Corrigé de Banque PT 2021 – Épreuve A

Probabilités

1.(a) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\big((X_1=0),(X_1=1)\big)$:

$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbb{P}(X_2=1) = \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)}_{=\beta}\times\underbrace{\mathbb{P}(X_1=0)}_{=1-p_1} + \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)}_{=1-\alpha}\times\underbrace{\mathbb{P}(X_1=1)}_{=p_1} \\ &= \beta(1-p_1)+(1-\alpha)p_1 = \beta+(1-\alpha-\beta)p_1\,. \end{aligned}$$

1.(b) On fait de même avec le système complet d'événements $\big((X_n=0),(X_n=1)\big)$.

1.(c) On résout l'équation $x=\beta+(1-\alpha-\beta)x$, qui conduit à $x=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, et on en déduit que la suite $\big(p_n-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\big)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $1-\alpha-\beta$. Ainsi,

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*\,,\quad p_n=\frac{\beta}{\alpha+\beta}+(1-\alpha-\beta)^{n-1}\left(p_1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

1.(d) Puisque $\alpha\in\,]0,1[$ et $\beta\in\,]0,1]$, on a $0<\alpha+\beta<2$ donc $-1<1-\alpha-\beta<1$ et par conséquent, $p_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

2.(a) D'après l'énoncé, $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}(p_n)$ mais dans notre cas, d'après 1.(c), on a $p_2=p_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ donc $X_2\hookrightarrow\mathcal{B}\big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\big)$.

2.(b) On a, par exemple,

$$\mathbb{P}(X_2=1,X_1=0) = \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1|X_1=0)}_{=\beta}\times\underbrace{\mathbb{P}(X_1=0)}_{=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,,$$

et on fait de même pour les trois autres cas. On obtient les résultats ci-contre.

	$X_1=0$	$X_1=1$	Loi de X_2
$X_2=0$	$\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
$X_2=1$	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}$	$\frac{\beta}{\alpha+\beta}$
Loi de X_1	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\beta}{\alpha+\beta}$	1

2.(c) D'après le cours sur la loi de Bernoulli, $E(X_1)=E(X_2)=p_1=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ et $V(X_1)=V(X_2)=p_1(1-p_1)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$.

2.(d) La variable aléatoire X_1X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_1X_2=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}$, donc

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2) = \frac{(1-\alpha)\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}\,.$$

2.(e) Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors leur covariance est nulle, donc $\alpha+\beta=1$.

Réciproquement, si $\alpha+\beta=1$, alors le tableau de la question 2.(b) montre que $\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\mathbb{P}(X_1=i)\times\mathbb{P}(X_2=j)$ pour tout couple $(i,j)\in\{0,1\}^2$, donc X_1 et X_2 sont indépendantes.

Finalement, X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\alpha+\beta=1$.

3. On remarque que la variable aléatoire N n'est pas bien définie, puisque l'appareil peut ne jamais tomber en panne. On peut considérer dans ce cas que N prend la valeur 1 (par exemple), puisque cet événement se produit avec la probabilité 0 (événement presque impossible).

Les états successifs du système n'étant pas indépendants, on se rabat sur la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \forall\, n\geqslant 1\,,\quad \mathbb{P}(N-1=n) &= \mathbb{P}(N=n+1) = \mathbb{P}(X_1=1,\cdots,X_n=1,X_{n+1}=0) \\ &= \mathbb{P}(X_1=1)\times\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_n=1|X_1=\cdots=X_{n-1}=1)\times\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_1=\cdots=X_n=1) \\ &= \mathbb{P}(X_1=1)\times\mathbb{P}(X_2=1|X_1=1)\times\cdots\times\mathbb{P}(X_n=1|X_{n-1}=1)\times\mathbb{P}(X_{n+1}=0|X_n=1) \end{aligned}$$

car l'état du système ne dépend que de son état le jour précédent. Ainsi,

$$\forall\, n \geqslant 1\,, \quad \mathbb{P}(N-1=n) \;=\; 1 \times \underbrace{(1-\alpha)\times\cdots\times(1-\alpha)}_{n-1 \text{ termes}} \times \alpha \;=\; \alpha(1-\alpha)^{n-1}\,,$$

donc $N-1$ suit la loi géométrique de paramètre α.

