったとき, 体系**I**の各公理がそこで恒真であり, 各推論法則についてもしすべての前提がそこで恒真なら結論もそうであることが, 容易に確かめられるからである.

逆の十分性≪すべての$\mathbf{L}$－モデルで恒真なら$\mathbb{I}$－証明可能≫の証明の筋道は次のとおりである（この方法は［B.4］による）．まず$\mathbf{L}$－論理式の集合$\mathfrak{C}$に関する次の条件（$\mathfrak{C}$）を考える：

（$\mathfrak{C}$）$\mathfrak{C}$に属する有限個の論理式$A_1, \cdots, A_m$と$\mathfrak{C}$に属さない有限個の論理式$B_1 \cdots, B_n$をどうとっても，式$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$は$\mathbb{I}$－証明不可能である．

すると次の命題が成り立つ：

$\mathbf{L}$－論理式の集合$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$について，もし$\mathfrak{A}$に属する有限個の論理式$A_1, \cdots, A_m$と$\mathfrak{B}$に属する有限個の論理式$B_1, \cdots, B_n$をどうとっても式$A_1, \cdots, A_m \to B_1, \cdots, B_n$が$\mathbb{I}$－証明不可能であれば，上の条件（$\mathfrak{C}$）を満たす$\mathbf{L}$－論理式の集合$\mathfrak{C}$で$\mathfrak{A}$を部分集合として含み$\mathfrak{B}$とは互いに素であるものが存在する．

さてここで集合S，Sの２元の関係R，Sの元と$\mathbf{L}$－論理式の関係$\vDash$を次のように定めよう：

まずSを条件（$\mathfrak{C}$）を満たす$\mathbf{L}$－論理式の集合$\mathfrak{C}$全体の集合とする．また，Sの２元$\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$に対し$\mathfrak{C} R \mathfrak{D}$は$\mathfrak{C}$が$\mathfrak{D}$に部分集合として含まれることを，$S$の元$\mathfrak{C}$と$\mathbf{L}$－論理式$A$に対し$\mathfrak{C} \vDash A$は$A$が$\mathfrak{C}$に元として属することを，それぞれ表わすものとしよう．

すると上の命題により，組（$S, R, \vDash$）が$\mathbf{L}$－モデルになることがわかり，さらに次の命題の成り立つこともわかる（この命題の逆≪$\mathbb{I}$－証明可能なら上の$\mathbf{L}$－モデルで恒真≫も先に示した完全性定理における必要性の特別な場合として成り立つ）：

$\mathbf{L}$－（論理）式が上に定義した$\mathbf{L}$－モデル$(S, R, \vDash)$で恒真ならば，それは$\mathbb{I}$－証明可能である．

これより，すべての$\mathbf{L}$－モデルで恒真な$\mathbf{L}$－（論理）式が$\mathbb{I}$－証明可能であることは明らかであろう．

完全性定理における必要性の部分より，与えられた$\mathbf{L}$－論理式が$\mathbb{I}$－証明不可能であることを示すには，それを恒真にしない$\mathbf{L}$－モデルを１つ与えればよいことがわかる．よって（b）に挙げた$\mathbf{L}$－モデルの例より，論理式$X \vee \neg X$,

$\neg\neg X \supset X$がいずれも$\mathbf{I}$－証明不可能であることがわかった.

3.2. 今度は，強い否定を含む直観主義論理のための言語$\mathbf{L}(\sim)$に対するクリプケ・モデル（“$\mathbf{L}(\sim)$－モデル”）を定めよう.

（a） $\mathbf{L}(\sim)$－モデルとは3.1(a)の条件M1, M2それに下記の条件M3*を満たす組（$S, R, \vDash$）のことである：

M3*. $\vDash$は3.1(a)の条件M3.1—M3.5および以下の条件M3.6—M3.11を満たすSの元と$\mathbf{L}(\sim)$－論理式との間の関係である：

M3.6. ‘$s \vDash A$かつ$s \vDash \sim A$’ということはない.

M3.7. $s \vDash \sim(A \wedge B)$は‘$s \vDash \sim A$または$s \vDash \sim B$’と同値.

M3.8. $s \vDash \sim(A \vee B)$は‘$s \vDash \sim A$かつ$s \vDash \sim B$’と同値.

M3.9. $s \vDash \sim(A \supset B)$は‘$s \vDash A$かつ$s \vDash \sim B$’と同値.

M3.10. $s \vDash \sim\neg A$は$s \vDash A$と同値.

M3.11. $s \vDash \sim\sim A$は$s \vDash A$と同値.

