上海大学研究生

量子场论讲义

主讲：陆杰

整理：杨光耀 吴梦之

目录

1 引言

1.1 引言

构建 OFT 的一些初衷

- 相对论性量子力学中的负能态问题
- 量子力学二级微扰论的虚粒子的诠释
- 因果律 (causality)

1.1.1 因果律问题的分析

我们考虑传播子

$$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1) := \langle\vec{x}_2| \hat{U}(t_2, t_1) |\vec{x}_1\rangle \tag{1}$$

其中 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 是时间演化算符。这一项的物理意义是，假设在 t1 时刻有一个由 $|\vec{x}_1\rangle$ 来刻画的量子态，即位于 $\vec{x}_1$ 处的坐标算符本征态。让这个态经过一段时间演化后，它会变成弥漫于空间的波，在 t2 时刻有一定几率处于 $\vec{x}_2$，$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1)$ 所刻画的正是这个概率。在狭义相对论中，我们知道物质的运动和信息的传播都不能超光速，即类空的两点之间不应该有关联，所以类空的两点之间的传播子应该为 0。我们计算非相对论性量子力学中的自由粒子的传播子可以得到:(取 Planck 常数 $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle\vec{x}_2| e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} |\vec{x}_1\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle\vec{x}_2| e^{-i\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}t} |\vec{p}\rangle < \vec{p}|\vec{x}_1 > \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{3/2} e^{im|\vec{x}_2-\vec{x}_1|/2t}
\end{aligned} \tag{2}$$

当 $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ 很大而 t 很小时，这个传播子仍然不为 0，说明在类空间隔下的两个点之间存在关联，这与狭义相对论是矛盾的。所以我们应当考虑相对论性量子力学，此时自由粒子的传播子是

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle\vec{x}_2| e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} |\vec{x}_1\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \\
&= \frac{1}{2\pi^2|\vec{x}_2-\vec{x}_1|} \int p\sin(p|\vec{x}_2-\vec{x}_1|) e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} dp \\
&\sim e^{-m\sqrt{\vec{x}^2-t^2}}
\end{aligned} \tag{3}$$

这个传播子在类空间隔下仍然不为 0，说明相对论性量子力学在因果律方面存在一些问题，这将在 QFT 中得到回答。

1.1.2 构建理论的一般步骤

1. 写下拉氏量，比如 $\mathcal{L}[\phi]=\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2+\lambda\phi^4$
2. 写下路径积分，比如 $Z=\int\mathcal{D}\phi e^{i\int\mathcal{L}[\phi]}$
3. 对路径积分依照耦合系数进行微扰展开
4. 微扰计算路径积分
5. 发现存在发散问题
6. 正规化来分离发散部分，比如引入截断 Λ，于是 $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2}dx\to\int_{|x|>\frac{1}{\Lambda}}\frac{1}{x^2}dx$
7. 令耦合系数为截断的微扰展开式
8. 重整化，只考虑路径积分的有限项
9. 与实验比较
10. 拿 Nobel 奖，或者从头开始

1.2 分析力学回顾

1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程

分析力学中，我们用广义坐标 $q(t)$ 与广义速度 $\dot{q}=\frac{dq}{dt}$ 来刻画一个质点系统的运动状态。拉氏量 $L(q_i,\dot{q}_i;t)$ 是关于广义坐标和广义速度的泛函，用来刻画系统的运动规律。

Note: 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$

泛函 $L:C(\Omega)\to\mathbb{R}$，其中 $C(\Omega)$ 是 Ω 上的全体函数

力学体系的作用量定义为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i(t),\dot{q}_i(t);t)dt \tag{4}$$

最小作用量原理 (哈密顿原理)：对于真实的一个运动轨迹，当坐标发生一个变分后，作用量不会变小。也就是说 $\delta S=0$。

注：这里的变分是等时变分，即 $\delta t=0$，故拉氏量的变分中没有 $\frac{\delta L}{\delta t}\delta t$ 项。

$$\begin{aligned}
0=\delta S&=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i;t)dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i+\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i+\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{q}_i dt)\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i+\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i}\delta q_i|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i})\delta q_i\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i})\right)\delta q_i
\end{aligned}\tag{5}$$

于是我们得到了 Euler-Lagrange 方程如下

$$\frac{\delta L}{\delta q_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}=0 \tag{6}$$

