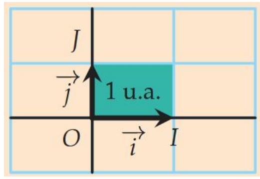
C16 – Intégration

Définition 1: Unité d'aire

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal du plan. On note I et J les points tels que $\vec{OI} = \vec{\imath}$ et $\vec{OJ} = \vec{\jmath}$.

L'**unité d'aire**, que l'on note `u.a.` est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.



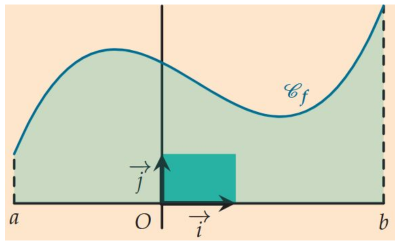
1. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 2: Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonale $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'**intégrale** de a à b de f est l'aire, exprimée en unité d'aires, du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

Cette aire se note $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$ et se lit "intrégrale de a à b de $f(x)$ dx"



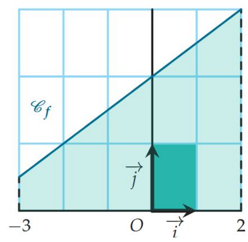
Remarque 1

- a et b sont les **bornes inférieures et supérieures** de l'intégrale. Par défaut $a \leq b$.
- x est une variable muette. Cette variable n'intervient pas dans le résultat final. On peut remplacer x par y, t...
- Pour tout fonction positive: $\int_a^a f(x)dx = 0$ (Aire d'un segment de hauteur $f(a)$)
- Le symbôle $\int$ est dû à G.W. Leibniz (1646–1716). Il ressemble à un "s" allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} + 2$. Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est:

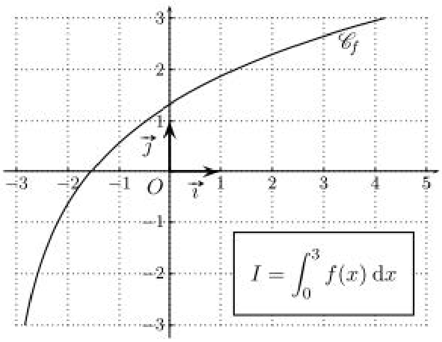
Les unités graphiques sont OI=0,6 cm et OJ=0,8 cm. Quelle est la valeur de l'aire coloriée?

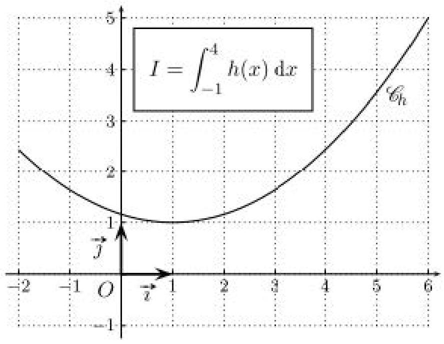


Exercice 1: Identification d'une aire à l'aide d'une intégrale

Dans chacune des situations, hachurer la partie du plan dont l'intégrale donne l'aire.

Donner un encadrement le plus précis possible pour la valeur de cette intégrale en `u.a`.





Propriété 1: Calcul d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Méthode 1: Calculer une intégrale

L'objectif est de calculer une intégrale du type $\int_a^b f(x)dx$

1. Identifier les valeurs de a et de b
2. S'assurer que la fonction est positive et continue sur $[a;b]$
3. Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle considéré.
4. Calculer $F(b)$ et $F(a)$
5. Calculer l'intégrale par $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx \qquad I_2 = \int_1^{e} \frac{1}{x} dx \qquad I_3 = \int_1^3 x(x^2+1)^2 dx$$

2. Intégration d'une fonction continue de signe quelconque

Propriété 2

Si la fonction f n'est pas positive sur tout l'intervalle $[a;b]$, alors on ne peut PLUS dire que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire sous la courbe représentative de la fonction f.

Exemple 2: Calculer $\int_{-1}^{2} (x^2-2)dx$ et conclure.

