上海大学研究生

量子场论讲义

主讲：陆杰

整理：杨光耀 严禹坤 吴梦之

目录

1 引言

1.1 引言

构建 OFT 的一些初衷

- 相对论性量子力学中的负能态问题
- 量子力学二级微扰论的虚粒子的诠释
- 因果律 (causality)

1.1.1 因果律问题的分析

我们考虑传播子

$$K(\vec{x}_2,\vec{x}_1;t_2,t_1) := \langle\vec{x}_2|\,\hat{U}(t_2,t_1)\,|\vec{x}_1\rangle \tag{1}$$

其中 $\hat{U}(t_2,t_1)$ 是时间演化算符。这一项的物理意义是，假设在 t1 时刻有一个由 $|\vec{x}_1\rangle$ 来刻画的量子态，即位于 $\vec{x}_1$ 处的坐标算符本征态。让这个态经过一段时间演化后，它会变成弥漫于空间的波，在 t2 时刻有一定几率处于 $\vec{x}_2$，$K(\vec{x}_2,\vec{x}_1;t_2,t_1)$ 所刻画的正是这个概率。在狭义相对论中，我们知道物质的运动和信息的传播都不能超光速，即类空的两点之间不应该有关联，所以类空的两点之间的传播子应该为 0。我们计算非相对论性量子力学中的自由粒子的传播子可以得到:(取 Planck 常数 $\hbar=1$)

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}_2,\vec{x}_1;t,0) &= \langle\vec{x}_2|\,e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t}\,|\vec{x}_1\rangle \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\langle\vec{x}_2|\,e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t}\,|\vec{p}\rangle <\vec{p}|\vec{x}_1> \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t}e^{i\vec{p}\dot{(}\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{3/2}e^{im|\vec{x}_2-\vec{x}_1|/2t}
\end{aligned} \tag{2}$$

当 $|\vec{x}_2-\vec{x}_1|$ 很大而 t 很小时，这个传播子仍然不为 0，说明在类空间隔下的两个点之间存在关联，这与狭义相对论是矛盾的。所以我们应当考虑相对论性量子力学，此时自由粒子的传播子是

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}_2,\vec{x}_1;t,0) &= \langle\vec{x}_2|\,e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}\,|\vec{x}_1\rangle \\
&= \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}e^{i\vec{p}\dot{(}\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \\
&= \frac{1}{2\pi^2|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}\int p\sin(p|\vec{x}_2-\vec{x}_1|)e^{-it\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}dp \\
&\sim e^{-m\sqrt{\vec{x}^2-t^2}}
\end{aligned} \tag{3}$$

这个传播子在类空间隔下仍然不为 0，说明相对论性量子力学在因果律方面存在一些问题，这将在 QFT 中得到回答。

1.1.2 构建理论的一般步骤

1 写下拉氏量，比如 $\mathcal{L}[\phi] = \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4$

2 写下路径积分，比如 $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int \mathcal{L}[\phi]}$

3 对路径积分依照耦合系数进行微扰展开

4 微扰计算路径积分

5 发现存在发散问题

6 正规化来分离发散部分，比如引入截断 Λ，于是 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2}dx \to \int_{|x|>\frac{1}{\Lambda}} \frac{1}{x^2}dx$

7 令耦合系数为截断的微扰展开式

8 重整化，只考虑路径积分的有限项

9 与实验比较

10 拿 Nobel 奖，或者从头开始

1.2 分析力学回顾

1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程

分析力学中，我们用广义坐标 $q(t)$ 与广义速度 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ 来刻画一个质点系统的运动状态。拉氏量 $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ 是关于广义坐标和广义速度的泛函，用来刻画系统的运动规律。
Note: 函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$

