BTS11 – Primitives

1. Primitive d'une fonction

Définition 1: Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $\boxed{F' = f}$

Exemple 1: Recherche de primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est une primitive de f car $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est une primitive de f car $G'(x) = f(x)$.

Méthode 1: Montrer qu'une fonction F est une primitive de f

1. Dériver la fonction F.
2. Montrer que $F'(x) = f(x)$
3. Conclure

Exercice 1: Exercice d'application

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ est une primitive de $f(x) = x^2$.
2. Montrer que la fonction G définie par $G(x) = \frac{-3}{x^2} + 2$ est une primitive de $g(x) = \frac{6}{x^3}$.
3. Montrer que la fonction H définie par $H(x) = 2\,\mathrm{e}^{-6x}$ est une primitive de $h(x) = -12\,\mathrm{e}^{-6x}$.

1. Fonctions Usuelles

Fonction $f(x)$	**Primitive** $F(x)$	**Validité**
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x} + k$	$]0; +\infty[$

2. Formes Composées

Forme de f	**Primitive** F
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u} + k$
$\dfrac{u'}{u^n} \ (n \geq 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + k$
$u'e^u$	$e^u + k$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + k$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + k$

Propriété 1: Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Fonction f	Une primitive F (sur I)
ku'(k réel)	ku
$u' + v'$	$u + v$
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$ c'est-à-dire : $\ln u$ si u strictement positive sur I $\ln(-u)$ si u strictement négative sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$

Propriété 2: Non unicité des primitives

Soit f une foncton définie et continue sur un intervalle I

- Si F est une primtive de f alors f admet une **infinité** de primitives.
- Toute fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est également une primitive de f. ($k \in \mathbb{R}$)

Méthode 2: Recherche de toutes les primitives

Pour trouver toutes les primitives de f, il suffit:

1. de trouver UNE primitive de f et la noter F
2. d'ajouter une constante $k \in \mathbb{R}$ pour trouver TOUTES les primitives de f et la noter G.

Exercice 2: Déterminer toutes les primitives des fonctions suivanes

1. $f(x) = 2x^3 + 3$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 1$
3. $f(x) = 4\,e^{2x}$

Propriété 3: Unicité de la primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels.

Il existe une **unique** primitive H de f vérifiant $H(a) = b$

Méthode 3: Déterminer LA primitive vérifiant une condition

1. Déterminer UNE primitive de la fonction f et la noter F. $F'(x) = f(x)$
2. Ajouter une constante k pour trouver TOUTES les primitive. $G(x) = F(x) + k$
3. Déterminer la valeur de la constante de manière à ce que $G(a) = F(a) + k = b$
4. Conclure en donnant l'expression de $H(x)$.

Exercice 3: Exercice d'application Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1 + e^{-x}$
Déterminer la primitive H de f qui est telle que $G(0) = 4$.

Exercice 4: Déterminer la primitive H des fonctions suivantes qui respecte la condition donnée

- $f(x) = x^3 - 1$ et $H(3) = 0$
- $f(x) = \frac{2}{x}$ et $H(6) = 1$
- $f(x) = 2x(x^2 + 1)^2$ et $H(0) = 4$
- $f(x) = \mathrm{e}^{1-2x}$ et $H(0) = 2$