Nom:	Prénom:	Note:

Exercice 1 ▶

1. Soit la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
   (a) Déterminer une primitive de la fonction f_1.

   ↪ ***Corrigé*** *Intégration terme à terme :*

   $$F_1(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C = x^3 + x^2 - x + C$$

   Une primitive : $\boxed{F_1(x) = x^3 + x^2 - x}$

   (b) Déterminer la primitive de la fonction f_1 qui vaut 6 en $x = 0$.

   ↪ ***Corrigé*** *Condition initiale :* $F_1(0) = 6$

   $$F_1(0) = 0 + 0 - 0 + C = C = 6$$

   Donc : $\boxed{F_1(x) = x^3 + x^2 - x + 6}$

2. $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$
   (a) Déterminer une primitive de la fonction f_2.

   ↪ ***Corrigé*** *Intégration terme à terme :*

   $$F_2(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$$

   Une primitive : $\boxed{F_2(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}}$

   (b) Déterminer la primitive de la fonction f_2 qui vaut 0 en $x = 1$.

   ↪ ***Corrigé*** *Condition initiale :* $F_2(1) = 0$

   $$F_2(1) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + C = 0$$

   Calcul du dénominateur commun : $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{3-8+30}{12} = \frac{25}{12}$
   Donc : $C = -\frac{25}{12}$

   Réponse : $\boxed{F_2(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \frac{25}{12}}$

Exercice 2 ▶

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Etudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$

   ↪ ***Corrigé*** $\mathrm{e}^{-x} > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *donc le signe de* f *dépend de* $(2x+1)$.
   $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

2. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ ***Corrigé*** $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$
Formule du produit : $f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (2x+1) \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}[2-(2x+1)]$
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-2x)$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
Maximum en $x = \frac{1}{2}$ *:* $f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}}$

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

$\hookrightarrow$ ***Corrigé*** *Point :* $f(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$ *donc* $(0,1)$
Pente : $f'(0) = \mathrm{e}^0(1-0) = 1$
Tangente : $y - 1 = 1(x-0)$
$\boxed{y = x+1}$

4. Montrer que $F(x) = -(2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

$\hookrightarrow$ ***Corrigé*** *Dériver* $F(x) = -(2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$ *:*
$F'(x) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-x} - (2x+3) \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}[-2+2x+3] = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$

5. Déterminer la primitive de la fonction f telle que $F(0) = 3$.

$\hookrightarrow$ ***Corrigé*** *Forme générale :* $F(x) = -(2x+3)\,\mathrm{e}^{-x} + C$
Condition : $F(0) = 3$
$F(0) = -(3)\,\mathrm{e}^0 + C = -3 + C = 3 \Rightarrow C = 6$
$\boxed{F(x) = -(2x+3)\,\mathrm{e}^{-x} + 6}$

Exercice 3 ▶

A faire uniquement si vous
- avez fini les exercices précédents
- avez compris parfaitement les exercices précédents

Propriété 1: Intégration par parties

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

avec
- u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I.
- le symbole $\int$ représentera pour le moment le fait de chercher une primitive d'une fonction.
- Ainsi par exemple $\int f(x)dx$ représente une primitive de la fonction f.

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

$\hookrightarrow$ ***Corrigé*** *Intégration par parties :* $u = x,\ dv = \mathrm{e}^x\,dx$
$du = dx,\ v = \mathrm{e}^x$
$\int x\,\mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(x-1) + C$
Une primitive : $\boxed{F(x) = \mathrm{e}^x(x-1)}$

2. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

↪ ***Corrigé*** *Intégration par parties :* $u = x$, $dv = \mathrm{e}^{-x}\,dx$
$du = dx$, $v = -\,\mathrm{e}^{-x}$
$\int x\,\mathrm{e}^{-x}\;dx = -x\,\mathrm{e}^{-x} - \int(-\,\mathrm{e}^{-x})\,dx = -x\,\mathrm{e}^{-x} + \int \mathrm{e}^{-x}\;dx$
$= -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -\,\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C$
Une primitive : $\boxed{F(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}(x+1)}$

3. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x\ln(x)$.

↪ ***Corrigé*** *Intégration par parties :* $u = \ln(x)$, $dv = x\,dx$
$du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$
$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$
Une primitive : $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{x^2}{4}}$

4. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$.

↪ ***Corrigé*** *Réécrire :* $\ln(x) = \ln(x)\cdot 1$
Intégration par parties : $u = \ln(x)$, $dv = 1\,dx$
$du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$
$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx$
$= x\ln(x) - x + C$
Une primitive : $\boxed{F(x) = x\ln(x) - x}$