泛函 $L : C(\Omega) \to \mathbb{R}$，其中 $C(\Omega)$ 是 Ω 上的全体函数

力学体系的作用量定义为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t)dt \tag{4}$$

最小作用量原理 (哈密顿原理)：对于真实的一个运动轨迹，当坐标发生一个变分后，作用量不会变小。也就是说 $\delta S = 0$。
注：这里的变分是等时变分，即 $\delta t = 0$，故拉氏量的变分中没有 $\frac{\delta L}{\delta t}\delta t$ 项。

$$\begin{aligned}
0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{q}_i dt)\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\delta q_i|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i})\delta q_i \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i})\right)\delta q_i
\end{aligned} \tag{5}$$

于是我们得到了 Euler-Lagrange 方程如下

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}) = 0 \tag{6}$$

Euler-Lagrange 方程是系统的运动方程，比如对于一个谐振子，其拉氏量为 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$，根据 Euler-Lagrange 方程可以得到，这正是谐振子的运动方程 $m\ddot{x} + kx = 0$。

考虑 Newton 第二定律 $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$，对于保守力 $\vec{F}$，一般总可以写成势能的梯度 $\vec{F} = \nabla V$，于是 Newton 第二定律可以写成 $m\ddot{\vec{x}} - \nabla V$。这与 Euler-Lagrange 方程具有相同的形式，即如果令 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$，则 Euler-Lagrange 方程给出的正是 Newton 第二定律，并且我们顺便得到了在保守力系统中，$L = T - V$。

1.2.2 哈密顿力学

定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7}$$

对拉氏量作 Legendre 变换，定义哈密顿量，它是广义坐标和广义动量的函数

$$H(q_i, p_i; t) = p_i\dot{q}_i - L \tag{8}$$

由于 L 不显含 p_i，我们计算得到 $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$；以及根据 Euler-Lagrange 方程 (6)，$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}q_i = -\dot{q}_i$。于是我们得到了哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \tag{9}$$

对于保守力系统，我们已经证明了其拉氏量等于动能减势能，即 $L = T - V$。由 (7)，不难得到 $H = T + V$。应注意此式仅对保守力学系统成立，对于经典电磁场下带电质点，其哈密顿量为 $H = \frac{(\vec{p}+e\hat{A})^2}{2m} + e\phi(x)$，就不再是 $T + V$ 的形式了。

对于一个谐振子，不难计算得到其哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$。利用哈密顿正则方程，不难得到谐振子的运动方程是

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -kx \\ \dot{q}_i = \frac{p}{m} \end{cases} \tag{10}$$

定义泊松括号

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{11}$$

这里默认对指标 i 求和，称为 Einstein 求和。当然，严格来讲 Einstein 求和是一上一下两个指标求和，称为缩并，本质上来讲是流形的切空间及其对偶空间的内积，这里的 q_i 和 p_i 并不构成流形的切空间和对偶空间，所以这里不强调上下标。当然，更精细的理论会从辛几何的角度来理解分析力学，此时拉格朗日力学是切丛上的力学，哈密顿力学是余切丛上的力学，Einstein 求和也确实是切空间和余切空间的内积。于是可以得到广义坐标和广义动量的对易关系

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \\ &= \delta_{ik}\delta_{jk} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{12}$$

力学量 $F=F(q_i,p_i;t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=\{F,H\}+\frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\tag{13}$$

特别地，对于哈密顿量，我们有

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}\tag{14}$$

这意味着 $\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{dH}{dt}=0$，也就是说如果哈密顿量不显含时，那么哈密顿量是一个守恒量。

1.3 量子力学中的谐振子

一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\frac{1}{2}m\omega^2x^2$。定义产生湮灭算符

$$\begin{cases}\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p})\\\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p})\end{cases}\tag{15}$$

产生与湮灭算符的基本性质是

$$\begin{aligned}\hat{a}\left|n\right\rangle&=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle\\\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle&=\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle\end{aligned}\tag{16}$$

于是可以求出第 n 能级的态矢量为

$$\left|n\right\rangle=\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle\tag{17}$$