$\mathbf{L}(\sim)$－モデル（$S, R, \vDash$）が与えられたとき，Sの元と$\mathbf{L}(\sim)$－論理式との間の関係$\vDash$をSの元と$\mathbf{L}$－論理式との間に制限した関係を$\vDash'$とすれば，組（$S, R, \vDash'$）が$\mathbf{L}$－モデルになることは明らかである. $\mathbf{L}$－(論理)式が$\mathbf{L}(\sim)$－モデル（$S, R, \vDash$）で恒真であることと$\mathbf{L}$－モデル（$S, R, \vDash'$）で恒真であることとが同値であることも明らかであろう.

（b） M3.1″とM3.6′を集合Sの2元の関係RとSの元と擬素論理式の関係$\vDash_0$についての次のような条件としよう：

M3.1″. 擬素論理式Aに対し，‘$s \vDash_0 A$かつsRt’ならば$t \vDash_0 A$.

M3.6′. 素論理式Aに対し，‘$s \vDash_0 A$かつ$s \vDash_0 \sim A$’ということはない.

いま条件M1, M2, M3.1″, M3.6′を満たす集合S，Sの2元の関係R，Sの元と擬素論理式の関係$\vDash_0$が与えられたとしよう. このときも$\vDash_0$をSの元と任意の$\mathbf{L}(\sim)$－論理式との間の関係$\vDash$に拡張して組（$S, R, \vDash$）を$\mathbf{L}(\sim)$－モデルにすることが一意的に可能である. したがって$\mathbf{L}(\sim)$－モデルを与えるには，条件M1, M2, M3.1″, M3.6′を満たす集合S，Sの2元の関係R，Sの元と擬素論理式の関係$\vDash_0$を指定すれば十分である.

この方式で$\mathbf{L}(\sim)$-モデルの例を1つ挙げてみる．そのためにX, Yを相異なる命題変数としておこう．われわれは集合S, Sの2元の関係R, Sの元と擬素論理式の関係$\models_0$を次のように定めるのである：

まず$S=\{1\}$とし$1R1$が成り立つものとする．そして，$1\models_0\sim Y$は成り立つが$1\models_0 X$, $1\models_0\sim X$, $1\models_0 Y$はいずれも成り立たず，Aが$X, \sim X, Y, \sim Y$以外の擬素論理式を表わすとき$1\models_0 A$も成り立たないものとする．

このとき条件M1, M2, M3.1″, M3.6′が満たされることは容易に確かめられよう．よって$\models_0$をSの元と任意の$\mathbf{L}(\sim)$-論理式の関係$\models$に拡張することにより，$\mathbf{L}(\sim)$-モデル$(S, R, \models)$が得られる．簡単に考察により，この$\mathbf{L}(\sim)$-モデルにおいて論理式$X\vee\sim X$, $\sim(X\wedge\sim X)$, $\neg X\supset\sim X$, $(X\supset Y)\supset(\sim Y\supset\sim X)$, $(X\equiv Y)\supset(\sim X\equiv\sim Y)$がいずれも恒真でないことがわかる．

また次のようにして，$\mathbf{L}$-モデル$(S, R, \models)$から$\mathbf{L}(\sim)$-モデルを作ることもできる：

Sの元と擬素論理式の関係$\models_0$を，Sの任意の元sと任意の素論理式Aに対し$s\models_0 A$は$s\models A$と同値で$s\models_0\sim A$はいつも成立しないものと定めよう．すると$S, R, \models_0$は明らかに条件M1, M2, M3.1″, M3.6′を満たすから，$\models_0$をSの元と任意の$\mathbf{L}(\sim)$-論理式の関係$\models^*$に拡張し$\mathbf{L}(\sim)$-モデル$(S, R, \models^*)$を得る．

すると，与えられた$\mathbf{L}$-モデル$(S, R, \models)$とそれをもとにして作った$\mathbf{L}(\sim)$-モデル$(S, R, \models^*)$とに関し，Sの任意の元sと任意の$\mathbf{L}$-論理式Aについて$s\models A$と$s\models^* A$とは同値であることが，$\mathbf{L}$-論理式Aの構成に沿った帰納法で容易にわかる．したがって$\mathbf{L}$-（論理）式については，$\mathbf{L}$-モデル$(S, R, \models)$で恒真であることと$\mathbf{L}(\sim)$-モデル$(S, R, \models^*)$で恒真であることとは同値である．

（c） さて，3.1(c)に掲げた“直観主義論理の完全性”に対応し，$\mathbf{L}(\sim)$-（論理）式に関して2.2に述べた$\mathbb{I}(\sim)$-証明可能性と本節に述べた$\mathbf{L}(\sim)$-モデルに関する恒真性とを関連づける，次の“強い否定を含む直観主義論理の完全性”がやはり成り立つのである：

$\mathbf{L}(\sim)$ - (論理) 式が $\mathbf{I}(\sim)$ - 証明可能であるための必要十分条件は，それがすべての $\mathbf{L}(\sim)$ - モデルで恒真なことである.