Euler-Lagrange 方程是系统的运动方程，比如对于一个谐振子，其拉氏量为 $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$，根据 Euler-Lagrange 方程可以得到，这正是谐振子的运动方程 $m\ddot{x}+kx=0$。

考虑 Newton 第二定律 $\vec{F}=m\ddot{\vec{x}}$, 对于保守力 $\vec{F}$, 一般总可以写成势能的梯度 $\vec{F}=\nabla V$, 于是 Newton 第二定律可以写成 $m\ddot{\vec{x}}-\nabla V$。这与 Euler-Lagrange 方程具有相同的形式，即如果令 $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V$，则 Euler-Lagrange 方程给出的正是 Newton 第二定律，并且我们顺便得到了在保守力系统中，$L=T-V$。

1.2.2 哈密顿力学

定义广义动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7}$$

对拉氏量作 Legendre 变换，定义哈密顿量，它是广义坐标和广义动量的函数

$$H(q_i,p_i;t)=p_i\dot{q}_i-L \tag{8}$$

由于 L 不显含 p_i, 我们计算得到 $\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i$; 以及根据 Euler-Lagrange 方程 (6), $\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=-\frac{d}{dt}q_i=-\dot{q}_i$。于是我们得到了哈密顿正则方程

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases} \tag{9}$$

对于保守力系统，我们已经证明了其拉氏量等于动能减势能，即 $L=T-V$。由 (7)，不难得到 $H=T+V$。应注意此式仅对保守力学系统成立，对于经典电磁场下带电质点，其哈密顿量为 $H=\frac{(\vec{p}+e\hat{A})^2}{2m}+e\phi(x)$，就不再是 $T+V$ 的形式了。

对于一个谐振子，不难计算得到其哈密顿量 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$。利用哈密顿正则方程，不难得到谐振子的运动方程是

$$\begin{cases}\dot{p}_i=-kx\\ \dot{q}_i=\frac{p}{m}\end{cases} \tag{10}$$

定义泊松括号

$$\{A,B\}=\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{11}$$

这里默认对指标 i 求和，称为 Einstein 求和。当然，严格来讲 Einstein 求和是一上一下两个指标求和，称为缩并，本质上来讲是流形的切空间及其对偶空间的内积，这里的 q_i 和 p_i 并不构成流形的切空间和对偶空间，所以这里不强调上下标。当然，更精细的理论会从辛几何的角度来理解分析力学，此时拉格朗日力学是切丛上的力学，哈密顿力学是余切丛上的力学，Einstein 求和也确实是切空间和余切空间的内积。于是可以得到广义坐标和广义动量的对易关系

$$\begin{aligned}\{q_i,p_j\}&=\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k}-\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k}\\&=\delta_{ik}\delta_{jk}\\&=\delta_{ij}\end{aligned} \tag{12}$$

力学量 $F=F(q_i,p_i;t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=\{F,H\}+\frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\tag{13}$$

特别地，对于哈密顿量，我们有

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}\tag{14}$$

这意味着 $\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{dH}{dt}=0$，也就是说如果哈密顿量不显含时，那么哈密顿量是一个守恒量。

1.3 量子力学中的谐振子

一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\frac{1}{2}m\omega^2x^2$。定义产生湮灭算符

$$\begin{cases}\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p})\\\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p})\end{cases}\tag{15}$$

产生与湮灭算符的基本性质是

$$\begin{aligned}\hat{a}\left|n\right\rangle&=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle\\\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle&=\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle\end{aligned}\tag{16}$$

于是可以求出第 n 能级的态矢量为

$$\left|n\right\rangle=\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle\tag{17}$$

定义粒子数算符 $\hat{N}=\sum_i\hat{a}^\dagger\hat{a}$，于是

$$\hat{N}\left|n\right\rangle=n\left|n\right\rangle\tag{18}$$

1.3.1 多体耦合谐振子

N 个无耦合谐振子的哈密顿量和态空间 (Fock 态) 为

$$\begin{aligned}\hat{H}=\hat{H}_k=\sum\frac{\hat{p}_k^2}{2m_k}+\frac{1}{2}m_k\omega_k\hat{x}_k^2=\sum(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})\hbar\omega_k\\\left|n_1n_2...n_k...n_N\right\rangle=(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}...(\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}\end{aligned}\tag{19}$$

耦合谐振子的哈密顿量

2 对称性

3 自由场的量子化

4 相互作用的量子场与费曼图