定义粒子数算符 $\hat{N}=\sum_i\hat{a}^\dagger\hat{a}$，于是

$$\hat{N}\left|n\right\rangle=n\left|n\right\rangle\tag{18}$$

1.3.1 无耦合多体谐振子与自由全同粒子的粒子数表象

N 个无耦合谐振子的哈密顿量和态空间 (Fock 态) 为

$$\begin{aligned}\hat{H}=\hat{H}_k=\sum\frac{\hat{p}_k^2}{2m_k}+\frac{1}{2}m_k\omega_k\hat{x}_k^2=\sum(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})\hbar\omega_k\\\left|n_1n_2...n_k...n_N\right\rangle=(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}...(\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}\end{aligned}\tag{19}$$

多体无耦合谐振子的 Fock 态空间可以用于刻画自由全同粒子系统。不严格来讲，可以按照以下表格来对应

谐振子系统	全同粒子系统
第 k 个谐振子	第 m 个粒子
$E=\sum_{k=1}^N n_k\hbar\omega_k$	$E=\sum_{m=1}^N n_mE_m$
Quanta in oscillators	particles in momentum

真空态定义为 $|\Omega\rangle = |00\rangle$，于是 $\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}|\Omega\rangle \propto |11\rangle$，以及 $\hat{a}^\dagger_{p_2}\hat{a}^\dagger_{p_1}|\Omega\rangle \propto |11\rangle$。我们可以得到

$$\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2} = \lambda\hat{a}^\dagger_{p_2}\hat{a}^\dagger_{p_1},\ |\lambda| = 1 \tag{20}$$

其中 $\lambda = 1$ 时为玻色子，$\lambda = -1$ 时为费米子，$\lambda = e^{i\theta}$ 为任意子。玻色子和费米子产生湮灭算符的对易关系为

$$\begin{aligned}[\hat{a}^\dagger_i, \hat{a}^\dagger_j] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \\ [\hat{a}_i, \hat{a}^\dagger_j] = \delta_{ij} \\ |n_1 n_2 ...\rangle = \Pi_m \frac{1}{\sqrt{n_m!}}(\hat{a}^\dagger_{p_m})^{n_m}|0\rangle\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\{\hat{c}^\dagger_i, \hat{c}^\dagger_j\} = \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = 0 \\ \{\hat{c}_i, \hat{c}^\dagger_j\} = \delta_{ij}\end{aligned} \tag{22}$$

1.3.2 多体耦合谐振子

经典耦合谐振子的哈密顿量

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}K(q_{j+1} - q_j)^2 \tag{23}$$

这里广义坐标 q_j 是第 j 个谐振子绝对位置相对于其平衡位置的相对坐标，我们假定相邻两个谐振子平衡位置的距离是 a，于是第 j 个谐振子的平衡位置是 ja，它的绝对位置是 $x_j = q_j + ja$。对于两个耦合谐振子的情形，我们可以对坐标 (q_1, q_2) 做可逆变换

$$\begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

对动量也做相同变换，我们不难将哈密顿量改写成无耦合的形式 $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 q_2^2$。但是如果用相同的方式处理 N 个耦合谐振子，这个可逆矩阵并不容易构造，于是我们尝试傅里叶变换的方法。从泛函分析的观点来看，傅里叶变换实际上是希尔伯特空间上的基矢变换。我们不难知道，全体满足哈密顿正则方程的 $(q_1(t), ..., q_n(t); p_1(t), ..., p_n(t))$ 张成一个有限维线性空间，因此是一个希尔伯特空间。我们取这个线性空间的一组基 $\{(e^{i(ka-\omega t)}, ..., e^{i(kja-\omega t)}, ..., e^{i(kNa-\omega t)}; e^{i(ka-\omega t)}, ..., e^{i(kja-\omega t)}, ..., e^{i(kNa-\omega t)}) : k \in \mathbb{R}\}$，这组基的物理图像是一个行波运动在这个谐振子链上，每个谐振子的相位由其平衡位置坐标决定。我们对系统要求周期性边界条件 $x_{N+j} = x_j$，进而对波矢 k 有一个限制条件:

$$e^{ikNa} = 1 \tag{25}$$

于是有 $k = \frac{2n\pi}{Na}$，共有 N 种允许的取值，恰好可以描述系统的 N 个独立自由度。于是对 $q_j(t)$ 和 $p_j(t)$ 可做线性展开，即离散傅里叶变换

$$\begin{aligned} q_j = \tfrac{1}{\sqrt{N}}\textstyle\sum_k \tilde{q}_j e^{-ikja} \\ q_j = \tfrac{1}{\sqrt{N}}\textstyle\sum_k \tilde{p}_j e^{ikja}\end{aligned} \tag{26}$$

$e^{i(kja-\omega t)}$ 称为波矢 k 的振动模式或第 k 个振动模式，之后将会看到，它代表了一个集体激发，在固体物理中称为格波，波矢 k 是格波波矢，对格波做正则量子化后得到声子。利用傅里叶变换，哈密顿量可以转化为

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2m}\tilde{p}_k\tilde{p}_{-k} + \frac{1}{2}m\omega_k^2\tilde{q}_k^2 \tag{27}$$

这是 N 个无耦合的谐振子的系统哈密顿量，其中声子的振动频率 $\omega_k^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$，K 是弹簧劲度系数，k 是格波波矢。接下来我们对其进行正则量子化，引入产生湮灭算符

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \\ \tilde{p}_k &= -i\sqrt{\tfrac{2m\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \end{aligned} \tag{28}$$

于是哈密顿量变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \frac{1}{2}\hbar\omega_k(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_{-k}^\dagger\hat{a}_{-k}) \tag{29}$$

由于 $\hat{a}_{-k}^\dagger\hat{a}_{-k} = \hat{a}_{-k}\hat{a}_{-k}^\dagger + 1$，于是哈密顿量进而变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \hbar\omega_k(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2}) \tag{30}$$

其中，当系统的谐振子数 N 趋于无穷时，第二项会贡献一个无穷大的零点能，不具有可观测效应，这个之后我们再详细讨论。

1.4 二次量子化：波函数算符化

不严格地来讲，一次量子化可以理解为把粒子变成波，二次量子化可以理解为把波变成粒子。(二次量子化：对于多个自由粒子，将具有相同状态的粒子平面波构成的波包视为状态特定的“粒子”？产生湮灭算符作用在一个波包上面产生或者湮灭一个平面波。)。

在粒子数表象下，波函数变为算符，作用在多粒子态上在 x 处产生确定的具有不同动量的粒子。

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p \hat{a}_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p \hat{a}_p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{cases} \tag{31}$$

玻色子和费米子分别满足对易关系和反对易关系

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})] &= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\ [\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})] &= [\Psi^\dagger(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})] = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \{\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})\} &= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \\ \{\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})\} &= \{\Psi^\dagger(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})\} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

于是算符可以表达为

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle\alpha| \hat{A} |\beta\rangle \langle\beta| \\ &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle\beta| \\ &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha^\dagger\hat{a}_\beta \end{aligned} \tag{34}$$

特别地，动量算符、哈密顿量算符 (自由粒子)、势能算符表达为

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \sum_p \vec{p}\ \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_p \vec{p}\ \hat{n}_p \\ \hat{H} &= \sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m}\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m}\hat{n}_p \\ \hat{V} &= \sum_{p_1,p_2} V_{\vec{p_1}-\vec{p_2}}\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_{p_1,p_2} V_{\vec{p_1}-\vec{p_2}}\hat{n}_p\end{aligned} \tag{35}$$

1.5 多体系统的连续极限与场概念的引入

核心思路是：单体系统-> 多提系统-> 连续极限-> 场

多体谐振子的哈密顿量和拉氏量是

$$\begin{aligned}H &= \sum_j (\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}k(q_{j+1}-q_j)^2) \\ L &= \sum_j (\frac{p_j^2}{2m} - \frac{1}{2}k(q_{j+1}-q_j)^2)\end{aligned} \tag{36}$$

