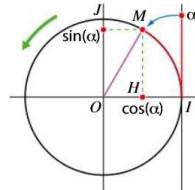


# BTS10 – Nombres complexes

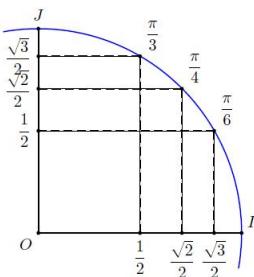
**Propriété 1:** On considère un point  $M(x; y)$  et  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2} [$

- $\cos \alpha = x = \frac{OH}{OM}$
- $\sin \alpha = y = \frac{HM}{OM}$



valeur de $\alpha$ en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

On remarque la symétrie du tableau. Pour mémoriser ce tableau il suffit donc de se souvenir des 5 valeurs particulières présentes.



## 1. Approche algébrique : L'unité i

**Définition 1:** Nombre complexe–forme algébrique

Il existe un ensemble  $\mathbb{C}$  tel que :

- 1)  $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$  et un élément  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
- 2) Tout nombre complexe s'écrit  $[z = a + ib]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

**Exercice 1:** Calculs immédiats Calculer et simplifier pour mettre sous la forme  $a + ib$  :

- $A = (3 + 5i) - (2 - 4i) = \dots$
- $B = i(3 - 4i)$
- $C = (1 + i)^2 = \dots$

**Exercice 2:** Calcul de  $i^n$

- Calculer les valeurs de  $i^2, i^3, i^4, i^5 \dots$
- Sur Géogébra
  - placer un curseur  $n$  allant de  $-10$  à  $10$  par pas de  $1$
  - dans la partie calcul formel, taper  $i^n$ . (Attention le  $i$  complexe se forme en appuyant sur **ALT + i**)
  - faire varier  $i$  et observer sa valeur
  - observer ce qu'il se passe dans la partie graphique

**Exercice 3:** Calculs complexes avec Géogébra Par défaut Géogébra cherche à convertir les nombres complexes sous forme algébrique. Tester le calcul formel et créant les nombres complexes suivants et observez la partie graphique.

$$z_1 = (3 + 4i) \times (4 - i)$$

$$z_2 = \frac{1-3i}{4-i}$$

$$z_3 = (1 - i)^6$$

**Propriété 2: Le nombre conjugué**

Le conjugué de  $z = a + ib$  est  $[\bar{z} = a - ib]$ .

- **Méthode :** Pour calculer un quotient  $\frac{z_1}{z_2}$ , on multiplie le haut et le bas par  $\overline{z_2}$ .

**Exercice 4:** Application

- Déterminer le nombre conjugué de  $z = 4 - 3i$
- Ecrire sous forme algébrique le nombre  $\frac{3 - i}{4 - 3i}$
- Vérifier avec Géogébra

## 2. Approche géométrique

### Propriété 3: Nombres complexes et géométrie

Au point  $M(a; b)$ , on peut associer le nombre complexe  $z = a + ib$ .

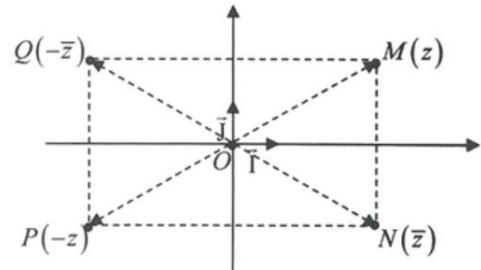
On dit que  $z = a + ib$  est l'**affixe** du point  $M$ . On note

$$\boxed{M(a + ib)}$$

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectifs  $z_A$  et  $z_B$ .

- Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $\boxed{z_{AB} = z_B - z_A}$

- Le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour affixe  $\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$



### Exercice 5: Nombres complexes et géométrie

- Sur Géogébra, placez le point  $A$  d'affixe  $z_A = 1 + 2i$
- Placez le point  $B$  d'affixe  $\overline{z_A}$  et le point  $C$  d'affixe  $-z_A$ .
- Quelle symétrie permet de passer de  $A$  à  $B$ ? De  $A$  à  $C$ ?

