

Nom:

Prénom:

Note:

Exercice 1 ►

1. Soit la fonction f_1 définie par $f_1(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

- (a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 .

→ *Corrigé Intégration terme à terme :*

$$F_1(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C = x^3 + x^2 - x + C$$

Une primitive : $F_1(x) = x^3 + x^2 - x$

- (b) Déterminer la primitive de la fonction f_1 qui vaut 6 en $x = 0$.

→ *Corrigé Condition initiale : $F_1(0) = 6$*

$$F_1(0) = 0 + 0 - 0 + C = C = 6$$

Donc : $F_1(x) = x^3 + x^2 - x + 6$

2. $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

- (a) Déterminer une primitive de la fonction f_2 .

→ *Corrigé Intégration terme à terme :*

$$F_2(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$$

Une primitive : $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}$

- (b) Déterminer la primitive de la fonction f_2 qui vaut 0 en $x = 1$.

→ *Corrigé Condition initiale : $F_2(1) = 0$*

$$F_2(1) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} + C = 0$$

Calcul du dénominateur commun : $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{3-8+30}{12} = \frac{25}{12}$
Donc : $C = -\frac{25}{12}$

Réponse : $F_2(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \frac{25}{12}$

Exercice 2 ►

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

1. Etudier le signe de la fonction f sur \mathbb{R}

→ *Corrigé $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le signe de f dépend de $(2x + 1)$.*

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

2. Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

↪ **Corrigé** $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

Formule du produit : $f'(x) = 2 \cdot e^{-x} + (2x + 1) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}[2 - (2x + 1)]$

$$f'(x) = e^{-x}(1 - 2x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Maximum en } x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

↪ **Corrigé Point** : $f(0) = 1 \cdot e^0 = 1$ donc $(0, 1)$

Pente : $f'(0) = e^0(1 - 0) = 1$

Tangente : $y - 1 = 1(x - 0)$

$$y = x + 1$$

4. Montrer que $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .

↪ **Corrigé Dériver** $F(x) = -(2x + 3)e^{-x}$:

$$F'(x) = -2 \cdot e^{-x} - (2x + 3) \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}[-2 + 2x + 3] = (2x + 1)e^{-x} = f(x)$$

5. Déterminer la primitive de la fonction f telle que $F(0) = 3$.

↪ **Corrigé Forme générale** : $F(x) = -(2x + 3)e^{-x} + C$

Condition : $F(0) = 3$

$$F(0) = -(3)e^0 + C = -3 + C = 3 \Rightarrow C = 6$$

$$F(x) = -(2x + 3)e^{-x} + 6$$

Exercice 3 ►

A faire uniquement si vous

- avez fini les exercices précédents
- avez compris parfaitement les exercices précédents

Propriété 1: Intégration par parties

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

avec

- u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I .
- le symbole \int représentera pour le moment le fait de chercher une primitive d'une fonction.
- Ainsi par exemple $\int f(x)dx$ représente une primitive de la fonction f .

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x e^x$.

↪ **Corrigé Intégration par parties** : $u = x$, $dv = e^x dx$

$$du = dx, v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1) + C$$

$$\text{Une primitive : } F(x) = e^x(x - 1)$$

2. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x e^{-x}$.

→ **Corrigé** Intégration par parties : $u = x$, $dv = e^{-x} dx$
 $du = dx$, $v = -e^{-x}$
 $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$
 $= -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x + 1) + C$
Une primitive : $F(x) = -e^{-x}(x + 1)$

3. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x \ln(x)$.

→ **Corrigé** Intégration par parties : $u = \ln(x)$, $dv = x dx$
 $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$
 $\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$
 $= \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$
Une primitive : $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}$

4. Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$.

→ **Corrigé** Réécrire : $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$
Intégration par parties : $u = \ln(x)$, $dv = 1 dx$
 $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$
 $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx$
 $= x \ln(x) - x + C$
Une primitive : $F(x) = x \ln(x) - x$