4.(a) Notons $q = 1-p$. D'après le cours, $G_{Y_1}(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$ pour tout réel t tel que $|t| < \dfrac{1}{q}$.

4.(b) Puisque Y_1 et Y_2 sont indépendantes, on a

$$G_{Y_1+Y_2}(t) \;=\; G_{Y_1}(t)G_{Y_2}(t) \;=\; \frac{p^2t^2}{(1-qt)^2} \qquad \text{pour tout } t \text{ tel que } |t| < \frac{1}{q}\,.$$

4.(c) La variable Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

La fonction de répartition F_Z de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\; F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x)$. Or Z étant à valeurs entières, on a $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant n) = 1 - \mathbb{P}(Z > n)$ où on a noté n la partie entière de x, et c'est cette dernière probabilité qu'on calcule.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y_1 > n) \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 = k) \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \;=\; q^n\,,$$

et de plus, $(Z > n) = (Y_1 > n, Y_2 > n)$, donc

$$\mathbb{P}(Z > n) \;=\; \mathbb{P}(Y_1 > n, Y_2 > n) \underset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(Y_1 > n) \times \mathbb{P}(Y_2 > n) \;=\; q^{2n}\,.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z = n) \;=\; \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) \;=\; q^{2n-2} - q^{2n} \;=\; (1-q^2)\left(q^2\right)^{n-1}.$$

On a retrouvé l'évidence, à savoir que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

4.(d) La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On calcule cette fois, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T \leqslant n) \;=\; \mathbb{P}(Y_1 \leqslant n, Y_2 \leqslant n) \underset{\text{indep.}}{=} \mathbb{P}(Y_1 \leqslant n) \times \mathbb{P}(Y_2 \leqslant n) \;=\; (1-q^n)^2\,.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T = n) \;=\; \mathbb{P}(T \leqslant n) - \mathbb{P}(T \leqslant n-1) \;=\; (1-q^n)^2 - (1-q^{n-1})^2\,.$$

5. Si on note N_1 (resp. N_2) le numéro du jour où le premier (resp. le second) appareil tombe en panne pour la première fois (si ces jours existent), la première panne se produira au bout d'un nombre de jours égal à $Z = \min(N_1-1, N_2-1)$.

Or $N_1 - 1$ et $N_2 - 1$ suivent la loi géométrique de paramètre α (question 3) et sont indépendantes, donc (question 4.(c)) Z suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-\alpha)^2 = \alpha(2-\alpha)$.

Le nombre moyen de jours avant la première panne est donc $E(Z) = \dfrac{1}{\alpha(2-\alpha)}$.

Algèbre linéaire

Partie I

1.(a) La matrice B est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, g est diagonalisable dans une base orthonormée.

1.(b) On calcule le polynôme caractéristique de B :

$$\chi_B(X) \;=\; \det(XI_3 - B) \;=\; \begin{vmatrix} X-1 & 3 & 1 \\ 3 & X-3 & 3 \\ 1 & 3 & X-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 3 & 1 \\ 0 & X-3 & 3 \\ 2-X & 3 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= \;(X-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & X-3 & 3 \\ -1 & 3 & X-1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} (X-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & X-3 & 3 \\ 0 & 6 & X \end{vmatrix} \;=\; (X-2)(X-6)(X+3)\,.$$

Les valeurs propres de B sont -3, 2, et 6 toutes les trois simples, donc les espaces propres sont des droites. On détermine un vecteur propre pour chacune d'entre elles en formant les matrices

$$B + 3I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B - 6I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

On trouve sans peine une relation de liaison entre les colonnes de chacune de ces matrices, ce qui conduit à la base orthonormée (directe) de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de g :

$$(e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) \right),$$

où e_1, e_2, e_3 sont respectivement associés aux valeurs propres -3, 2 et 6.

