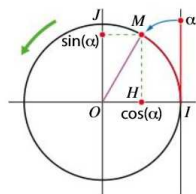


BTS10 – Nombres complexes

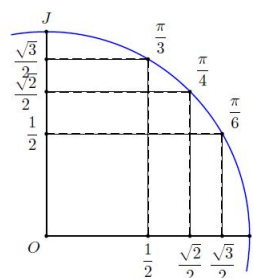
Propriété 1: On considère un point $M(x; y)$ et $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$

- $\cos \alpha = x = \frac{OH}{OM}$
- $\sin \alpha = y = \frac{HM}{OM}$



valeur de α en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

On remarque la symétrie du tableau. Pour mémoriser ce tableau il suffit donc de se souvenir des 5 valeurs particulières présentes.



1. Approche algébrique : L'unité i

Définition 1: Nombre complexe–forme algébrique

Il existe un ensemble \mathbb{C} tel que :

- \mathbb{C} contient \mathbb{R} et un élément i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Exercice 1: Calculs immédiats Calculer et simplifier pour mettre sous la forme $a + ib$:

- $A = (3 + 5i) - (2 - 4i) = \dots$
- $B = i(3 - 4i)$
- $C = (1 + i)^2 = \dots$

Exercice 2: Calcul de i^n

- Calculer les valeurs de $i^2, i^3, i^4, i^5 \dots$
- Sur Géogébra
 - placer un curseur n allant de -10 à 10 par pas de 1
 - dans la partie calcul formel, taper i^n . (Attention le i complexe se forme en appuyant sur ALT + i)
 - faire varier i et observer sa valeur
 - observer ce qu'il se passe dans la partie graphique

Exercice 3: Calculs complexes avec Géogébra Par défaut Géogébra cherche à convertir les nombres complexes sous forme algébrique. Tester le calcul formel et créant les nombres complexes suivants et observez la partie graphique.

$$z_1 = (3 + 4i) \times (4 - i)$$

$$z_2 = \frac{1-3i}{4-i}$$

$$z_3 = (1 - i)^6$$

Propriété 2: Le nombre conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

- Méthode :** Pour calculer un quotient $\frac{z_1}{z_2}$, on multiplie le haut et le bas par \bar{z}_2 .

Exercice 4: Application

- Déterminer le nombre conjugué de $z = 4 - 3i$
- Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{3 - i}{4 - 3i}$
- Vérifier avec Géogébra

2. Approche géométrique

Propriété 3: Nombres complexes et géométrie

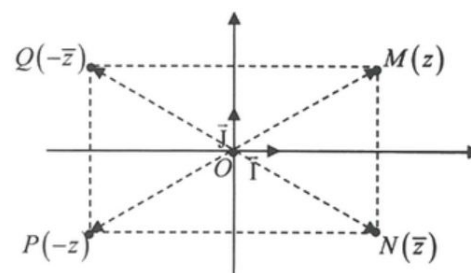
Au point $M(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M . On note

$$M(a + ib)$$

Soient A et B les points d'affixes respectifs z_A et z_B .

- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_{AB} = z_B - z_A$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$



Exercice 5: Nombres complexes et géométrie

- Sur Géogébra, placez le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$
- Placez le point B d'affixe $\overline{z_A}$ et le point C d'affixe $-z_A$.
- Quelle symétrie permet de passer de A à B ? De A à C ?

3. Résolutions d'équations

Propriété 4: Résolution d'équations du premier degré dans \mathbb{C}

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans \mathbb{R} :

- 1) Faire passer dans le membre de gauche tout ce qui dépend de z et dans le membre de droite tout ce qui ne dépend pas de z .
- 2) Simplifier le membre de gauche et de droite
- 3) Isoler z et répondre à la question

Exercice 6: Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E) : 3z - 6 = 4i + z + 2$

Propriété 5: Résolution d'équations du deuxième degré dans \mathbb{C}

Les résolutions respectent exactement le même protocole que dans \mathbb{R} :

- 1) Mettre l'équation sous la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec (a, b, c) trois réels.
- 2) Calculer le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si le discriminant est positif alors il existe deux solutions réelles (éventuellement égales).

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si le discriminant est strictement négatif alors il existe deux solutions complexes conjuguées:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

4. Formes trigonométrique et exponentielle

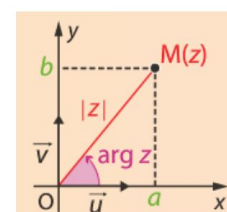
Définition 2: Module et argument d'un nombre complexe

Le **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Un **argument** de z , noté $\arg(z)$ est une mesure exprimée en radian de l'angle

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM})$$



Définition 3: Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit sous la **forme algébrique** $z = a + ib$. On note $\theta = \arg(z)$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

Tout nombre complexe peut donc s'écrire sous la **forme trigonométrique**:

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Méthode 1: Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

On considère un nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + ib$

- 1) Calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- 2) Calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$ et trouver la valeur de θ respectant les deux conditions précédentes.
- 3) Ecrire $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$


 **Exercice 7:** Ecrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométriques

- 1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}$
- 2) $z = -2 + 2i$
- 3) $z = 1 + i\sqrt{3}$

Méthode 2: Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

On considère un nombre complexe z tel que l'on connaît $|z|$ et un argument $\theta = \arg(z)$.