Propriété 3

- Pour tout fonction f continue sur $[a;b]$, on a

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

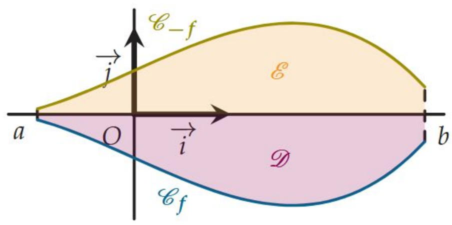
- **Linéarité de l'intégrale**:

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \qquad \int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$$

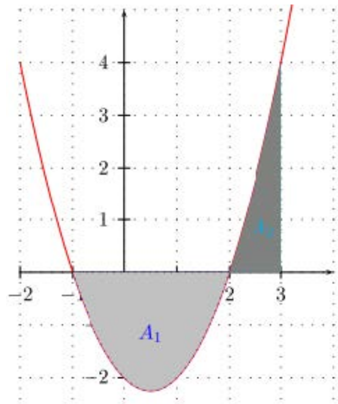
Propriété 4: Fonction négative et aire

Soit f une fonction continue est négative sur un intervalle $[a;b]$. Alors l'aire du domaine situé entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses sur $[a;b]$ est

$$A_{\mathcal{D}} = A_{\mathcal{E}} = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx$$



Exercice 3:



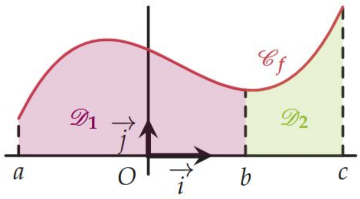
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 2$ et on note A l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 3$.

1. Etudier le signe de f sur $[-1; 3]$
2. Déterminer une primitive F de f
3. Déterminer la valeur de l'aire $A = A_1 + A_2$

Propriété 5: Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a; b et c trois réels appartenant à I. Alors:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

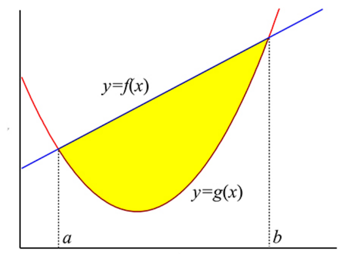


3. Aire entre deux courbes

Propriété 6: Aire entre deux courbes

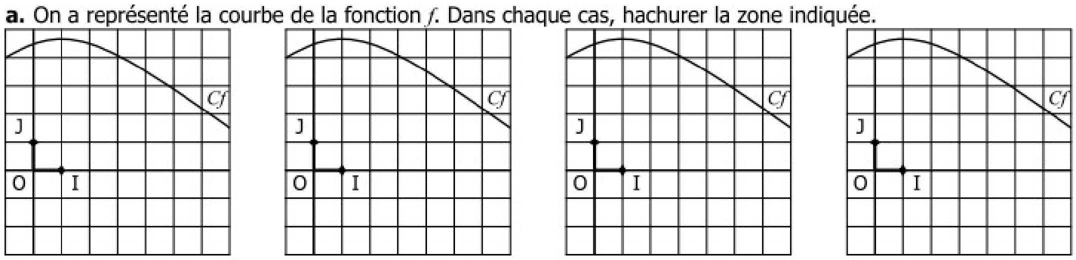
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ telles que sur cet intervalle, $f(x) \geq g(x)$. Alors l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[a; b]$ est donné par

$$\boxed{\int_a^b (f-g)(x)dx}$$



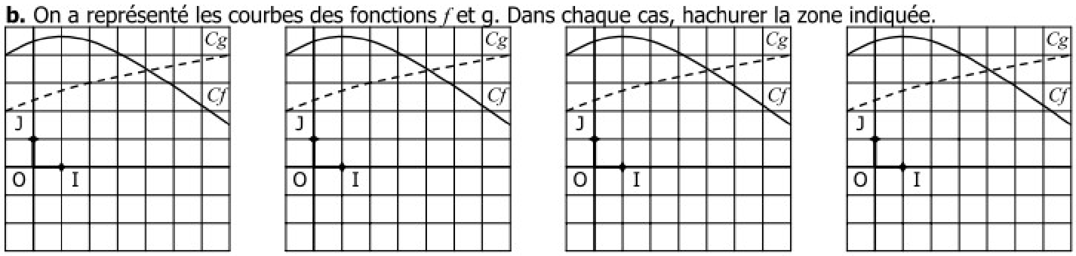
Exercice 4:

a. On a représenté la courbe de la fonction f. Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.