1.(c) Pour $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ on a par linéarité de g, puis par récurrence,

$$g(x) = -3x_1e_1 + 2x_2e_2 + 6x_3e_3 \quad \text{et} \quad g^n(x) = (-3)^n x_1e_1 + 2^n x_2e_2 + 6^n x_3e_3 .$$

Les règles de calcul dans une base orthonormée permettent d'affirmer que

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad ; \quad \langle g(x), x \rangle = -3x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 \quad ; \quad \langle g^n(x), x \rangle = (-3)^n x_1^2 + 2^n x_2^2 + 6^n x_3^2 .$$

1.(d) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur non nul. Si $x_3 \neq 0$, alors $v_n(x) = \langle g^n(x), x \rangle \underset{+\infty}{\sim} 6^n x_3^2$. Si $x_3 = 0$ et $x_1 \neq 0$ alors $v_n(x) \underset{+\infty}{\sim} (-3)^n x_1^2$. Si enfin $x_3 = x_1 = 0$, alors $x_2 \neq 0$ (car x est supposé non nul) donc $v_n(x) \underset{+\infty}{\sim} 2^n x_2^2$. Dans les trois cas, $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est équivalente à une suite de termes tous non nuls, donc elle est non nulle à partir d'un certain rang.

1.(e) Lorsque $x_3 \neq 0$, on a $\dfrac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{6^n x_3^2}{6^{n-1}x_3^2} = 6$ donc $\dfrac{v_n(x)}{v_{n-1}(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 6$.

2.(a) D'après C, on a $h(e_1) = -3e_1$; $h(e_2) = 3e_2$ et $h(e_3) = 3e_3$ donc la matrice de h dans (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.(b) Pour $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ on a encore $h^n(x) = (-3)^n x_1e_1 + 3^n x_2e_2 + 3^n x_3e_3$.
On en déduit que $w_n(x) = \langle h^n(x), x \rangle = (-3)^n x_1^2 + 3^n x_2^2 + 3^n x_3^2$ et en particulier, $w_n(e_1) = (-3)^n$ et $w_n(e_2) = w_n(e_3) = 3^n$.
Les trois limites cherchées sont dont respectivement -3, 3 et 3 (les quotients sont constants).

2.(c) Supposons que $w_n(x) = 3^n\big((-1)^n x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\big)$ soit nul pour une certaine valeur de $n \in \mathbb{N}^*$.
Si n est pair cela conduit à $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$, et si n est impair on obtient $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$, ce qui englobe aussi le premier cas.
Réciproquement, si $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ on a $w_n(x) = 0$ pour tout entier n impair. En conclusion,

$$D = \left\{ x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3 ,\ x_1^2 \neq x_2^2 + x_3^2 \right\}.$$

2.(d) Prenons par exemple $x_0 = e_1 + 2e_2$ pour lequel $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 0$, donc $x_0 \in D$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^* ,\ w_n(x_0) = 3^n\big((-1)^n + 4\big)$ donc

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)} = 3\,\frac{(-1)^n + 4}{(-1)^{n-1} + 4} = \begin{cases} 5 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 9/5 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

donc la suite $\left(\dfrac{w_n(x_0)}{w_{n-1}(x_0)}\right)_{n\geqslant 2}$ diverge.

2.(e) Pour $x \in D$ et $n \geqslant 3$, on a $w_n(x) = 9\,w_{n-2}(x)$ donc le quotient est constant de valeur 9, et la limite cherchée est 9.