この定理は"直観主義論理の完全性"の証明における言語 $\mathbf{L}$，体系 $\mathbf{I}$ をそれぞれ言語 $\mathbf{L}(\sim)$，体系 $\mathbf{I}(\sim)$ に読みかえることにより，まったく同じ方法で証明される.

ここでも完全性定理における必要性の部分より，与えられた $\mathbf{L}(\sim)$ - 論理式が $\mathbf{I}(\sim)$ - 証明不可能であることを示すには，それを恒真にしない $\mathbf{L}(\sim)$ - モデルを与えればよいことがわかる. よって (b) に挙げた $\mathbf{L}(\sim)$ - モデルの例より，論理式 $X \vee \sim X$, $\sim(X \wedge \sim X)$, $\neg X \supset \sim X$, $(X \supset Y) \supset (\sim Y \supset \sim X)$, $(X \equiv Y) \supset (\sim X \equiv \sim Y)$ がいずれも $\mathbf{I}(\sim)$ - 証明不可能であることがわかった (2.2(c)参照).

2つの完全性定理と，(a)の末尾に示した $\mathbf{L}(\sim)$ - モデル $(S, R, \models)$ からの $\mathbf{L}$ - モデル $(S, R, \models')$ の構成，および(b)の末尾に示した $\mathbf{L}$ - モデル $(S, R, \models)$ からの $\mathbf{L}(\sim)$ - モデル $(S, R, \models^*)$ の構成により，直観主義論理への強い否定の追加が元からの（強い否定を含まない）命題の妥当性には影響を与えないことを主張する次の定理が得られる：

$\mathbf{L}$ - (論理) 式が $\mathbf{I}(\sim)$ - 証明可能であるための必要十分条件は，それが $\mathbf{I}$ - 証明可能なことである.

クリプケ・モデルを一切利用せずに演繹体系 $\mathbf{I}$ および $\mathbf{I}(\sim)$ の性質だけを用いて上の定理を証明することもできるのだが，それは読者にまかせよう.

§4. 強い否定を含む直観主義論理の主な性質

4.1. いままでみてきたように，強い否定を含む直観主義論理というのは，強い否定を含まない通常の直観主義論理にわずかの変更を加えたにすぎないものなので，通常の直観主義論理のもつ以下のような性質は強い否定を含む直観主義論理に受け継がれる.

有限モデル性 (finite model property). 論理式 A が証明不可能ならば，A がそこで恒真でないようなクリプケ・モデル $(S, R, \models)$ で S が有限集合であ

るものが存在する.

決定可能性 (decidability). 与えられた論理式が証明可能であるかどうかを有限回の手続きで決定できる.

選言性 (disjunction property). 論理式$A \vee B$が証明可能なら, 論理式AとBの少なくとも一方は証明可能である.

補間定理 (interpolation theorem). 論理式$A \supset B$が証明可能だとしよう. すると, 論理式$\neg A$が証明可能であるか, 論理式Bが証明可能であるか, あるいは論理式$A \supset C$と$C \supset B$とがともに証明可能でしかもCに現われる命題変数がAにもBにも現われるものばかりであるような論理式Cが存在するか, のいずれかである.

4.2. 一方新しい論理記号の追加により, 強い否定を含まない通常の直観主義論理では表現できない新しい性質も強い否定を含む直観主義論理はもっている. 2.2(c)に述べたマルコフ[A.6]による強い同値の性質もそうだが, そのほかに次のような性質もある.

標準形 (ヴォロビエフ [A.14], [A.15], [A.16]). 1°) 任意の論理式Aに対し次のような有限個の論理式$A_1, \cdots, A_n$が存在する:

論理式$A \equiv (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$が証明可能である. 各論理式$A_k (k=1, \cdots, n)$は連言$\wedge$も直観主義的否定$\neg$も含まず, また$(B \vee C) \supset D$の形の部分論理式も含まず, さらにその中では強い否定$\sim$はすべて命題変数に直接かかっている.

