SAT-Solving und Anwendungen

Probabilistische Algorithmen für SAT

Prof. Dr. Wolfgang Küchlin
Rouven Walter, M.Sc. Informatik
Dr. Eray Gençay

Universität Tübingen

23. November 2017

SAT als Optimierungsproblem

SAT kann auch als Optimierungsproblem gesehen werden:

- Minimiere die Anzahl der unerfüllten Klauseln

Grundlegende Idee

- Rate eine Zufallsbelegung aller Variablen (vollständige Belegung)
- „Flippe“ wiederholt die Belegung einer Variablen um die Anzahl der unerfüllten Klauseln zu minimieren.

Beispiel

$F := \{\{a, b, \neg c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, c\}\}$

- Rate Belegung: $[a \mapsto \top, b \mapsto \bot, c \mapsto \top]$ (F nicht erfüllt)
- „Flippe“ Variable a auf $\bot$ (F weiterhin nicht erfüllt)
- „Flippe“ Variable b auf $\top$ (F ist jetzt erfüllt)

Eigentliche Optimierung: Welche Variablen werden am besten geflippt?

Lokale Suche vs. DPLL

Kriterium	DPLL	Stochastische (Lokale) Suche
Methode	Erweiterung partieller Variablenbelegungen	Optimierung totaler Variablenbelegungen
Vereinfachung	Unit-Propagation, Pure-Literal-Deletion	-
vollständig	ja	nein
Stärken	strukturierte (unerfüllbare) Instanzen (z.B. Verifikation)	erfüllbare Instanzen mit vielen Lösungen (z.B. Planungsprobleme)

Begrifflichkeiten

Betrachte Flip, der Belegung α in Belegung α' überführt

Breakcount

Anzahl Klauseln, die in α erfüllt, aber in α' unerfüllt sind

Makecount

Anzahl Klauseln, die in α unerfüllt, aber in α' erfüllt sind

Diffscore

Anzahl der unerfüllten Klauseln in α minus Anzahl unerfüllte Klauseln in α'

- Alle drei Werte werden für jede Variable nach jedem Flip aktualisiert

Beispiel für Variablenflips

Beispiel (Variablenflips)

$$F := \{\{a, b, \neg c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg d\}, \{a, c, d\}\}$$

Initiale Belegung: $\alpha = [a \mapsto \bot, b \mapsto \top, c \mapsto \bot, d \mapsto \top]$

- Flip von a: $\alpha' = [a \mapsto \top, b \mapsto \top, c \mapsto \bot, d \mapsto \top]$
  $\{\{a, b, \neg c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg d\}, \{a, c, d\}\}$
  Breakcount: 0 / Makecount: 0 / Diffscore : 0
- Flip von b: $\alpha' = [a \mapsto \bot, b \mapsto \bot, c \mapsto \bot, d \mapsto \top]$
  $\{\{a, b, \neg c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg d\}, \{a, c, d\}\}$
  Breakcount: 0 / Makecount: 2 / Diffscore : 2
- Flip von c: $\alpha' = [a \mapsto \bot, b \mapsto \top, c \mapsto \top, d \mapsto \top]$
  $\{\{a, b, \neg c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg d\}, \{a, c, d\}\}$
  Breakcount: 0 / Makecount: 1 / Diffscore : 1
- Flip von d: $\alpha' = [a \mapsto \bot, b \mapsto \top, c \mapsto \bot, d \mapsto \bot]$
  $\{\{a, b, \neg c\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg d\}, \{a, c, d\}\}$
  Breakcount: 1 / Makecount: 1 / Diffscore: 0

GSAT Algorithmus

Algorithmus

Algorithm 1: GSAT

for $i = 0$ **to** *MAX_TRIES* **do**
  α = random assignment to all variables;
  for $j = 0$ **to** *MAX_FLIPS* **do**
    if α *satisfies all clauses* **then**
      return true
    x = variable that produces the **highest diffscore**;
    flip x;
  return *Nothing*

- MAX_TRIES und MAX_FLIPS müssen so gewählt werden, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit sehr gering wird