Partie II

1. On reprend les calculs de la partie I : pour $x \in \mathbb{R}^d$ décomposé dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_d)$ en $x = x_1e_1 + \cdots + x_de_d$, on a, d'après les règles de calcul en base orthonormée (et la linéarité de f),

$$\forall\, i \in [\![1, d]\!]\,,\ x_i = \langle\, x, e_i \,\rangle \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\ f^n(x) = \lambda_1^n x_1 e_1 + \cdots + \lambda_d^n x_d e_d \quad \text{et} \quad u_n(x) = \lambda_1^n x_1^2 + \cdots + \lambda_d^n x_d^2\,.$$

On montre que $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \lambda_d^n x_d^2$ (ce qui prouvera au passage que $x \in D$). En effet, on a $x_d \neq 0$ et $\lambda_d \neq 0$ par hypothèse, et

$$\frac{u_n(x)}{\lambda_d^n x_d^2} \;=\; \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_d}\right)^n \frac{x_1^2}{x_d^2} + \cdots + \left(\frac{\lambda_{d-1}}{\lambda_d}\right)^n \frac{x_{d-1}^2}{x_d^2} \;+\; 1\,.$$

Chacun des $d-1$ premiers termes tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_d}\right| \leqslant \left|\dfrac{\lambda_{d-1}}{\lambda_d}\right| < 1$, d'où l'équivalent annoncé.

Il s'ensuit, comme en I.1.(e), que $\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda_d^n x_d^2}{\lambda_d^{n-1} x_d^2} = \lambda_d$, donc $\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_d$.

2. Ici, $u_n(x)$ peut s'écrire $u_n(x) = \lambda_1^n x_1^2 + \cdots + \lambda_k^n x_k^2 + \lambda_d^n (x_{k+1}^2 + \cdots + x_d^2)$.
L'hypothèse $x_d \neq 0$ entraîne $x_{k+1}^2 + \cdots + x_d^2 \neq 0$, et les arguments de la preuve précédente restent valables à l'identique, pour aboutir à $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \lambda_d^n (x_{k+1}^2 + \cdots + x_d^2)$, et conclure à la même limite.

3. Considérons, à l'instar de la question I.2.(d), $x = e_{d-1} + 2e_d$. On a encore $u_n(x) = \lambda_d^n \big((-1)^n + 4\big)$, ce qui est non nul pour tout entier n (donc $x \in D$) et on sait d'avance que la suite $\left(\dfrac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)}\right)_{n \geqslant 2}$ diverge.

Partie III

1. Considérons $x = x_ke_k + \cdots + x_de_d \in F_k^*$. Puisque $(e_1, \ldots, e_d)$ est orthonormée, on a $\langle\, x, x \,\rangle = x_k^2 + \cdots + x_d^2 > 0$ et de même, $\langle\, f(x), x \,\rangle = \lambda_k x_k^2 + \cdots + \lambda_d x_d^2$. Or $\forall\, i \in [\![k, d]\!]$, $\lambda_i \geqslant \lambda_k$, donc

$$\langle\, f(x), x \,\rangle \;=\; \lambda_k x_k^2 + \cdots + \lambda_d x_d^2 \;\geqslant\; \lambda_k (x_k^2 + \cdots + x_d^2) \;=\; \lambda_k \,\langle\, x, x \,\rangle \qquad \text{donc} \qquad \frac{\langle\, f(x), x \,\rangle}{\langle\, x, x \,\rangle} \geqslant \lambda_k\,.$$

2. λ_k est un minorant de l'ensemble $\left\{\frac{\langle\, f(x), x \,\rangle}{\langle\, x, x \,\rangle}\,,\ x \in F_k^*\right\}$ d'après la question précédente, et de plus c'est un élément de cet ensemble, car $e_k \in F_k^*$ et $f(e_k) = \lambda_k e_k$ donc $\frac{\langle\, f(e_k), e_k \,\rangle}{\langle\, e_k, e_k \,\rangle} = \lambda_k$. On en déduit que λ_k est le minimum de cet ensemble.

