

上海大学研究生 量子场论讲义

主讲：陆杰

整理：杨光耀 严禹坤 吴梦之

目录

1 引言	2
1.1 引言	2
1.1.1 因果律问题的分析	2
1.1.2 构建理论的一般步骤	3
1.2 分析力学回顾	3
1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程	3
1.2.2 哈密顿力学	4
1.3 量子力学中的谐振子	5
1.3.1 无耦合多体谐振子与自由全同粒子的粒子数表象	5
1.3.2 多体耦合谐振子	6
1.4 二次量子化：波函数算符化	7
1.5 多体系统的连续极限与场概念的引入	8
1.6 经典相对论性场	9
1.6.1 张量运算复习	9
1.6.2 基本的经典相对论性场	9
1.6.3 电磁场的进一步讨论	9
2 对称性	10
3 自由场的量子化	10
4 相互作用的量子场与费曼图	10

1 引言

1.1 引言

构建 OFT 的一些初衷

- 相对论性量子力学中的负能态问题
- 量子力学二级微扰论的虚粒子的诠释
- 因果律 (causality)

1.1.1 因果律问题的分析

我们考虑传播子

$$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1) := \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \quad (1)$$

其中 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 是时间演化算符。这一项的物理意义是, 假设在 t_1 时刻有一个由 $|\vec{x}_1\rangle$ 来刻画的量子态, 即位于 \vec{x}_1 处的坐标算符本征态。让这个态经过一段时间演化后, 它会变成弥漫于空间的波, 在 t_2 时刻有一定几率处于 \vec{x}_2 , $K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1)$ 所刻画的正是这个概率。在狭义相对论中, 我们知道物质的运动和信息的传播都不能超光速, 即类空的两点之间不应该有关联, 所以类空的两点之间的传播子应该为 0。我们计算非相对论性量子力学中的自由粒子的传播子可以得到:(取 Planck 常数 $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi it} \right)^{3/2} e^{im|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2/2t} \end{aligned} \quad (2)$$

当 $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ 很大而 t 很小时, 这个传播子仍然不为 0, 说明在类空间隔下的两个点之间存在关联, 这与狭义相对论是矛盾的。所以我们应当考虑相对论性量子力学, 此时自由粒子的传播子是

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \int p \sin(p|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}} dp \\ &\sim e^{-m\sqrt{\vec{x}^2 - t^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

这个传播子在类空间隔下仍然不为 0, 说明相对论性量子力学在因果律方面存在一些问题, 这将在 QFT 中得到回答。

1.1.2 构建理论的一般步骤

- 1 写下拉氏量, 比如 $\mathcal{L}[\phi] = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$
- 2 写下路径积分, 比如 $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathcal{L}[\phi]}$
- 3 对路径积分依照耦合系数进行微扰展开
- 4 微扰计算路径积分
- 5 发现存在发散问题
- 6 正规化来分离发散部分, 比如引入截断 Λ , 于是 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \int_{|x| > \frac{1}{\Lambda}} \frac{1}{x^2} dx$
- 7 令耦合系数为截断的微扰展开式
- 8 重整化, 只考虑路径积分的有限项
- 9 与实验比较
- 10 拿 Nobel 奖, 或者从头开始

1.2 分析力学回顾

1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程

分析力学中, 我们用广义坐标 $q(t)$ 与广义速度 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ 来刻画一个质点系统的运动状态。拉氏量 $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ 是关于广义坐标和广义速度的泛函, 用来刻画系统的运动规律。

Note: 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$

泛函 $L: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $C(\Omega)$ 是 Ω 上的全体函数

力学体系的作用量定义为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t) dt \quad (4)$$

最小作用量原理 (哈密顿原理): 对于真实的一个运动轨迹, 当坐标发生一个变分后, 作用量不会变小。也就是说 $\delta S = 0$ 。

注: 这里的变分是等时变分, 即 $\delta t = 0$, 故拉氏量的变分中没有 $\frac{\delta L}{\delta t} \delta t$ 项。

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{q}_i dt) \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \end{aligned} \quad (5)$$

于是我们得到了 Euler-Lagrange 方程如下

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (6)$$

Euler-Lagrange 方程是系统的运动方程，比如对于一个谐振子，其拉氏量为 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ ，根据 Euler-Lagrange 方程可以得到，这正是谐振子的运动方程 $m\ddot{x} + kx = 0$ 。

