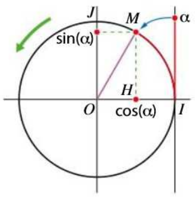
# C112 – Nombres complexes

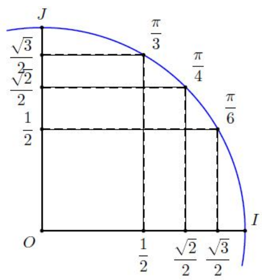
**Propriété 1: On considère un point $M(x;y)$ et $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$**

- $\cos\alpha = x = \dfrac{OH}{OM}$
- $\sin\alpha = x = \dfrac{HM}{OM}$




| valeur de $\alpha$ en radians | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |

On remarque la symétrie du tableau. Pour mémoriser ce tableau il suffit donc de se souvenir des 5 valeurs particulières présentes.




## 1. Approche algébrique : L'unité i

**Définition 1: Nombre complexe–forme algébrique**

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ tel que :

1) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et un élément i tel que $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$.
2) Tout nombre complexe s'écrit $\boxed{z = a + \mathrm{i}b}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

**Exercice 1:** Calculs immédiats Calculer et simplifier pour mettre sous la forme $a + \mathrm{i}b$ :

- $A = (3 + 5\mathrm{i}) - (2 - 4\mathrm{i}) = \dots$
- $B = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$
- $C = (1 + \mathrm{i})^2 = \dots$

**Exercice 2:** Calcul de $i^n$

- Calculer les valeurs de $i^2$, $i^3$, $i^4$, $i^5$ ...
- Sur Géogébra
  - placer un curseur $n$ allant de $-10$ à $10$ par pas de $1$
  - dans la partie calcul formel, taper $\mathrm{i}^n$. (Attention le i complexe se forme en appuyant sur `ALT` + `i`)
  - faire varier i et observer sa valeur
  - observer ce qu'il se passe dans la partie graphique

**Exercice 3:** Calculs complexes avec Géogébra Par défaut Géogébra cherche à convertir les nombres complexes sous forme algébrique. Tester le calcul formel et créant les nombres complexes suivants et observez la partie graphique.

$z_1 = (3 + 4\mathrm{i}) \times (4 - \mathrm{i})$ $\qquad z_2 = \frac{1-3\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$ $\qquad z_3 = (1 - \mathrm{i})^6$

**Propriété 2: Le nombre conjugué**

Le conjugué de $z = a + \mathrm{i}b$ est $\boxed{\overline{z} = a - \mathrm{i}b}$.

- **Méthode :** Pour calculer un quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$, on multiplie le haut et le bas par $\overline{z_2}$.

**Exercice 4:** Application

- Déterminer le nombre conjugué de $z = 4 - 3\mathrm{i}$
- Ecrire sous forme algébrique le nombre $\dfrac{3 - \mathrm{i}}{4 - 3\mathrm{i}}$
- Vérifier avec Géogébra

## 2. Approche géométrique

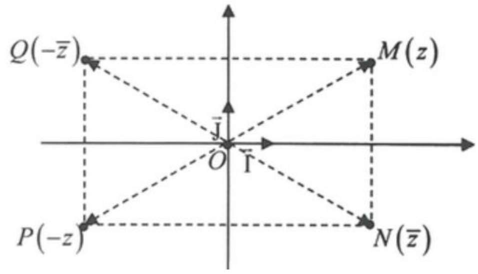
**Propriété 3: Nombres complexes et géométrie**

Au point $M(a;b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point $M$. On note

$$\boxed{M(a+ib)}$$

Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectifs $z_A$ et $z_B$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $\boxed{z_{AB} = z_B - z_A}$
- Le milieu $I$ de $[AB]$ a pour affixe $\boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$




**Exercice 5:** Nombres complexes et géométrie

- Sur Géogébra, placez le point $A$ d'affixe $z_A = 1 + 2\mathrm{i}$
- Placez le point $B$ d'affixe $\overline{z_A}$ et le point $C$ d'affixe $-z_A$.
- Quelle symétrie permet de passer de A à B? De A à C?