WalkSAT

Variation von GSAT, Grundalgorithmus bleibt gleich, aber die zu flippende Variable wird anders ausgewählt

Variablenauswahl bei WalkSAT

- Selektiere zufällig eine unerfüllte Klausel C
- Wenn Variable mit breakcount 0 in C existiert, flippe diese um C zu erfüllen.
- Ansonsten:
  - mit Wahrscheinlichkeit p: wähle Zufallsvariable aus C
  - mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$: wähle Variable mit minimalem breakcount in C

- WalkSAT läuft meistens viel schneller als GSAT

Hammingkugel-Algorithmus

Idee: Mache die innere Schleife von GSAT deterministisch

- Systematisches Prüfen aller Belegungen in der „Nachbarschaft“ von α

Hammingdistanz zweier Belegungen

- Zwei Belegungen α, β
- Hammingdistanz: $d(\alpha, \beta) := |\{x | \alpha(x) \neq \beta(x)\}|$
- Anzahl der Variablen mit unterschiedlicher Belegung in α und β

Beispiel (Hammingdistanz)

$\alpha = (0, 1, 1, 0, 0), \beta = (1, 0, 1, 0, 1), \gamma = (1, 1, 1, 0, 0)$

- $d(\alpha, \beta) = 3, d(\alpha, \gamma) = 1, d(\beta, \gamma) = 2$

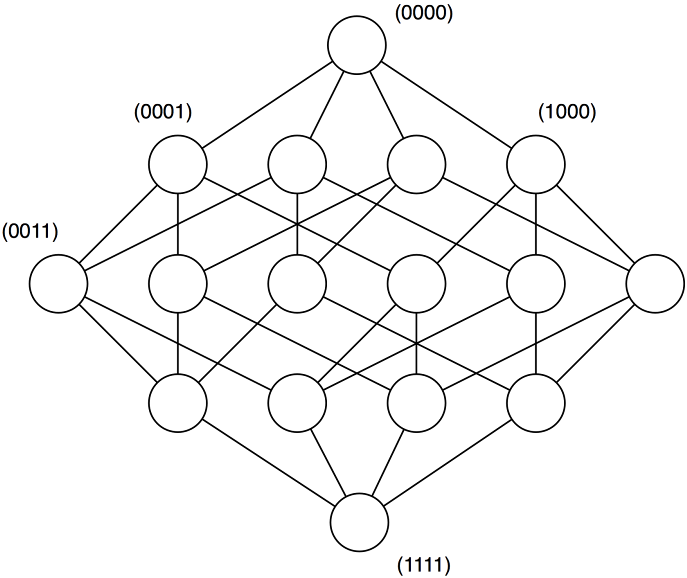
Hammingkugel

Hammingkugel vom Radius r um α:

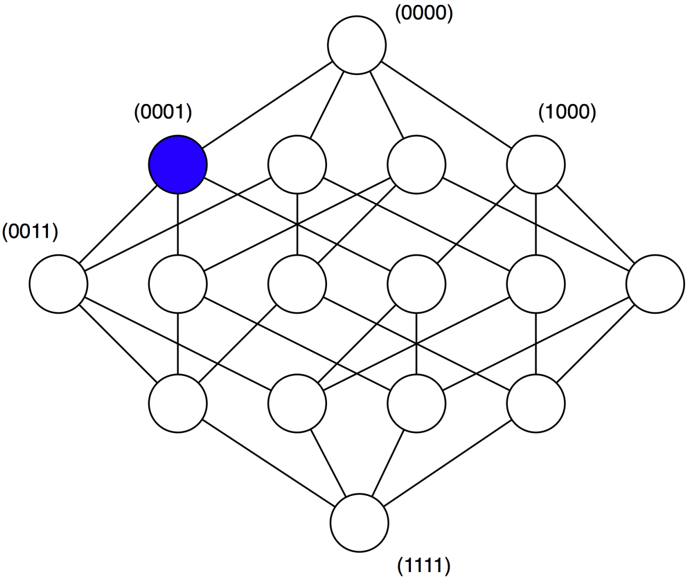
$$H(\alpha, r) := \{\alpha' | d(\alpha, \alpha') \leq r\}$$

