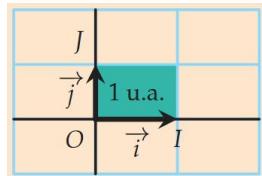


# C107 – Intégration

## Définition 1: Unité d'aire

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthogonal du plan. On note  $I$  et  $J$  les points tels que  $\vec{OI} = \vec{i}$  et  $\vec{OJ} = \vec{j}$ .

L'**unité d'aire**, que l'on note **u.a.** est l'aire du rectangle dont  $O$ ,  $I$  et  $J$  forment trois sommets.



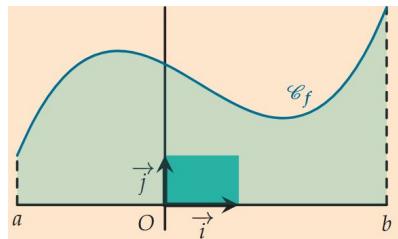
## 1. Intégrale d'une fonction continue et positive

### Définition 2: Notion d'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$  de courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

L'**intégrale** de  $a$  à  $b$  de  $f$  est l'aire, exprimée en unité d'aires, du domaine situé entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$

Cette aire se note  $\int_a^b f(x) dx$  et se lit "intrégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x)$   $dx$ "



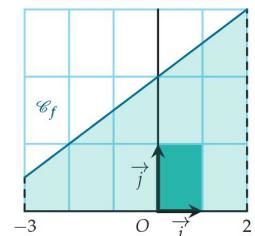
### Remarque 1

- $a$  et  $b$  sont les **bornes inférieures et supérieures** de l'intégrale. Par défaut  $a \leq b$ .
- $x$  est une variable muette. Cette variable n'intervient pas dans le résultat final. On peut remplacer  $x$  par  $y$ ,  $t$ ...
- Pour tout fonction positive:  $\int_a^a f(x) dx = 0$  (Aire d'un segment de hauteur  $f(a)$ )
- Le symbole  $\int$  est dû à G.W. Leibniz (1646–1716). Il ressemble à un "s" allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

### Exemple 1

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ . Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est:

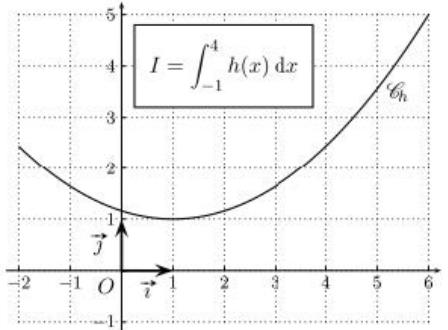
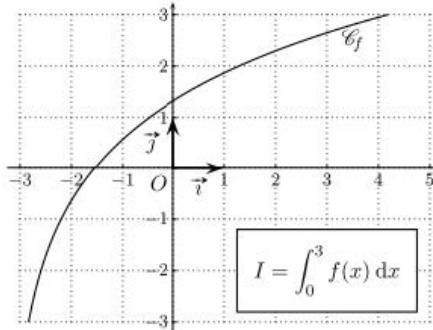
Les unités graphiques sont  $OI=0,6$  cm et  $OJ=0,8$  cm. Quelle est la valeur de l'aire coloriée?



### Exercice 1: Identification d'une aire à l'aide d'une intégrale

Dans chacune des situations, hachurer la partie du plan dont l'intégrale donne l'aire.

Donner un encadrement le plus précis possible pour la valeur de cette intégrale en u.a.



**Propriété 1: Calcul d'une intégrale**

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur cet intervalle, alors:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Méthode 1: Calculer une intégrale**

L'objectif est de calculer une intégrale du type  $\int_a^b f(x)dx$

1. Identifier les valeurs de  $a$  et de  $b$
2. S'assurer que la fonction est positive et continue sur  $[a; b]$
3. Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle considéré.
4. Calculer  $F(b)$  et  $F(a)$
5. Calculer l'intégrale par  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

**Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes**

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx$$

$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$I_3 = \int_1^3 x(x^2 + 1)^2 dx$$

**2. Intégration d'une fonction continue de signe quelconque****Propriété 2**

Si la fonction  $f$  n'est pas positive sur tout l'intervalle  $[a; b]$ , alors on ne peut PLUS dire que  $\int_a^b f(x)dx$  est l'aire sous la courbe représentative de la fonction  $f$ .