考虑 Newton 第二定律 $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ ，对于保守力 \vec{F} ，一般总可以写成势能的梯度 $\vec{F} = \nabla V$ ，于是 Newton 第二定律可以写成 $m\ddot{\vec{x}} - \nabla V$ 。这与 Euler-Lagrange 方程具有相同的形式，即如果令 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$ ，则 Euler-Lagrange 方程给出的正是 Newton 第二定律，并且我们顺便得到了在保守力系统中， $L = T - V$ 。

1.2.2 哈密顿力学

定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

对拉氏量作 Legendre 变换，定义哈密顿量，它是广义坐标和广义动量的函数

$$H(q_i, p_i; t) = p_i \dot{q}_i - L \quad (8)$$

由于 L 不显含 p_i ，我们计算得到 $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ ；以及根据 Euler-Lagrange 方程 (6)， $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} p_i = -\dot{p}_i$ 。于是我们得到了哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (9)$$

对于保守力系统，我们已经证明了其拉氏量等于动能减势能，即 $L = T - V$ 。由 (7)，不难得到 $H = T + V$ 。应注意此式仅对保守力学系统成立，对于经典电磁场下带电质点，其哈密顿量为 $H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + e\phi(x)$ ，就不再是 $T + V$ 的形式了。

对于一个谐振子，不难计算得到其哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ 。利用哈密顿正则方程，不难得到谐振子的运动方程是

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -kx \\ \dot{q}_i = \frac{p}{m} \end{cases} \quad (10)$$

定义泊松括号

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (11)$$

这里默认对指标 i 求和，称为 Einstein 求和。当然，严格来讲 Einstein 求和是一上一下两个指标求和，称为缩并，本质上来讲是流形的切空间及其对偶空间的内积，这里的 q_i 和 p_i 并不构成流形的切空间和对偶空间，所以这里不强调上下标。当然，更精细的理论会从辛几何的角度来理解分析力学，此时拉格朗日力学是切丛上的力学，哈密顿力学是余切丛上的力学，Einstein 求和也确实是切空间和余切空间的内积。于是可以得到广义坐标和广义动量的对易关系

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jk} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (12)$$

力学量 $F = F(q_i, p_i; t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\quad (13)$$

特别地，对于哈密顿量，我们有

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (14)$$

这意味着 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$ ，也就是说如果哈密顿量不显含时，那么哈密顿量是一个守恒量。

1.3 量子力学中的谐振子

一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 。定义产生湮灭算符

$$\begin{cases} \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \end{cases} \quad (15)$$

产生与湮灭算符的基本性质是

$$\begin{aligned}\hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle\end{aligned} \quad (16)$$

于是可以求出第 n 能级的态矢量为

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (17)$$

定义粒子数算符 $\hat{N} = \sum_i \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ，于是

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (18)$$

1.3.1 无耦合多体谐振子与自由全同粒子的粒子数表象

N 个无耦合谐振子的哈密顿量和态空间 (Fock 态) 为

$$\begin{aligned}\hat{H} = \hat{H}_k &= \sum \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2}m_k\omega_k \hat{x}_k^2 = \sum (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega_k \\ |n_1 n_2 \dots n_k \dots n_N\rangle &= (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}\end{aligned} \quad (19)$$

多体无耦合谐振子的 Fock 态空间可以用于刻画自由全同粒子系统。不严格来讲，可以按照以下表格来对应

谐振子系统	全同粒子系统
第 k 个谐振子	第 m 个粒子
$E = \sum_{k=1}^N n_k \hbar \omega_k$	$E = \sum_{m=1}^N n_m E_m$
Quanta in oscillators	particles in momentum

真空态定义为 $|\Omega\rangle = |00\rangle$, 于是 $\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle \propto |11\rangle$, 以及 $\hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger |\Omega\rangle \propto |11\rangle$ 。我们可以得到

$$\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger = \lambda \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger, \quad |\lambda| = 1 \quad (20)$$

其中 $\lambda = 1$ 时为玻色子, $\lambda = -1$ 时为费米子, $\lambda = e^{i\theta}$ 为任意子。玻色子和费米子产生湮灭算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] &= [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij} \\ |n_1 n_2 \dots\rangle &= \Pi_m \frac{1}{\sqrt{n_m!}} (\hat{a}_{p_m}^\dagger)^{n_m} |0\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} &= \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = 0 \\ \{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (22)$$