A = $\int_2^5 f(x)\,dx$	A = $\int_3^6 f(x)\,dx$	A = $\int_1^5 f(x) - 2\,dx$	A = $\int_0^3 f(x) - x\,dx$

b. On a représenté les courbes des fonctions f et g. Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.

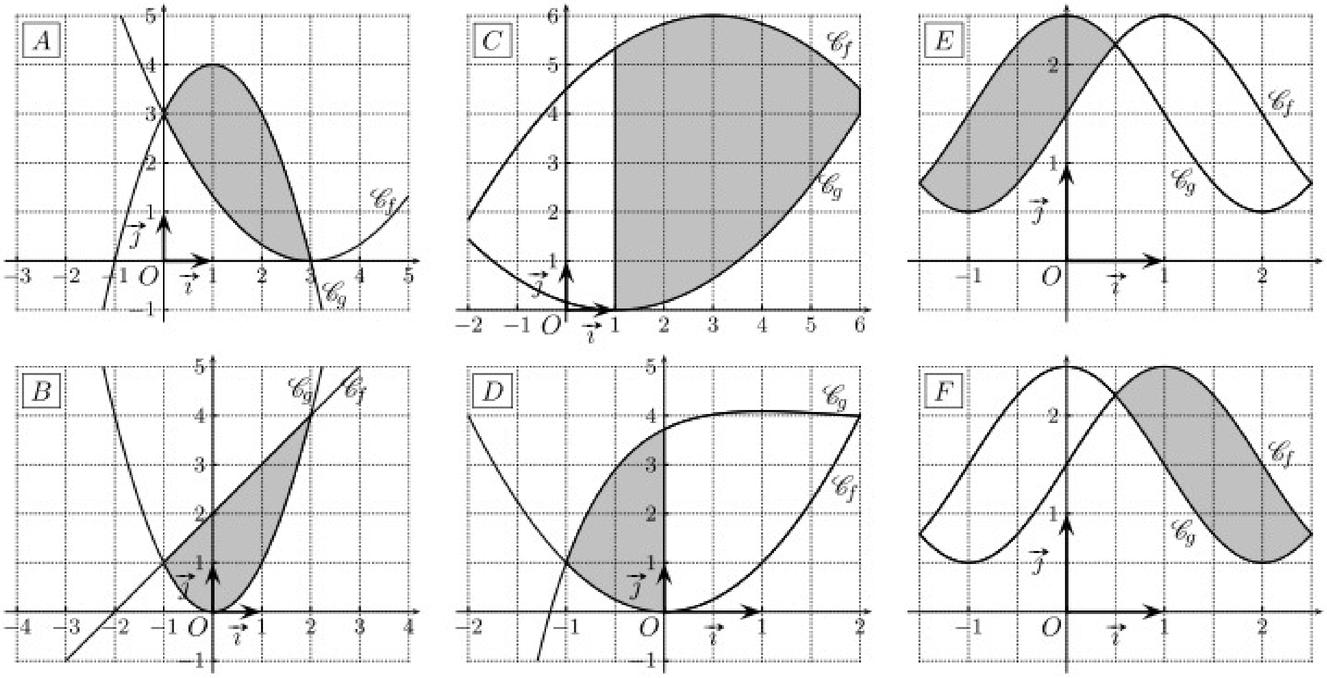


A = $\int_1^3 g(x)\,dx$	A = $\int_0^4 f(x) - g(x)\,dx$	A = $\int_5^7 g(x) - f(x)\,dx$	A = $\int_0^3 g(x) - x\,dx$

Exercice 5:

EXERCICE 7

Dans chacune des situations suivantes, écrire l'intégrale permettant de calculer l'aire du domaine coloré.



4. Valeur moyenne

Définition 3: Valeur moyenne

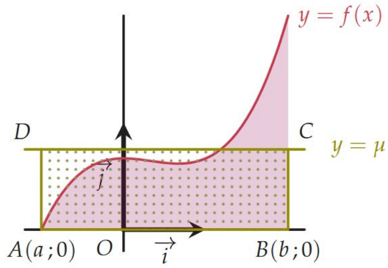
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt}$$

Remarque 2:

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a;b]$.
L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition:

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)dt$$



Exercice 6: Calculer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle considéré

1. $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$ sur $[1;3]$
2. $f(x) = x^3$ sur $[-3;3]$
3. $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $[2;3]$