**Exemple 2: Calculer  $\int_{-1}^2 (x^2 - 2)dx$  et conclure.****Propriété 3**

- Pour tout fonction  $f$  continue sur  $[a; b]$ , on a

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

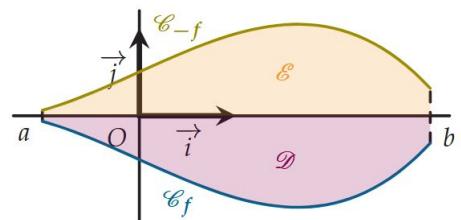
- Linéarité de l'intégrale:

$$\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \quad \int_a^b kf(t)dt = k \int_a^b f(t)dt$$

**Propriété 4: Fonction négative et aire**

Soit  $f$  une fonction continue est négative sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors l'aire du domaine situé entre  $\mathcal{C}_f$  et l'axe des abscisses sur  $[a; b]$  est

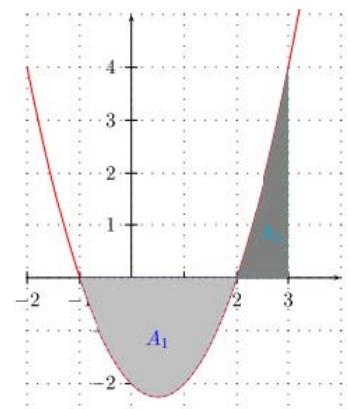
$$A_D = A_E = \int_a^b (-f(x))dx = - \int_a^b f(x)dx$$



Exercice 3:

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - x - 2$  et on note  $A$  l'aire du domaine compris entre la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites  $x = -1$  et  $x = 3$ .

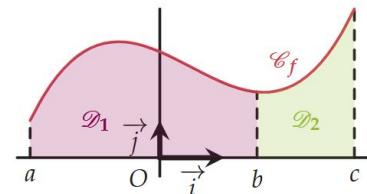
1. Etudier le signe de  $f$  sur  $[-1; 3]$
2. Déterminer une primitive  $F$  de  $f$
3. Déterminer la valeur de l'aire  $A = A_1 + A_2$



**Propriété 5: Relation de Chasles**

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a; b$  et  $c$  trois réels appartenant à  $I$ . Alors:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

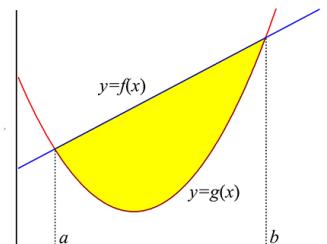


### 3. Aire entre deux courbes

**Propriété 6: Aire entre deux courbes**

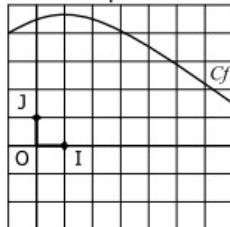
Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues et positives sur un intervalle  $[a; b]$  telles que sur cet intervalle,  $f(x) \geq g(x)$ . Alors l'aire du domaine compris entre les courbes  $C_f$  et  $C_g$  sur l'intervalle  $[a; b]$  est donné par

$$\int_a^b (f - g)(x)dx$$

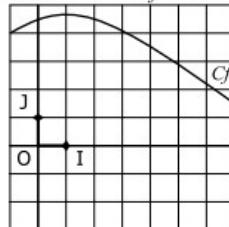


Exercice 4:

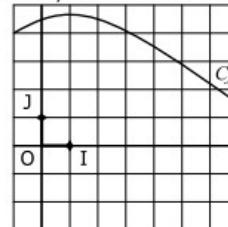
- a. On a représenté la courbe de la fonction  $f$ . Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.



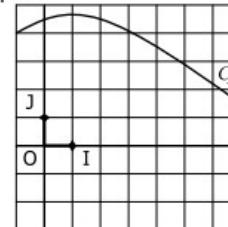
$$A = \int_2^5 f(x) dx$$



$$A = \int_3^6 f(x) dx$$

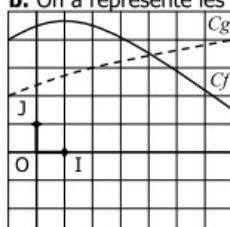


$$A = \int_1^5 f(x) - 2 dx$$

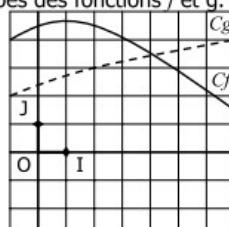


$$A = \int_0^3 f(x) - x dx$$

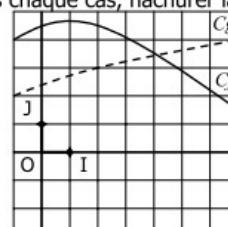
- b. On a représenté les courbes des fonctions  $f$  et  $g$ . Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.