## 3. Résolutions d'équations

**Propriété 4: Résolution d'équations du premier degré dans $\mathbb{C}$**

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans $\mathbb{R}$:

1) Faire passer dans le membre de gauche tout ce qui dépend de $z$ et dans le membre de droite tout ce qui ne dépend pas de $z$.
2) Simplifier le membre de gauche et de droite
3) Isoler $z$ et répondre à la question

**Exercice 6:** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ : $3z - 6 = 4\mathrm{i} + z + 2$

**Propriété 5: Résolution d'équations du deuxième degré dans $\mathbb{C}$**

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans $\mathbb{R}$:

1) Mettre l'équation sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c)$ trois réels.
2) Calculer le **discriminant** $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$
   - Si le discriminant est positif alors il existe deux solutions réelles (éventuellement égales).

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

   - Si le discriminant est strictement négatif alors il existe deux solutions complexes conjuguées:

$$\boxed{z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

## 4. Formes trigonométrique et exponentielle

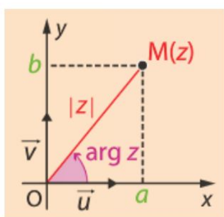
**Définition 2: Module et argument d'un nombre complexe**

Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le réel positif

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Un **argument** de $z$, noté $\arg(z)$ est une mesure exprimée en radian de l'angle

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM})$$



**Définition 3: Forme trigonométrique d'un nombre complexe**

Tout nombre complexe $z$ s'écrit sous la **forme algébrique** $z = a + ib$. On note $\theta = \arg(z)$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Tout nombre complexe peut donc s'écrire sous la **forme trigonométrique**:

$$\boxed{z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)}$$

**Méthode 1: Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique**

On considère un nombre complexe $z$ écrit sous forme algébrique $z = a + ib$

1) Calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
2) Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et trouver la valeur de $\theta$ respectant les deux conditions précédentes.
3) Ecrire $z = |z|\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$

**Exercice 7:** Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométriques

1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i} \times \frac{1}{2}$ 2) $z = -2 + 2\mathrm{i}$ 3) $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

**Méthode 2: Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique**

On considère un nombre complexe $z$ tel que l'on connait $|z|$ et un argument $\theta = \arg(z)$.

1) Calculer $a = |z|\cos\theta$
2) Calculer $b = |z|\sin\theta$
3) Ecrire $z = |z|\cos\theta + \mathrm{i}|z|\sin\theta$

**Exercice 8:** Ecrire les nombres complexes suivants sous forme arithmétique

1) $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$ 2) $|z| = \frac{1}{2}$ et $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$ 3) $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

**Propriété 6: Notation exponentielle (Euler)**

On écrit : $\boxed{z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

**Propriété 7: Propriétés de la forme exponentielle**

1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = 1$ 2) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 0$ 3) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 1$

4) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ 5) $\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ 6) $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$ 7) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$

**Exercice 9:** Ecriture sous forme exponentielle
Ecrire les nombres de l'exercice 7 sous forme exponentielle

## 5. Application aux circuits

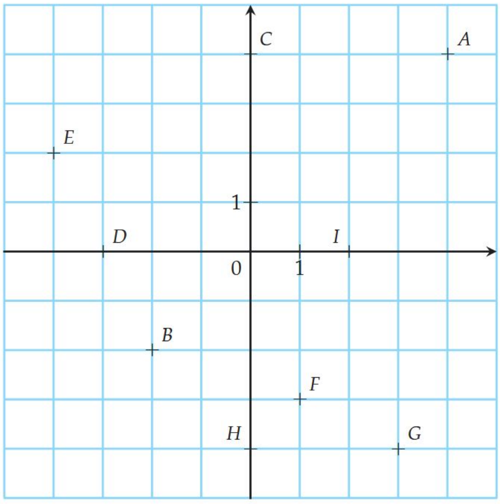
**Exercice 10:** Impédances complexes En électronique, on utilise les nombres complexes pour modéliser les composants :