3. De même, pour tout $x = x_1e_1 + \cdots + x_ke_k \in E_k^*$ on a

$$\langle\, f(x), x \,\rangle \;=\; \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 \;\leqslant\; \lambda_k (x_1^2 + \cdots + x_k^2) \;=\; \lambda_k \,\langle\, x, x \,\rangle \qquad \text{donc} \qquad \frac{\langle\, f(x), x \,\rangle}{\langle\, x, x \,\rangle} \leqslant \lambda_k\,,$$

et l'égalité est atteinte pour $x = e_k \in E_k^*$, donc $\lambda_k = \max\limits_{x \in E_k^*} \dfrac{\langle\, f(x), x \,\rangle}{\langle\, x, x \,\rangle}$.

4.(a) Soit $V \in \mathcal{V}_k$. D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(V + F_k) \;=\; \dim(V) + \dim(F_k) - \dim(V \cap F_k)\,.$$

Or $\dim(V) = k$, $\dim(F_k) = d - k + 1$ et $\dim(V + F_k) \leqslant \dim(\mathbb{R}^d) = d$, donc $k + d - k + 1 - \dim(V \cap F_k) \leqslant d$, c'est-à-dire $\dim(V \cap F_k) \geqslant 1$, et donc $V \cap F_k \neq \{0\}$.

4.(b) Soit $V \in \mathcal{V}_k$. Envisageons $x \in V \cap F_k$ un vecteur non nul, ce qui est possible d'après la question précédente.
D'après la question 1, on a $\frac{\langle\, f(x), x \,\rangle}{\langle\, x, x \,\rangle} \geqslant \lambda_k$ car $x \in F_k^*$, et puisque $x \in V^*$, ça implique que $\max\limits_{x \in V^*} \frac{\langle\, f(x), x \,\rangle}{\langle\, x, x \,\rangle} \geqslant \lambda_k$.

4.(c) On vient de prouver que λ_k est un minorant de l'ensemble $\left\{\max\limits_{x\in V^*}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\,,\ V\in\mathcal{V}_k\right\}$ et on a vu à la question 3 qu'il y a égalité avec le sous-espace vectoriel $V=E_k\in\mathcal{V}_k$. Ainsi, λ_k est l'élément minimum de cet ensemble.

4.(d) Soit $V\in\mathcal{V}_{d-k+1}$. On a $V\cap E_k\neq\{0\}$ d'après la formule de Grassmann comme en 4.(a).
Choisissons $x\neq 0$ dans $V\cap E_k$, alors $\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\leqslant\lambda_k$ comme c'est démontré à la question 3, donc $\min\limits_{x\in V^*}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\leqslant\lambda_k$.

C'est vrai pour tout $V\in\mathcal{V}_{d-k+1}$, donc $\sup\limits_{V\in\mathcal{V}_{d-k+1}}\left[\min\limits_{x\in V^*}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\right]\leqslant\lambda_k$.

Enfin, avec $V=F_k\in\mathcal{V}_{d-k+1}$, on a vu (en 2.) qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente, donc $\lambda_k=\max\limits_{V\in\mathcal{V}_{d-k+1}}\left[\min\limits_{x\in V^*}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\right]$, ce qui achève cette démonstration du *théorème min-max de Courant-Fischer.*

5.(a) On a $A'\in\mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ d'après les tailles de A, Q et Q^T, et de plus

$$(A')^T\ =\ (Q^T\cdot A\cdot Q)^T\ =\ Q^T\cdot A^T\cdot(Q^T)^T\ \underset{A^T=A}{=}\ Q^T\cdot A\cdot Q\ =\ A',$$

donc A' est symétrique.

5.(b) i. La base canonique de $\mathbb{R}^{d-1}$ étant orthonormée pour le produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$, on a $\langle x,y\rangle=X^T\cdot Y$.