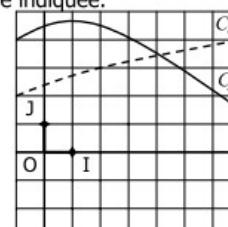
$$A = \int_1^3 g(x) dx$$



$$A = \int_0^4 f(x) - g(x) dx$$



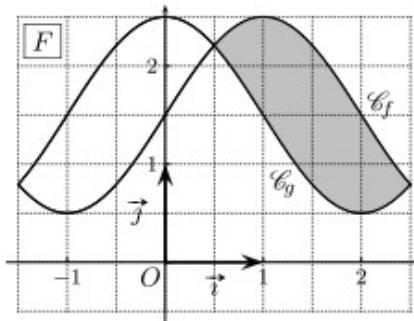
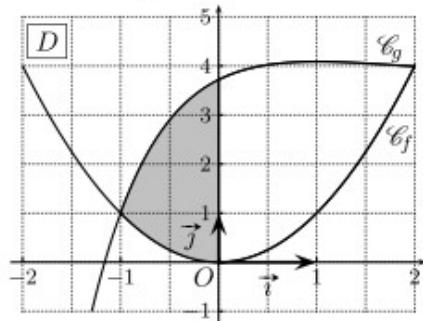
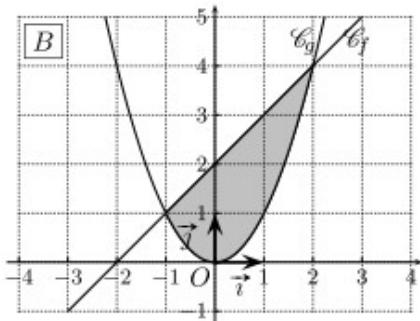
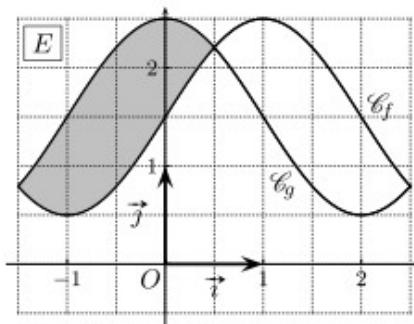
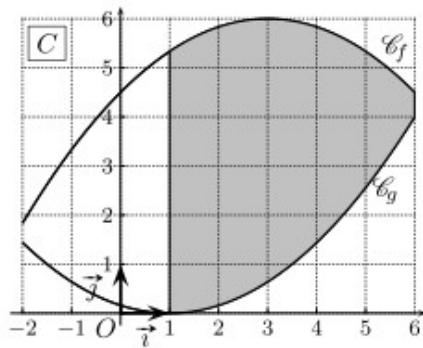
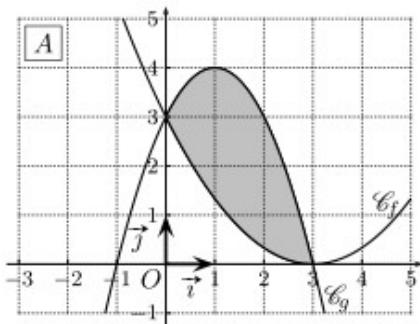
$$A = \int_5^7 g(x) - f(x) dx$$



$$A = \int_0^3 g(x) - x dx$$

**Exercice 5:****EXERCICE 7**

Dans chacune des situations suivantes, écrire l'intégrale permettant de calculer l'aire du domaine coloré.

**4. Valeur moyenne****Définition 3: Valeur moyenne**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ . La **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a; b]$  est le nombre  $\mu$  défini par:

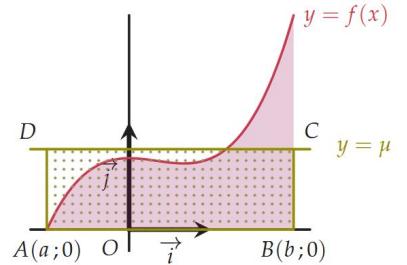
$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

**Remarque 2:**

Dans le cas où  $f$  est positive et continue sur  $[a; b]$ , la valeur moyenne de  $f$  entre  $a$  et  $b$  représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle  $[a; b]$ .

L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition:

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(t)dt$$

**Exercice 6:** Calculer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle considéré

1.  $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$  sur  $[1; 3]$
2.  $f(x) = x^3$  sur  $[-3; 3]$
3.  $f(x) = 2x e^{x^2}$  sur  $[2; 3]$