Alle Belegungen α', die einen Hammingabstand $\leq r$ von α haben

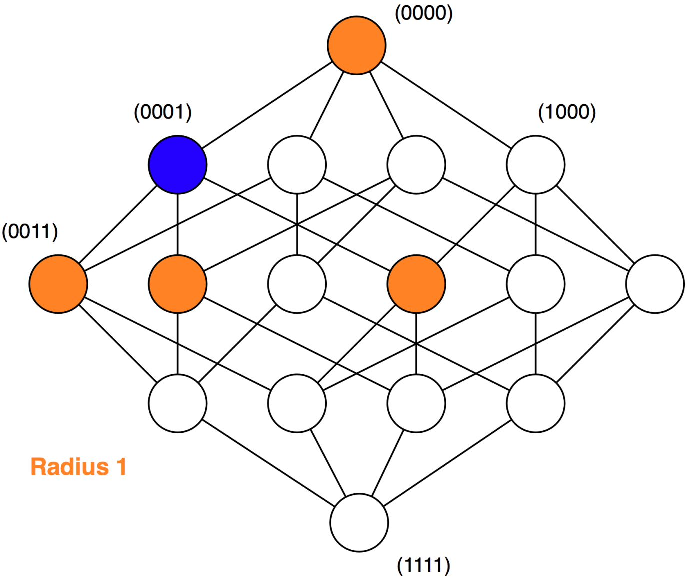
Hammingkugeln



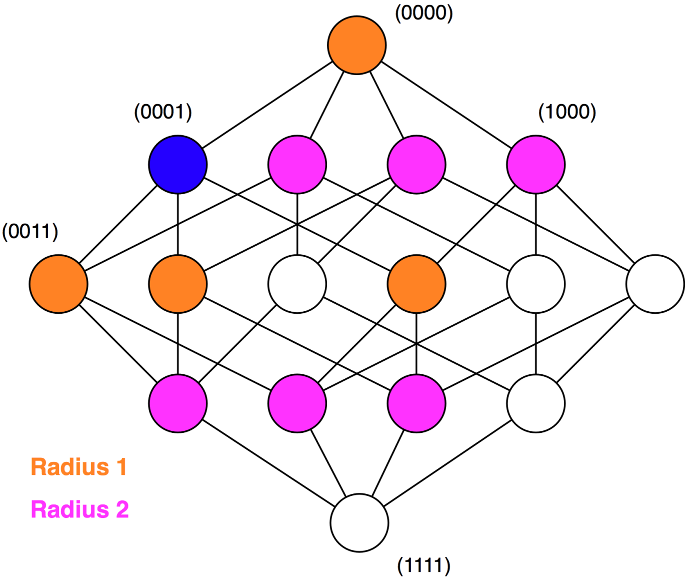
Hammingkugeln



Hammingkugeln



Hammingkugeln



Suchen in einer Hammingkugel

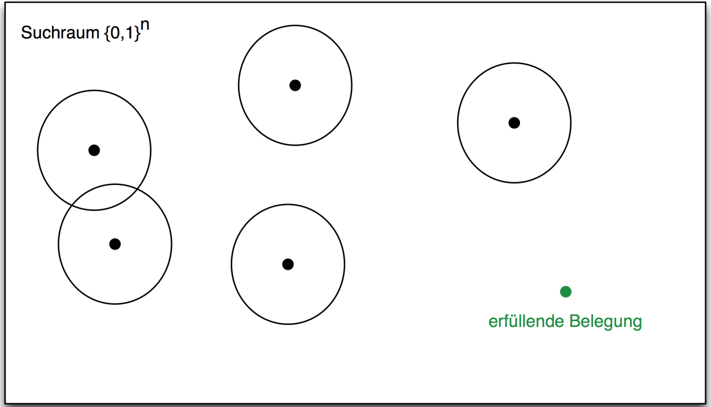
Algorithmus

Methode zum Durchsuchen einer Hammingkugel nach einer erfüllenden Belegung:

Algorithm 2: test(α,r)

if α *is a satisfying assignment* **then**
  return α
if $r = 0$ **then**
  return *Nothing*
choose unsatisfied clause $C = (x_1 \vee ... \vee x_n)$;
for $i = 1$ **to** n **do**
  $\alpha' = \alpha$ with flipped x_i;
  $\beta = \text{test}(\alpha', r - 1)$;
  if $\beta \neq$ *Nothing* **then**
    return β
return *Nothing*

Visualisierung des Algorithmus



- **Problem:** Passende Anzahl und Wahl der Anfangsbelegungen, so dass Wahrscheinlichkeit, dass keine Hammingkugel eine erfüllende Belegung überdeckt, vernachlässigbar wird.

Derandomisierung der Anfangsbelegungen

Idee: Wähle Anfangsbelegungen nicht zufällig, sondern nach bestimmtem Schema, um möglichst große Teile des Suchraums abzudecken
Verfahren: Überdeckungscodes

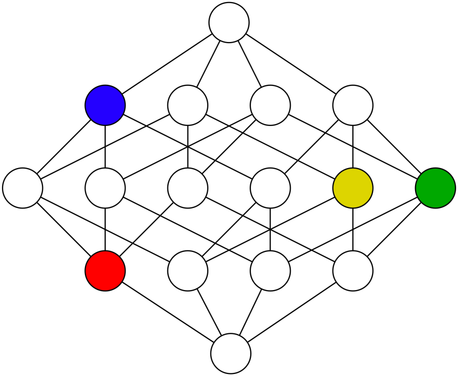
Überdeckungscode

Eine Menge B von Belegungen ist ein Überdeckungscode mit Radius r, falls für jede Belegung α gilt, dass es ein $\beta \in B$ gibt mit $\alpha \in H(\beta, r)$.

Folgerung: Wenn alle Belegungen $\beta \in B$ als Anfangsbelegungen getestet werden und jeweils eine Hammingkugel-Suche mit Radius r vollzogen wird, werden alle möglichen Belegungen getestet (möglicherweise sogar mehrmals wegen Überschneidungen).

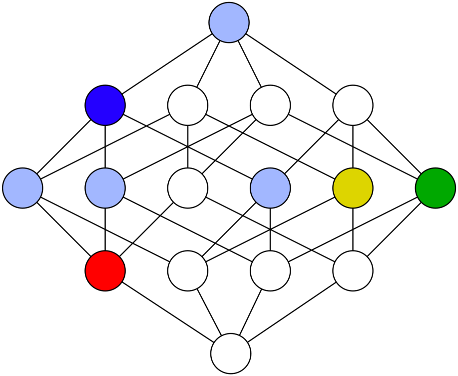
Überdeckungscodes - Beispiel 1

Überdeckungscode mit Radius 1:



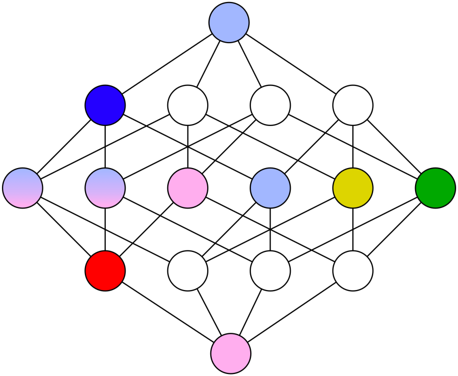
Überdeckungscodes - Beispiel 1

Überdeckungscode mit Radius 1:



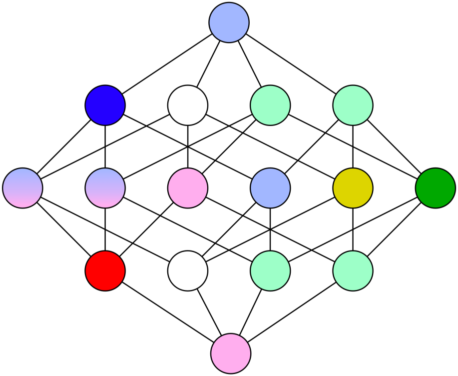
Überdeckungscodes - Beispiel 1

Überdeckungscode mit Radius 1:



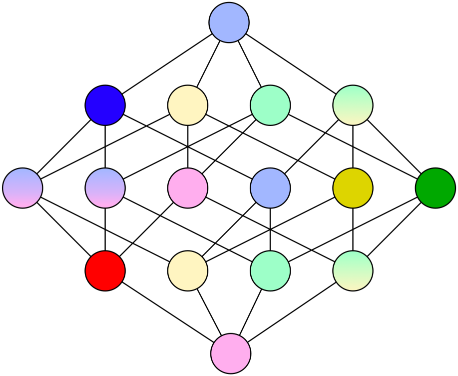
Überdeckungscodes - Beispiel 1

Überdeckungscode mit Radius 1:



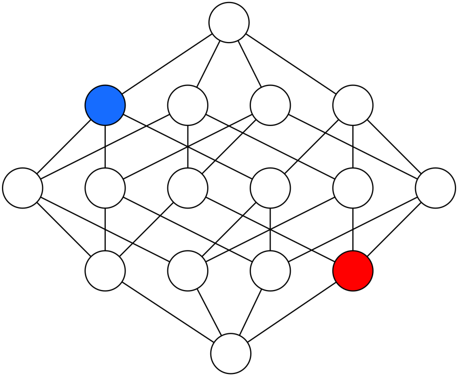
Überdeckungscodes - Beispiel 1

Überdeckungscode mit Radius 1:



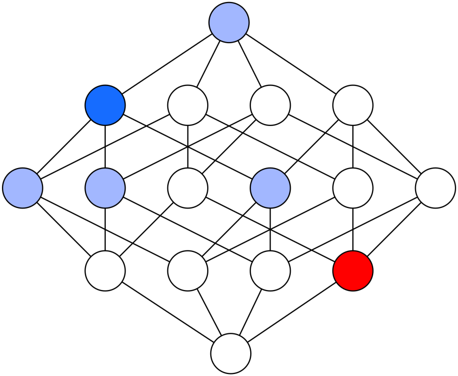
Überdeckungscodes - Beispiel 2

Überdeckungscode mit Radius 2:



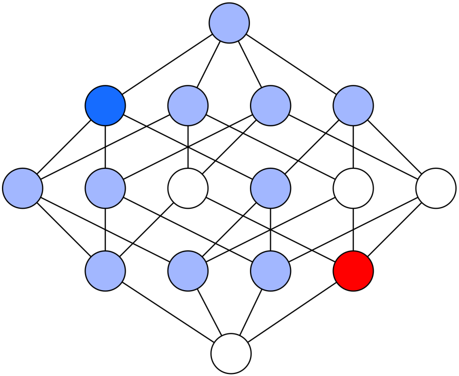
Überdeckungscodes - Beispiel 2

Überdeckungscode mit Radius 2:



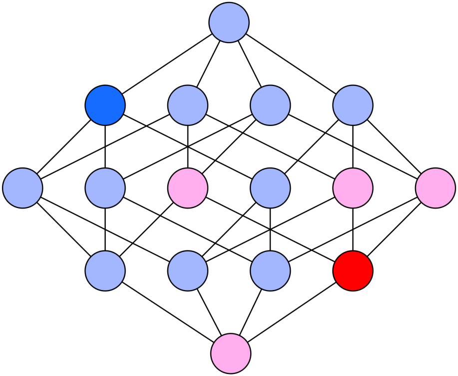
Überdeckungscodes - Beispiel 2

Überdeckungscode mit Radius 2:



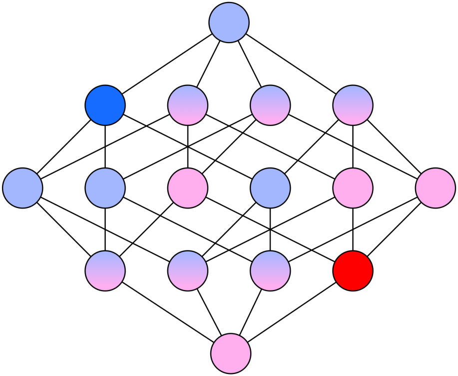
Überdeckungscodes - Beispiel 2

Überdeckungscode mit Radius 2:



Überdeckungscodes - Beispiel 2

Überdeckungscode mit Radius 2:



Berechnung von minimalen Überdeckungscodes

Kann zurückgeführt werden auf ein klassisches NP-vollständiges Problem (Karp, 1972): SET-COVER (Mengenüberdeckung)

SET-COVER als Entscheidungsproblem

Gibt es zu einer Menge U und n Teilmengen $S_j \subset U$ und einer natürlichen Zahl $k \leq n$ eine Vereinigung von k oder weniger Teilmengen S_j, so dass $\bigcup_{j=1}^{k} S_j = U$.

SET-COVER als Optimierungsproblem

Suche ein minimales k und zugehörige Teilmengen $S_j \subset U$, so dass $\bigcup_{j=1}^{k} S_j = U$.

Bemerkung: SET-COVER wird bei der Minimierung boolscher Ausdrücke (z.B. nach Quine-McCluskey) zur Auswahl einer minimalen Teilmenge von Prim-Implikanten verwendet, die äquivalent zum Ausdruck ist.

SET-COVER

Beispiel (SET-COVER)

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- 6 Teilmengen: $S_1 = \{1, 3, 5\}, S_2 = \{2, 4, 8\}, S_3 = \{1, 3, 4, 6\}, S_4 = \{7, 8\}, S_5 = \{3, 4, 6\}, S_6 = \{2, 6, 7\}$

Verschiedene Überdeckungen:

- $S_1 \cup S_2 \cup S_6$
- $S_1 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_6$
- $S_1 \cup S_2 \cup S_4 \cup S_5$

Analogie zu Überdeckungscodes:

- Menge U = Menge aller möglichen Belegungen α
- Teilmengen S_j = Alle Hammingkugeln vom Radius r
- Gesuchte minimale Teilmenge = Anfangsbelegungen des Algorithmus

Greedy Algorithmus zur Berechnung von SET-COVER

Algorithmus

1. Setze $B = \emptyset$
2. Solange es noch unüberdeckte Elemente in U gibt:
   1. Wähle ein S_j, das möglichst viele noch unüberdeckte Elemente aus U enthält
   2. $B = B \cup \{S_j\}$
3. Falls $\bigcup B = U$, so ist B die Lösung, ansonsten gibt es keine

Beispiel (Greedy Algorithmus)

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- 6 Teilmengen:
  $S_1 = \{1, 3, 5\}, S_2 = \{2, 4, 8\}, S_3 = \{1, 3, 4, 6\}, S_4 = \{7, 8\}, S_5 = \{3, 4, 6\}, S_6 = \{2, 6, 7\}$

1. Wähle S_3, dann bleibt noch: $\{2, 5, 7, 8\}$
2. Wähle S_4, dann bleibt noch: $\{2, 5\}$
3. Wähle S_1, dann bleibt noch: $\{2\}$
4. Wähle S_2, dann bleibt noch: $\emptyset$

$B = \{S_3, S_4, S_1, S_2\}$ (aber nicht optimal)

Zusammenfassung

GSAT Algorithmus

Algorithm 3: GSAT

```
for i = 0 to MAX_TRIES do
    α = random assignment to all variables;
    for j = 0 to MAX_FLIPS do
        if α satisfies all clauses then
            return true
        x = variable that produces the highest diffscore;
        flip x;
    return Nothing
```

- Ersetze innere Schleife durch Hammingkugel-Suche (deterministisch)
- Ersetze äußere Schleife durch Finden eines minimalen Überdeckungscodes mit Greedy Algorithmus (deterministisch)

→ Derandomisierter Algorithmus (nach Dantsin et al.), der beweisbare obere Schranke für 3-SAT von 1.481^n hat.