## 3. Résolutions d'équations

### Propriété 4: Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans  $\mathbb{R}$ :

- 1) Faire passer dans le membre de gauche tout ce qui dépend de  $z$  et dans le membre de droite tout ce qui ne dépend pas de  $z$ .
- 2) Simplifier le membre de gauche et de droite
- 3) Isoler  $z$  et répondre à la question

### Exercice 6: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ : $3z - 6 = 4i + z + 2$

### Propriété 5: Résolution d'équations du deuxième degré dans $\mathbb{C}$

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans  $\mathbb{R}$ :

- 1) Mettre l'équation sous la forme  $az^2 + bz + c = 0$  avec  $(a, b, c)$  trois réels.
- 2) Calculer le **discriminant**  $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ 
  - Si le discriminant est positif alors il existe deux solutions réelles (éventuellement égales).

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Si le discriminant est strictement négatif alors il existe deux solutions complexes conjuguées:

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

## 4. Formes trigonométrique et exponentielle

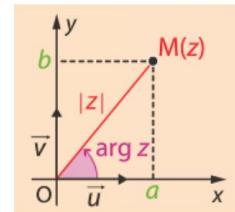
### Définition 2: Module et argument d'un nombre complexe

Le **module** d'un nombre complexe  $z = a + ib$  est le réel positif

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Un **argument** de  $z$ , noté  $\arg(z)$  est une mesure exprimée en radian de l'angle

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM})$$



**Définition 3: Forme trigonométrique d'un nombre complexe**

Tout nombre complexe  $z$  s'écrit sous la **forme algébrique**  $z = a + ib$ . On note  $\theta = \arg(z)$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

Tout nombre complexe peut donc s'écrire sous la **forme trigonométrique**:

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

**Méthode 1: Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique**

On considère un nombre complexe  $z$  écrit sous forme algébrique  $z = a + ib$

- 1) Calculer  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 2) Calculer  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  et trouver la valeur de  $\theta$  respectant les deux conditions précédentes.
- 3) Ecrire  $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

**Exercice 7:** Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométriques

$$1) z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2} \quad 2) z = -2 + 2i \quad 3) z = 1 + i\sqrt{3}$$

**Méthode 2: Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique**

On considère un nombre complexe  $z$  tel que l'on connaît  $|z|$  et un argument  $\theta = \arg(z)$ .

- 1) Calculer  $a = |z| \cos \theta$
- 2) Calculer  $b = |z| \sin \theta$
- 3) Ecrire  $z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta$

**Exercice 8:** Ecrire les nombres complexes suivants sous forme arithmétique

$$1) |z| = 2 \text{ et } \arg(z) = -\frac{\pi}{3} \quad 2) |z| = \frac{1}{2} \text{ et } \arg(z) = \frac{5\pi}{6} \quad 3) |z| = 3 \text{ et } \arg(z) = \frac{2\pi}{3}$$

**Propriété 6: Notation exponentielle (Euler)**

On écrit :  $z = r e^{i\theta}$  avec  $r = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$ .

**Propriété 7: Propriétés de la forme exponentielle**

$$\begin{array}{lll} 1) e^{i \times 0} = 1 & 2) e^{i \frac{\pi}{2}} = 0 & 3) e^{i\pi} = 1 \\ 4) e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} & 5) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} & 6) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \\ 7) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \end{array}$$

**Exercice 9:** Ecriture sous forme exponentielle

Ecrire les nombres de l'exercice 7 sous forme exponentielle

## 5. Application aux circuits

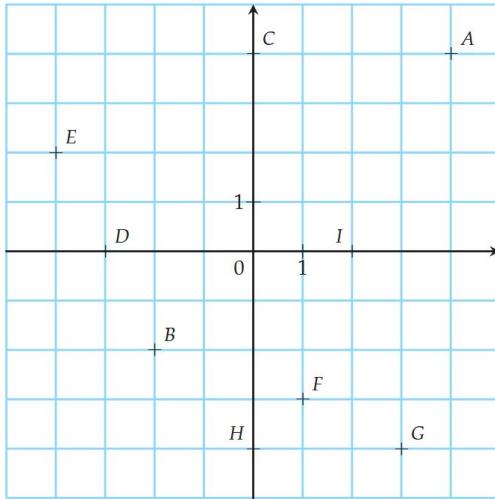
**Exercice 10:** Impédances complexes En électronique, on utilise les nombres complexes pour modéliser les composants :

