

BTS11 – Primitives

Définition 1: Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f sur I , toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$

Exemple 1: Recherche de primitive de $f(x) = 2x + 1$

- La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \dots$ est une primitive de f car $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \dots$ est une primitive de f car $G'(x) = f(x)$.

Méthode 1: Montrer qu'une fonction F est une primitive de f

1. Dériver la fonction F .
2. Montrer que $F'(x) = f(x)$
3. Conclure

Exercice 1: Exercice d'application

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ est une primitive de $f(x) = x^2$.
2. Montrer que la fonction G définie par $G(x) = \frac{-3}{x^2} + 2$ est une primitive de $g(x) = \frac{6}{x^3}$.
3. Montrer que la fonction H définie par $H(x) = 2e^{-6x}$ est une primitive de $h(x) = -12e^{-6x}$.

Propriété 1: Primitives usuelles

1. Fonctions Usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Validité
a	$ax + k$	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + k$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	\mathbb{R}

2. Formes Composées

Forme de f	Primitive F
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + k$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + k$

Propriété 2: Non unicité des primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I

- Si F est une primitive de f alors f admet une **infinité** de primitives.
- Toute fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est également une primitive de f . ($k \in \mathbb{R}$)

Méthode 2: Recherche de toutes les primitives de f

1. trouver UNE primitive de f et la noter F
2. ajouter une constante $k \in \mathbb{R}$ pour trouver TOUTES les primitives de f et la noter G .

Exercice 2: Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes

1. $f(x) = 2x^3 + 3$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 1$
3. $f(x) = 4e^{2x}$

Propriété 3: Unicité de la primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels.

Il existe une **unique** primitive H de f vérifiant $H(a) = b$

Méthode 3: Déterminer LA primitive vérifiant une condition

1. Déterminer UNE primitive de la fonction f et la noter F . $F'(x) = f(x)$
2. Ajouter une constante k pour trouver TOUTES les primitives. $G(x) = F(x) + k$
3. Déterminer la valeur de la constante de manière à ce que $H(a) = F(a) + k = b$
4. Conclure en donnant l'expression de $H(x)$.

Exercice 3: Exercice d'application Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x + 1 + e^{-x}$

Déterminer la primitive H de f qui est telle que $H(0) = 4$.

Exercice 4: Déterminer la primitive H des fonctions suivantes qui respecte la condition donnée

- $f(x) = x^3 - 1$ et $H(3) = 0$
- $f(x) = \frac{2}{x}$ et $H(6) = 1$
- $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$ et $H(0) = 4$
- $f(x) = e^{1-2x}$ et $H(0) = 2$