- Résistance : $Z_R = R$
- Bobine : $Z_L = \mathrm{i}L\omega$

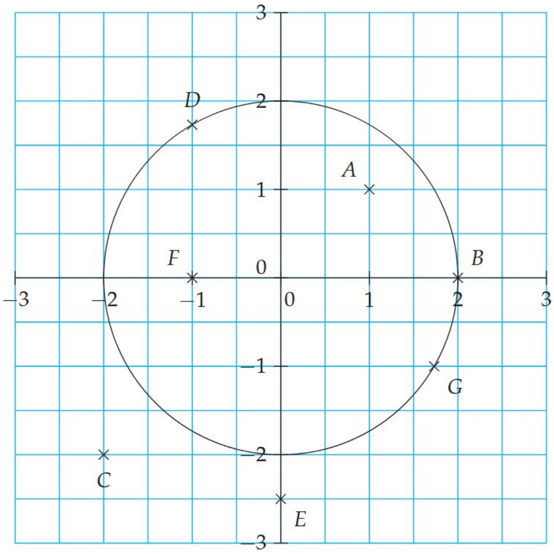
Calculer l'impédance totale $Z = Z_R + Z_L$ sous forme exponentielle pour $R = 10\Omega$ et $L\omega = 10\Omega$.

## 6. Exercices

**4** Déterminer les affixes des points repérés ci-dessous.




**5** Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Donner le module et un argument de leurs affixes.




**8** Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

**1)** $(2-4i)+(2-3i)$ **3)** $(3+3i)+(1-i)$

**2)** $(1-5i)+(2+i)$ **4)** $\left(2+\frac{1}{3}i\right)+\left(-3+\frac{4}{3}i\right)$

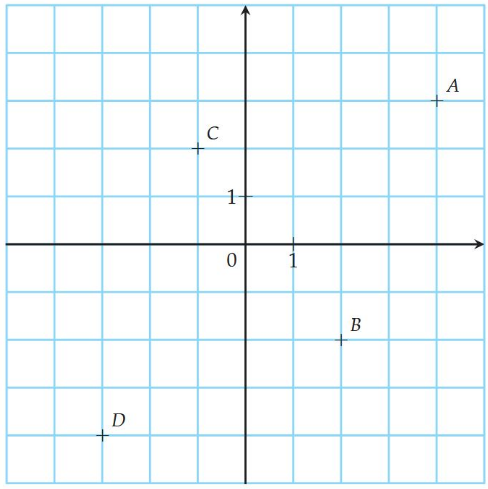
**11** ► MÉTHODE 1 p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

**1)** $2(1+2i)$ **3)** $2i(3-2i)$

**2)** $i(3+i)$ **4)** $(1+2i)(-2-2i)$

**20**




*Sans effectuer de calculs*

**1)** Lire l'affixe $z_A$ du point $A$.

**2)** Construire le point dont l'affixe est $\bar{z}_A$.

**3)** Construire le point dont l'affixe est $-z_A$.

**4)** Construire le point dont l'affixe est $z_A+2$.

**5)** Construire le point dont l'affixe est $z_A-i$.

**6)** Mêmes questions pour les points $B$, $C$ et $D$

**32** Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

**1)** $7-\left(3+\frac{5}{3}i\right)$ **3)** $\frac{3}{2}+3i+(1-i)$

**2)** $(3-5i)+\sqrt{2}$ **4)** $(5-i)\left(\sqrt{2}+3i\right)$

**45** ► MÉTHODE 3 p. 237

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

**1)** $(1+i)z=1-i$. **3)** $(2z+1-i)(iz+3)=0$.

**2)** $\frac{z+1}{z-1}=2i$. **4)** $\frac{iz+1}{z-3i}=2+i$

**51** ► MÉTHODE 4 p. 239

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

**1)** $z^2-3z=0$ **3)** $z^2+z+1=0$

**2)** $4z^2-4z+5=0$ **4)** $-2z^2+6z+5=0$

**81** Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

**1)** $-2+2i$ **5)** $3i$

**2)** $1-i$ **6)** $3$

**3)** $-3-3i$ **7)** $-i$

**4)** $\sqrt{3}+i$ **8)** $2+2i\sqrt{3}$