5.(b) ii. La matrice colonne représentant $q(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est $Q\cdot X$, et de même pour Y, donc par associativité du produit matriciel,

$$\langle q(x),q(y)\rangle\ =\ (Q\cdot X)^T\cdot(Q\cdot Y)\ =\ (X^T\cdot Q^T)\cdot(Q\cdot Y)\ =\ X^T\cdot(\underbrace{Q^T\cdot Q}_{=I_{d-1}})\cdot Y\ =\ X^T\cdot Y\ =\ \langle x,y\rangle\ .$$

5.(b) iii. Soit $k\in[\![1,d-1]\!]$. La famille $\big(q(e'_1),\ldots,q(e'_k)\big)$ est une famille génératrice de $q(E'_k)$. De plus,

$$\forall\,(i,j)\in[\![1,k]\!]\,,\quad \big\langle\, q(e'_i),q(e'_j)\,\big\rangle\ \underset{\text{ii.}}{=}\ \big\langle\, e'_i,e'_j\,\big\rangle\ =\ \delta_{i,j}\,,$$

car $(e'_1,\ldots,e'_k)$ est une famille orthonormée. Ceci montre que la famille $\big(q(e'_1),\ldots,q(e'_k)\big)$ est orthonormée, donc libre.
On en déduit que c'est une base de $q(E'_k)$, donc $\dim q(E'_k)=k$.

Remarque – on pouvait justifier que q établit un isomorphisme de E'_k sur $q(E'_k)$: surjective par définition de l'image et injective car $q(x)=0\Rightarrow||q(x)||=0\underset{\text{ii.}}{\Rightarrow}||x||=0\Rightarrow x=0$.

5.(c) Soit $z\in q(E'_k)$ et $x\in E'_k$ tel que $z=q(x)$. On note Z (resp. X) la matrice colonne représentative de z (resp. de x) dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ (resp. de $\mathbb{R}^{d-1}$). On a alors

$$\begin{aligned}\langle f(z),z\rangle\ &=\ \big\langle f\big(q(x)\big),q(x)\big\rangle\ =\ (A\cdot Q\cdot X)^T\cdot(Q\cdot X)\ \underset{A^T=A}{=}\ X^T\cdot\underbrace{Q^T\cdot A\cdot Q}_{=A'}\cdot X\ \underset{(A')^T=A'}{=}\ (A'\cdot X)^T\cdot X\\ &=\ \langle f'(x),x\rangle\ .\end{aligned}$$

On a aussi, d'après la question 5.(b).ii appliquée avec $y=x$, $\langle z,z\rangle=\langle x,x\rangle$. Puisque q est une bijection de ${E'_k}^*$ sur $q(E'_k)^*$, on en déduit que

$$\left\{\frac{\langle f(z),z\rangle}{\langle z,z\rangle}\,,\ z\in q(E'_k)^*\right\}\ =\ \left\{\frac{\langle f'(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\,,\ x\in {E'_k}^*\right\}.$$

D'après le résultat de la question 3 appliquée à l'endomorphisme f', l'ensemble de droite admet pour maximum λ'_k, donc

$$\lambda'_k\ =\ \max_{z\in q(E'_k)^*}\frac{\langle f(z),z\rangle}{\langle z,z\rangle}\,.$$

5.(d) Puisque $q(E'_k)$ est de dimension k (question 5.(b).iii), la question précédente montre que λ'_k appartient à l'ensemble

$$\left\{\max_{x\in V^*}\frac{\langle f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}\,,\ V\in\mathcal{V}_k\right\},$$

dont on sait d'après la question 4.(c) que son minimum est λ_k. Ainsi, $\lambda'_k \geqslant \lambda_k$.