1.3.2 多体耦合谐振子

经典耦合谐振子的哈密顿量

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \quad (23)$$

这里广义坐标 q_j 是第 j 个谐振子绝对位置相对于其平衡位置的相对坐标, 我们假定相邻两个谐振子平衡位置的距离是 a , 于是第 j 个谐振子的平衡位置是 ja , 它的绝对位置是 $x_j = q_j + ja$ 。对于两个耦合谐振子的情形, 我们可以对坐标 (q_1, q_2) 做可逆变换

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

对动量也做相同变换, 我们不难将哈密顿量改写成无耦合的形式 $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 q_2^2$ 。但是如果用相同的方式处理 N 个耦合谐振子, 这个可逆矩阵并不容易构造, 于是我们尝试傅里叶变换的方法。从泛函分析的观点来看, 傅里叶变换实际上是希尔伯特空间上的基矢变换。我们不难知道, 全体满足哈密顿正则方程的 $(q_1(t), \dots, q_n(t); p_1(t), \dots, p_n(t))$ 张成一个有限维线性空间, 因此是一个希尔伯特空间。我们取这个线性空间的一组基 $\{(e^{i(ka-\omega t)}, \dots, e^{i(kja-\omega t)}, \dots, e^{i(kNa-\omega t)}; e^{i(ka-\omega t)}, \dots, e^{i(kja-\omega t)}, \dots, e^{i(kNa-\omega t)}) : k \in \mathbb{R}\}$, 这组基的物理图像是一个行波运动在这个谐振子链上, 每个谐振子的相位由其平衡位置坐标决定。我们对系统要求周期性边界条件 $x_{N+j} = x_j$, 进而对波矢 k 有一个限制条件:

$$e^{ikNa} = 1 \quad (25)$$

于是有 $k = \frac{2n\pi}{Na}$, 共有 N 种允许的取值, 恰好可以描述系统的 N 个独立自由度。于是对 $q_j(t)$ 和 $p_j(t)$ 可做线性展开, 即离散傅里叶变换

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{q}_j e^{-ikja} \\ p_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{p}_j e^{ikja} \end{aligned} \quad (26)$$

$e^{i(kja-\omega t)}$ 称为波矢 k 的振动模式或第 k 个振动模式, 之后将会看到, 它代表了一个集体激发, 在固体物理中称为格波, 波矢 k 是格波波矢, 对格波做正则量子化后得到声子。利用傅里叶变换, 哈密顿量可以转化为

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2m} \tilde{p}_k \tilde{p}_{-k} + \frac{1}{2} m \omega_k^2 \tilde{q}_k^2 \quad (27)$$

这是 N 个无耦合的谐振子的系统哈密顿量，其中声子的振动频率 $\omega_k^2 = \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$ ， K 是弹簧劲度系数， k 是格波波矢。接下来我们对其进行正则量子化，引入产生湮灭算符

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_k}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \\ \tilde{p}_k &= -i\sqrt{\frac{2m\hbar\omega_k}{2}} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \end{aligned} \quad (28)$$

于是哈密顿量变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \frac{1}{2} \hbar \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}) \quad (29)$$

由于 $\hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} = \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger + 1$ ，于是哈密顿量进而变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \hbar \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2}) \quad (30)$$

其中，当系统的谐振子数 N 趋于无穷时，第二项会贡献一个无穷大的零点能，不具有可观测效应，这个之后我们再详细讨论。

1.4 二次量子化：波函数算符化

不严格地来讲，一次量子化可以理解为把粒子变成波，二次量子化可以理解为把波变成粒子。(二次量子化：对于多个自由粒子，将具有相同状态的粒子平面波构成的波包视为状态特定的“粒子”？产生湮灭算符作用在一个波包上面产生或者湮灭一个平面波。)

在粒子数表象下，波函数变为算符，作用在多粒子态上在 x 处产生确定的具有不同动量的粒子。

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}_p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{cases} \quad (31)$$

玻色子和费米子分别满足对易关系和反对易关系

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})] &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})] &= [\Psi^\dagger(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})] = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})\} &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})\} &= \{\Psi^\dagger(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})\} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

于是算符可以表达为

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle\alpha| \hat{A} |\beta\rangle \langle\beta| \\ &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle\beta| \\ &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \end{aligned} \quad (34)$$