2°) 任意の論理式Aに対し次のような命題変数Uと有限個の論理式$A_1 \cdots, A_n$が存在する:

論理式Aが証明可能であることと論理式$A_1 \supset (A_2 \supset \cdots \supset (A_n \supset U) \cdots)$が証明可能であることとは同値である. 各論理式$A_k (k=1, \cdots, n)$は適当な命題変数$X_k, Y_k, Z_k$により$X_k \supset Y_k, X_k \supset \sim Y_k, \sim X_k \supset Y_k, X_k \supset (Y_k \supset Z_k), (X_k \supset Y_k) \supset Z_k, X_k \supset (Y_k \vee Z_k)$のいずれかの形をしている.

古典論理との関係 (高野-石本 [A.12]). Aを含意$\supset$も直観主義的否定$\neg$も含まない論理式とする. このとき, 論理式Aに含まれる論理記号$\wedge, \vee, \sim$をそれぞれ古典(2値)論理の連言, 選言, 否定とみなし, 命題変数を‘真’と

'偽' の中からどう選んで解釈してもAが '真' と解釈されるとき，論理式Aをトートロジーといおう．すると，論理式Aがトートロジーであるための必要十分条件は，論理式$\neg\sim A$が（体系 **I**($\sim$)で）証明可能なことである．

(1978. 6. 13)

参考文献

A．強い否定を含む直観主義論理に関する文献．

[A. 1] A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa, On constructible falsity in the constructive logic with strong negation, Colloquium Mathematicum, 6 (1958), 287～310.

[A. 2] M. M. Fidel, An algebraic study of a propositional system of Nelson, preprint.

[A. 3] A. Ishimoto, A Schütte-type formulation of the intuitionistic functional calculus with strong negation, Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, 100 (1970), 161～189.

[A. 4] ——, The intuitionistic functional calculus with strong negation and some of its versions, ibid., 111 (1972), 67～94.

[A. 5] A. Ishiwara, Constructive predicate logic with strong negation and its models, preprint.

[A. 6] A. A. Markov, A constructive logic（ロシア語），Uspehi Matematičeskih Nauk, 5 (1950), 187～188. 日本語訳：本誌，3 (1970), 224～225.

[A. 7] D. Nelson, Constructible falsity, The Journal of Symbolic Logic, 14 (1949), 16～26.

[A. 8] H. Rasiowa, N–lattices and constructive logic with strong negation, Fundamenta Mathematicae, 46 (1958), 61～80.

[A. 9] ——, Algebraische Charakterisierung der intuitionistischen Logik mit starker Negation, Constructivity in Mathematics (North-Holland, Amsterdam, 1959), 234～240.

[A. 10] ——, An Algebraic Approach to Non-Classical Logics, North-Holland, Amsterdam-Oxford-New York, 1974.

[A. 11] R. Routley, Semantical analysis of propositional systems of Fitch and Nelson, Studia Logica, 33 (1974), 283～298.

[A. 12] M. Takano and A. Ishimoto, Constructive propositional logics with strong negation and their completeness, in preparation.

[A. 13] R. H. Thomason, A semantical study of constructible falsity, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, **15** (1969), 247 ～257.

[A. 14] N. N. Vorob'ev, A constructive propositional calculus with strong negation (ロシア語), Doklady Akademii Nauk SSSR, **85** (1952), 465～468.

[A. 15] ——, The problem of deducibility in the constructive propositional calculus with strong negation (ロシア語), ibid., **85** (1952), 689～692.

[A. 16] ——, A constructive propositional calculus with strong negation(ロシア語), Trudy Matematičeskogo Instituta im. V. A. Steklova, **72** (1964), 195 ～227. 日本語訳：本誌, **3** (1970), 175～223.

B. その他の参考文献.

[B. 1] M. C. Fitting, Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, North-Holland, Amsterdam-London, 1969.

[B. 2] S. C. Kleene, On the interpretation of intuitionistic number theory, The Journal of Symbolic Logic, **10** (1945), 109～124.

[B. 3] ——, Introduction to Metamathematics, North-Holland, Amsterdam, 1952.

[B. 4] 前原昭二, 完全性証明の一般論, 科学基礎論研究, **10** (1970), 28～34.

[B. 5] D. Nelson, Recursive functions and intuitionistic number theory, Transactions of the American Mathematical Society, **61** (1947), 307～368.

筆者紹介

1947年生まれ. 1970年東京工業大学理工学部数学科卒. 1978年東京教育大学大学院退学(数理論理学専攻).

主要論文

A formulation of the Fitch functional calculus as a Sequenzenkalkül, Bulletin of the Tokyo Institute of Technology, **100** (1970), 143～160.

Gödel の primitive recursive functional をめぐって, 数学, **29** (1977), 289～298.