5.(e) Considérons maintenant $F'_k = \mathrm{Vect}(e'_k, \dots, e'_{d-1})$. On a encore $\dim q(F'_k) = \dim F'_k = d-k$ et par les mêmes arguments qu'en 5.(c),

$$\left\{ \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle}, \, z \in q(F'_k)^* \right\} \; = \; \left\{ \frac{\langle f'(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}, \, x \in {F'_k}^* \right\} .$$

D'après la question 2 appliquée à l'endomorphisme f', l'ensemble de droite admet pour minmum λ'_k, donc

$$\lambda'_k \; = \; \min_{z \in q(F'_k)^*} \frac{\langle f(z), z \rangle}{\langle z, z \rangle} .$$

Puisque $q(F'_k)$ est de dimension $d-k$, on en déduit que

$$\lambda'_k \in \left\{ \min_{x \in V^*} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}, \, V \in \mathcal{V}_{d-k} \right\} ,$$

ensemble dont on sait d'après la question 4.(d) que son maximum est λ_{k+1}. Ainsi, $\lambda'_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

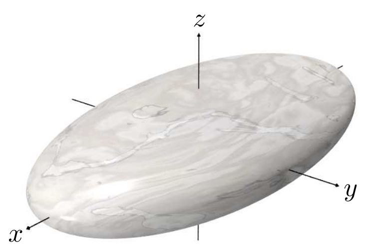
Remarques

— L'énoncé demandait une preuve analogue mais on pouvait ruser et appliquer le résultat de la question précédente aux matrices $-A$ et $-A' = Q^T \cdot (-A) \cdot Q$ dont les valeurs propres sont $-\lambda_d \leqslant \cdots \leqslant -\lambda_1$ et $-\lambda'_{d-1} \leqslant \cdots \leqslant -\lambda'_1$ ce qui donnait immédiatement le résultat $-\lambda'_k \geqslant -\lambda_{k+1}$.

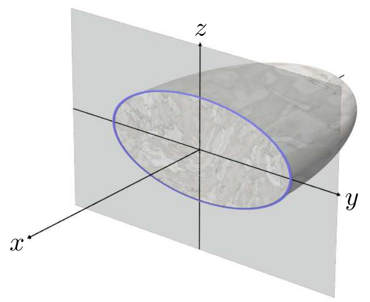
— Ainsi, les valeurs propres de A et A' vérifient $\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_{d-1} \leqslant \lambda_d$, ce qui constitue le *théorème d'entrelacement de Cauchy.*

Rab pour occuper la place : modeste illustration du théorème de Courant-Fischer.

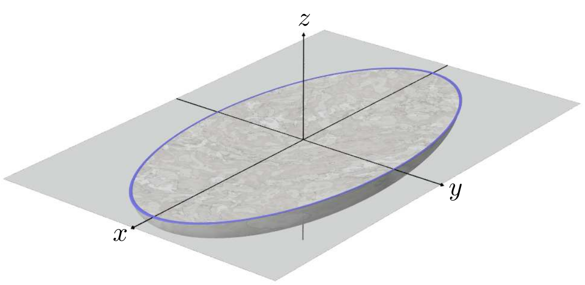
Dans $\mathbb{R}^3$ ($d = 3$) l'intersection d'un ellipsoïde et d'un plan ($k = 2$) passant par son centre est une ellipse.



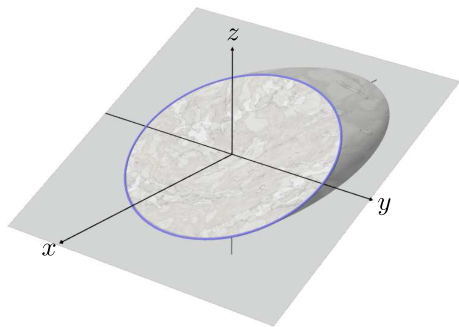
Ellisoïde d'équation $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} + z^2 = 1$



Le demi grand axe minimal vaut 2 et est obtenu, par exemple, pour le plan (Oyz)



Le demi petit axe maximal vaut 2 et est obtenu, par exemple, pour le plan (Oxy)



Cas limite – l'intersection est un cercle