- Résistance :  $Z_R = R$
- Bobine :  $Z_L = iL\omega$

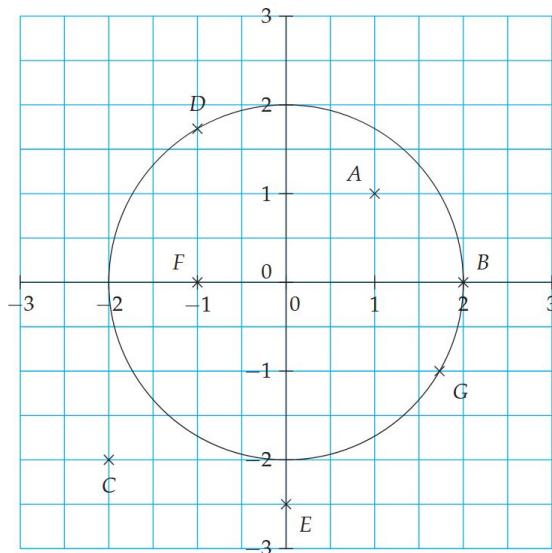
Calculer l'impédance totale  $Z = Z_R + Z_L$  sous forme exponentielle pour  $R = 10\Omega$  et  $L\omega = 10\Omega$ .

## 6. Exercices

**4** Déterminer les affixes des points repérés ci-dessous.



**5** Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Donner le module et un argument de leurs affixes.



**8** Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

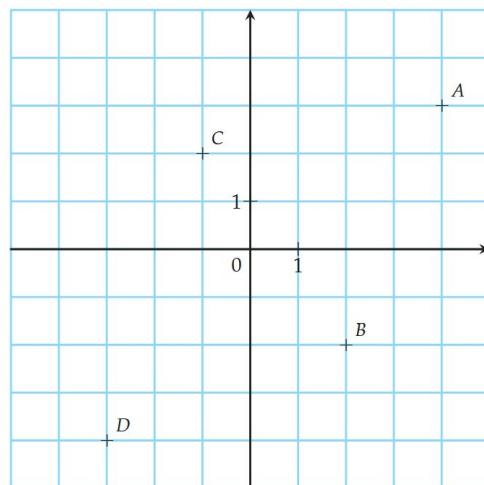
- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| <b>1)</b> $(2 - 4i) + (2 - 3i)$ | <b>3)</b> $(3 + 3i) + (1 - i)$   |
| <b>2)</b> $(1 - 5i) + (2 + i)$  | <b>4)</b> $\left(2 + \frac{1}{3}i\right) + \left(-3 + \frac{4}{3}i\right)$ |

**11** ► **MÉTHODE 1** p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

- |                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|
| <b>1)</b> $2(1 + 2i)$ | <b>3)</b> $2i(3 - 2i)$        |
| <b>2)</b> $i(3 + i)$  | <b>4)</b> $(1 + 2i)(-2 - 2i)$ |

**20**



Sans effectuer de calculs

- 1)** Lire l'affixe  $z_A$  du point  $A$ .
  - 2)** Construire le point dont l'affixe est  $\bar{z}_A$ .
  - 3)** Construire le point dont l'affixe est  $-z_A$ .
  - 4)** Construire le point dont l'affixe est  $z_A + 2$ .
  - 5)** Construire le point dont l'affixe est  $z_A - i$ .
  - 6)** Mêmes questions pour les points  $B$ ,  $C$  et  $D$
- 32** Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

- |   |  |
|---|--|
| <b>1)</b> $7 - \left(3 + \frac{5}{3}i\right)$ | <b>3)</b> $\frac{3}{2} + 3i + (1 - i)$ |
| <b>2)</b> $(3 - 5i) + \sqrt{2}$               | <b>4)</b> $(5 - i)(\sqrt{2} + 3i)$     |

**45** ► **MÉTHODE 3** p. 237

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

- |  |   |
|--|---|
| <b>1)</b> $(1 + i)z = 1 - i$ .         | <b>3)</b> $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$ .    |
| <b>2)</b> $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$ . | <b>4)</b> $\frac{iz + 1}{z - 3i} = 2 + i$ |

**51** ► **MÉTHODE 4** p. 239

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| <b>1)</b> $z^2 - 3z = 0$      | <b>3)</b> $z^2 + z + 1 = 0$    |
| <b>2)</b> $4z^2 - 4z + 5 = 0$ | <b>4)</b> $-2z^2 + 6z + 5 = 0$ |

**81** Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| <b>1)</b> $-2 + 2i$      | <b>5)</b> $3i$             |
| <b>2)</b> $1 - i$        | <b>6)</b> $3$              |
| <b>3)</b> $-3 - 3i$      | <b>7)</b> $-i$             |
| <b>4)</b> $\sqrt{3} + i$ | <b>8)</b> $2 + 2i\sqrt{3}$ |