- 1) Calculer $a = |z| \cos \theta$
- 2) Calculer $b = |z| \sin \theta$
- 3) Ecrire $z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta$

 **Exercice 8:** Ecrire les nombres complexes suivants sous forme arithmétique


- 1) $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$
- 2) $|z| = \frac{1}{2}$ et $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$
- 3) $|z| = 3$ et $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$

Propriété 6: Notation exponentielle (Euler)


On écrit : $z = r e^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Propriété 7: Propriétés de la forme exponentielle

- 1) $e^{i \times 0} = 1$
- 2) $e^{i \frac{\pi}{2}} = i$
- 3) $e^{i\pi} = -1$
- 4) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- 5) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- 6) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- 7) $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

 **Exercice 9:** Ecriture sous forme exponentielle
Ecrire les nombres de l'exercice 7 sous forme exponentielle

5. Application aux circuits

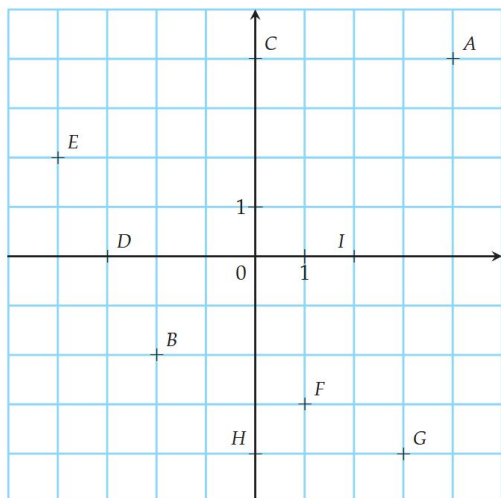
 **Exercice 10:** Impédances complexes En électronique, on utilise les nombres complexes pour modéliser les composants :

- Résistance : $Z_R = R$
- Bobine : $Z_L = iL\omega$

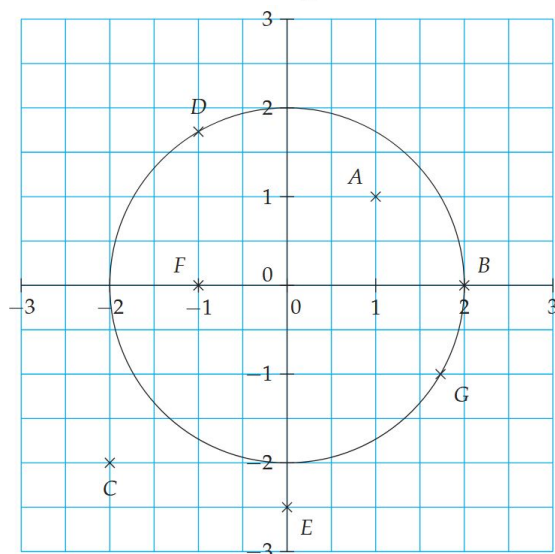
Calculer l'impédance totale $Z = Z_R + Z_L$ sous forme exponentielle pour $R = 10\Omega$ et $L\omega = 10\Omega$.

6. Exercices

4 Déterminer les affixes des points repérés ci-dessous.



5 Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2. Donner le module et un argument de leurs affixes.



8 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

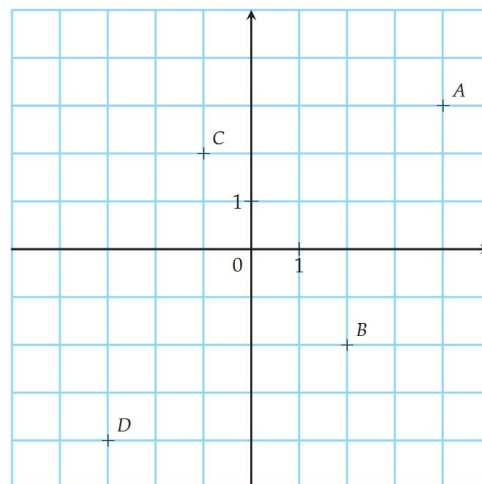
- | | |
|--------------------------|---|
| 1) $(2 - 4i) + (2 - 3i)$ | 3) $(3 + 3i) + (1 - i)$ |
| 2) $(1 - 5i) + (2 + i)$ | 4) $\left(2 + \frac{1}{3}i\right) + \left(-3 + \frac{4}{3}i\right)$ |

11 ► **MÉTHODE 1** p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

- | | |
|----------------|------------------------|
| 1) $2(1 + 2i)$ | 3) $2i(3 - 2i)$ |
| 2) $i(3 + i)$ | 4) $(1 + 2i)(-2 - 2i)$ |

20



Sans effectuer de calculs

- 1) Lire l'affixe z_A du point A.
- 2) Construire le point dont l'affixe est \bar{z}_A .
- 3) Construire le point dont l'affixe est $-z_A$.
- 4) Construire le point dont l'affixe est $z_A + 2$.
- 5) Construire le point dont l'affixe est $z_A - i$.
- 6) Mêmes questions pour les points B, C et D

32 Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1) $7 - \left(3 + \frac{5}{3}i\right)$ | 3) $\frac{3}{2} + 3i + (1 - i)$ |
| 2) $(3 - 5i) + \sqrt{2}$ | 4) $(5 - i)(\sqrt{2} + 3i)$ |

45 ► **MÉTHODE 3** p. 237

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| 1) $(1 + i)z = 1 - i$. | 3) $(2z + 1 - i)(iz + 3) = 0$. |
| 2) $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$. | 4) $\frac{iz + 1}{z - 3i} = 2 + i$ |

51 ► **MÉTHODE 4** p. 239

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $z^2 - 3z = 0$ | 3) $z^2 + z + 1 = 0$ |
| 2) $4z^2 - 4z + 5 = 0$ | 4) $-2z^2 + 6z + 5 = 0$ |

81 Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

- | | |
|-------------------|---------------------|
| 1) $-2 + 2i$ | 5) $3i$ |
| 2) $1 - i$ | 6) 3 |
| 3) $-3 - 3i$ | 7) $-i$ |
| 4) $\sqrt{3} + i$ | 8) $2 + 2i\sqrt{3}$ |