当 $N\to\infty$ 时，我们可以认为 $\frac{q_{j+1}-q_j}{l} \to \frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial x} \sim \nabla\phi$，即连续极限下，离散的格点可以过渡到连续的场。此时，动能和势能分别过渡到

$$\begin{aligned}T &= \sum_j \frac{1}{2}m(\frac{\partial q_i}{\partial t})^2 \to \frac{1}{l}\int dx \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial t})^2 = \int dx \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 \\ V &= \sum_j \frac{1}{2}k(q_{j+1}-q_i)^2 \to \sum_j kl^2(\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}})^2 \sim \int dx \tau(\nabla\phi)^2\end{aligned} \tag{37}$$

这样，哈密顿量和拉氏量过渡到连续体系中变成

$$\begin{aligned}H &= \int d^3\big[\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2\big] \\ L &= \int d^x\big[\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 - \frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2\big]\end{aligned} \tag{38}$$

场论中我们希望所有可观测量满足 Lorentz 协变性，但哈密顿量和拉氏量在 Lorentz 变换下都不是协变量，这为我们研究可观测量带来不便。我们可以引入拉氏密度 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\big)^2 - \frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2$，这是一个 Lorentz 协变量，于是拉氏量可以表示为 $L = \int d^x\mathcal{L}$。这样，作用量就可以写成 Lorentz 协变的形式

$$S = \int dtL = \int d^4x\mathcal{L} \tag{39}$$

最小作用量原理给出场论中的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \tag{40}$$

仿照分析力学，我们可以引入 ϕ 场的正则共轭动量场，以及哈密顿量密度

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \\ \mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}\end{aligned} \tag{41}$$

类似有正则方程

$$\begin{cases}\dot{\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \\ \dot{\pi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} + \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)}\end{cases} \tag{42}$$

1.6 经典相对论性场

我们采用记号 $\eta^{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$ 的度规。

1.6.1 张量运算复习

考虑闵氏时空，坐标 $x^\mu = (t,\vec{x})$ ，$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t,\vec{-x})$。取自然单位制 $c=\hbar=1$, 此时

$$\begin{aligned}
&p^\mu = (E,\vec{p}) \\
&p^2 = p^\mu p^\mu \eta_{\mu\mu} = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \\
&\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu
\end{aligned} \tag{43}$$

1.6.2 基本的经典相对论性场

在场论中，我们所研究的场必须满足 Lorentz 对称性，用数学语言讲，就是场必须是 Poincare 群的群表示。通过对 Pioncare 群的结构进行分析，低自旋的相对论性场只有以下几种

实标量场 Klein-Gorden 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

经典拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

复标量场 $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$，$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

经典拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$

Dirac 场 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi = 0$

经典拉氏量 $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi$

γ 矩阵将在后面进行详细介绍。

电磁场 Maxwell 方程组

经典拉氏量 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

1.6.3 电磁场的进一步讨论

由 $F_{\mu\nu}$ 可以构造出两个 Lorentz 标量:$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$ 和 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \propto \vec{E}\cdot\vec{B}$，其中第二项是 Lorentz 赝标量，会破坏宇称，与量子反常和拓扑效应有密切的关系。

在进阶的场论中，我们将会知道，Lorentz 对称性要求无质量的矢量场必须耦合到一个守恒流上，即

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{45}$$

基于电磁场的拉氏量，可以推导出 Maxwell 方程组

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu \;\Rightarrow\; \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \rho \\ \nabla\times\vec{B} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{46}$$

$$\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{47}$$

其中 $G_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 是 $F_{\mu\nu}$ 的对偶 (Hodge duality)。此外，(47) 也可以由 $F^{\mu\nu}$ 的 Bianchi 恒等式

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

得到。

我们知道在经典电磁学中，如果引入磁单极子，那么在 (47) 的右侧需要引入磁荷密度和磁流密度，即

$$\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = J^\mu_m \;\Rightarrow\; \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \times \vec{E} = \vec{J}_m - \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{48}$$