特别地，动量算符、哈密顿量算符（自由粒子）、势能算符表达为

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \sum_p \vec{p} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_p \vec{p} \hat{n}_p \\ \hat{H} &= \sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m} \hat{n}_p \\ \hat{V} &= \sum_{p_1, p_2} V_{\vec{p}_1 - \vec{p}_2} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_{p_1, p_2} V_{\vec{p}_1 - \vec{p}_2} \hat{n}_p\end{aligned}\quad (35)$$

1.5 多体系统的连续极限与场概念的引入

多体谐振子的哈密顿量和拉氏量是

$$\begin{aligned}H &= \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right) \\ L &= \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} - \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right)\end{aligned}\quad (36)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时，我们可以认为 $\frac{q_{j+1} - q_j}{l} \rightarrow \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial x} \sim \nabla \phi$ ，即连续极限下，离散的格点可以过渡到连续的场。此时，动能和势能分别过渡到

$$\begin{aligned}T &= \sum_j \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{l} \int dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t} \right)^2 = \int dx \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \\ V &= \sum_j \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \rightarrow \sum_j k l^2 \left(\frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial \vec{x}} \right)^2 \sim \int dx \tau (\nabla \phi)^2\end{aligned}\quad (37)$$

这样，哈密顿量和拉氏量过渡到连续体系中变成

$$\begin{aligned}H &= \int d^3 \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau (\nabla \phi)^2 \right] \\ L &= \int d^3 \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau (\nabla \phi)^2 \right]\end{aligned}\quad (38)$$

场论中我们希望所有可观测量满足 Lorentz 协变性，但哈密顿量和拉氏量在 Lorentz 变换下都不是协变量，这为我们研究可观测量带来不便。我们可以引入拉氏密度 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau (\nabla \phi)^2$ ，这是一个 Lorentz 协变量，于是拉氏量可以表示为 $L = \int d^3 \mathcal{L}$ 。这样，作用量就可以写成 Lorentz 协变的形式

$$S = \int dt L = \int d^4 x \mathcal{L} \quad (39)$$

最小作用量原理给出场论中的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (40)$$

仿照分析力学，我们可以引入 ϕ 场的正则共轭动量场，以及哈密顿量密度

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\phi}} \\ \mathcal{H} &= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}\end{aligned}\quad (41)$$

类似有正则方程

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi)} \end{cases} \quad (42)$$

1.6 经典相对论性场

我们采用记号 $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 的度规。

1.6.1 张量运算复习

考虑闵氏时空，坐标 $x^\mu = (t, \vec{x})$ ， $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x})$ 。取自然单位制 $c = \hbar = 1$ ，此时

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) \\ p^2 &= p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \\ \partial^2 &= \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (43)$$

1.6.2 基本的经典相对论性场

在场论中，我们所研究的场必须满足 Lorentz 对称性，用数学语言讲，就是场必须是 Poincare 群的群表示。通过对 Pioncare 群的结构进行分析，低自旋的相对论性场只有以下几种

实标量场 Klein-Gorden 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

$$\text{经典拉氏量 } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

复标量场 $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ ， $\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

$$\text{经典拉氏量 } \mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2\phi^*\phi$$

Dirac 场 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0$

$$\text{经典拉氏量 } \mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi$$

γ 矩阵将在后面进行详细介绍。

电磁场 Maxwell 方程组

$$\text{经典拉氏量 } \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

1.6.3 电磁场的进一步讨论

由 $F_{\mu\nu}$ 可以构造出两个 Lorentz 标量： $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$ 和 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \propto \vec{E} \cdot \vec{B}$ ，其中第二项是 Lorentz 赝标量，会破坏宇称，与量子反常和拓扑效应有密切的关系。

在进阶的场论中，我们将会知道，Lorentz 对称性要求无质量的矢量场必须耦合到一个守恒流上，即

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (45)$$

基于电磁场的拉氏量，可以推导出 Maxwell 方程组

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (46)$$

$$\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (47)$$

其中 $G_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ 是 $F_{\mu\nu}$ 的对偶 (Hodge duality)。此外, (47) 也可以由 $F^{\mu\nu}$ 的 Bianchi 恒等式

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

得到。

我们知道在经典电磁学中, 如果引入磁单极子, 那么在 (47) 的右侧需要引入磁荷密度和磁流密度, 即

$$\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = J_m^\mu \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \times \vec{E} = \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (48)$$

2 对称性

3 自由场的量子化

4 相互作用的量子场与费曼图