1.6.4 标量场

实标量场的拉氏量写作

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2 \tag{49}$$

由 Euler-Lagrange 方程可得 Klein-Gorden 方程：

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \tag{50}$$

我们称系数 m 为质量，我们在动量空间来理解它的物理意义。动量空间中 $\partial_\mu \; ip_\mu$，于是动量空间的 KG 方程是 $(-p^\mu p_\mu + m^2)\phi = 0$。即 ϕ 的质量是 m_ϕ，由狭义相对论的能量动量关系 $E^2 = \vec{p}^2 + m_\phi^2$ 知道 $p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = -m_\phi^2$，于是 $m^2 = m_\phi^2$，说明 KG 方程的系数 m^2 代表了 ϕ 的质量。

$\phi 4$ 理论的拉氏量是

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \tag{51}$$

这是场论中最重要的一个例子，后面几章我们将会深入研究它。

最后，对于 Klein-Gorden 方程的物理图像，我们做以下注记。在相对论性量子力学中，我们将 $\phi(x)$ 诠释为一个相对论性粒子的波函数，$|\phi(x)|^2$ 诠释为该粒子出现在 x 的概率，KG 方程是这个粒子的运动方程，地位相当于量子力学中的薛定谔方程。但是在场论中，我们的物理图像是完全不同的。这里，我们将 $\phi(x)$ 诠释为一个经典场，类似于经典流体的流速场或者经典电磁场，KG 方程是这个经典场的运动方程，地位相当于流体力学中的 Navier-Stokes 方程或者电动力学中的 Maxwell 方程组。事实上，这个物理图像在场论中是普遍的，狄拉克场、电磁场都是这样的物理图像，甚至在非相对论场论中，薛定谔方程的物理图像也转换为一个经典场的场方程。量子场论的正则量子化，就是对各种经典场来做量子化的。

2 量子力学中的对称性

2.1 概述

幺正算符复习

幺正算符的生成元

变换的主动观点与被动观点

主动观点: 态不变，参考系变换

被动观点: 态变换，参考系不变

希尔伯特空间的 U(1) 对称性：量子力学中的物理态并不构成希尔伯特空间，而是希尔伯特空间模掉复数 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ 的商空间，有时称为投影希尔伯特空间。对于有限维情形，物理态空间就是复射影空间 $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n/\mathbb{C}^\times$。而态矢量 $|\psi\rangle$ 由于是归一化的并且具有自由全局相位，因此既不定义在希尔伯特空间上，也不定义在物理态空间上，而是定义在希尔伯特空间模掉正实数 $\mathbb{R}^+$ 的商空间上，模掉 $\mathbb{R}^+$ 代表了态的归一化。态矢量 $|\psi\rangle$ 的自由相位在微分几何上代表了物理态空间上的纤维，因而态矢量构成的空间是物理态空间上的纤维丛，这在拓扑学上称为 Hopf 纤维化。

以二能级系统为例，其物理态空间是 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times$，拓扑上同胚于单位球面 S^2，因此可以用 Bloch 球上的点来描述物理态；而态矢量的空间是 $\mathbb{C}^2/\mathbb{R}^+$，拓扑上同胚于高维球面 S^3，可以定义 Hopf 映射 $\pi : S^3 - > S^2$，可以诱导一个纤维 $S^3/\pi = U(1)$，这正是态矢量的全局相位所构成的群。

2.2 典型的幺正算符

2.2.1 时间平移

一个量子态由 t_1 演化到 t_2 的过程可以表述为

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1)\,|\psi(t_1)\rangle \tag{52}$$

$\hat{U}(t_2, t_1)$ 称为时间演化算符，满足性质

$$\begin{aligned}
&\hat{U}(t,t) = 1 \\
&\hat{U}(t_3,t_2)\hat{U}(t_2,t_1) = \hat{U}(t_3,t_1) \\
&\hat{U}(t_1,t_2) = \hat{U}^\dagger(t_2,t_1) = \hat{U}^{-1}(t_2,t_1) \\
&\hat{U}(t_4,t_3)[\hat{U}(t_3,t_2)\hat{U}(t_2,t_1)] = [\hat{U}(t_4,t_3)\hat{U}(t_3,t_2)]\hat{U}(t_2,t_1)
\end{aligned} \tag{53}$$

因此全体时间演化算符 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 构成李群。我们考虑无穷小的时间平移

$$|\Psi(t+dt)\rangle = U(dt)\,|\psi(t)\rangle \tag{54}$$

由于

$$|\psi(t+dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + \frac{d\psi(t)}{dt}dt \tag{55}$$

以及薛定谔方程

$$\hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle \tag{56}$$

可得

$$|\psi(t+dt)\rangle = (1 - i\hat{H}dt)\,|\psi(t)\rangle \tag{57}$$

对于有限长时间的演化

$$\begin{aligned}
|\psi(0+t)\rangle &= (1 - i\hat{H}(t_N \equiv t)dt)(1 - i\hat{H}(t_{N-1})dt)...(1 - \hat{H}(t_1))(1 - \hat{H}(t_0 \equiv 0))\,|\psi(0)\rangle \\
&= e^{-i\mathbb{T}\int \hat{H}dt}
\end{aligned} \tag{58}$$

其中 $\mathbb{T}$ 代表编时乘积。

2.2.2 空间平移

我们将一个量子态由 x 平移到 x+dx 处 (被动观点)，于是

$$\begin{aligned} |\psi(x+dx)\rangle &= |\psi(x)\rangle + \frac{d\,|\psi(x)\rangle}{dx}dx \\ &= (1+i\hat{p}dx)\,|\psi(x)\rangle \end{aligned} \tag{59}$$

对于有限远平移

$$|\psi(x+a)\rangle = \lim_{N\to\infty}(1+i\hat{p}\frac{a}{N})^N\,|\psi(x)\rangle = e^{i\hat{p}a}\,|\psi(x)\rangle \tag{60}$$

若使用主动观点

$$\hat{U}(a) = e^{-i\hat{p}a} \tag{61}$$

综合考虑时空平移

$$\hat{U}(a_\mu) = e^{-ip^\mu a_\mu} = e^{-i\hat{H}t+i\hat{\vec{p}}\cdot\vec{a}} \tag{62}$$

2.3 转动变换

二维转动

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{63}$$

三维转动的刻画有多种方式，例如由绕 x 轴、y 轴、z 轴的三种转动复合构成，又如欧拉角。我们考虑 x,y,z 轴三种转动的复合

$$R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} \tag{64}$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

一般转动矩阵是

$$R(\vec{\theta}) = R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) \tag{67}$$

转动矩阵的性质

全体转动矩阵构成 $O(3)$ 群。由于 $O(3)$ 并不是一个连通的流形，我们考虑其连通分支 $SO(3)$，代表连续变换。其余变换可以分解为反射变换和连续变换的复合。

考虑连续转动矩阵作用于量子态上。由于量子态空间构成线性空间，因此是 $SO(3)$ 群的群表示。以动量本征态为例，动量本征态和动量算符的变换是

$$\begin{aligned} &|R(\vec{\theta})\vec{p}\rangle = \hat{U}(\vec{\theta})\,|\vec{p}\rangle \\ &\hat{U}(\vec{\theta})\hat{\vec{p}}\hat{U}^{\dagger}(\vec{\theta}) = R(\theta)\hat{\vec{p}} \end{aligned} \tag{68}$$

转动变换的生成元是角动量，于是转动变换的幺正算符

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{-i\hat{\vec{J}}\cdot\vec{\theta}} = e^{-i(\hat{J}\cdot\vec{n})\theta} \tag{69}$$

3 自由场的量子化

4 相互作用的量子场与费曼图