

上海大学研究生 量子场论讲义

主讲：陆杰

整理：杨光耀 严禹坤 吴梦之

目录

1 引言	2
1.1 引言	2
1.1.1 因果律问题的分析	2
1.1.2 构建理论的一般步骤	3
1.2 分析力学回顾	3
1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程	3
1.2.2 哈密顿力学	4
1.3 量子力学中的谐振子	5
1.3.1 无耦合多体谐振子与自由全同粒子的粒子数表象	5
1.3.2 多体耦合谐振子	6
1.4 二次量子化：波函数算符化	8
1.5 多体系统的连续极限与场概念的引入	9
1.6 经典相对论性场	10
1.6.1 张量运算复习	10
1.6.2 基本的经典相对论性场	10
1.6.3 电磁场的进一步讨论	11
1.6.4 标量场	11
2 量子力学中的对称性	12
2.1 概述	12
2.2 典型的么正算符	12
2.2.1 时间平移	12
2.2.2 空间平移	13
2.3 转动变换	14
3 自由场的量子化	14
4 相互作用的量子场与费曼图	14

1 引言

1.1 引言

构建 OFT 的一些初衷

- 相对论性量子力学中的负能态问题
- 量子力学二级微扰论的虚粒子的诠释
- 因果律 (causality)

1.1.1 因果律问题的分析

我们考虑传播子

$$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1) := \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \quad (1)$$

其中 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 是时间演化算符。这一项的物理意义是, 假设在 t_1 时刻有一个由 $|\vec{x}_1\rangle$ 来刻画的量子态, 即位于 \vec{x}_1 处的坐标算符本征态。让这个态经过一段时间演化后, 它会变成弥漫于空间的波, 在 t_2 时刻有一定几率处于 \vec{x}_2 , $K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1)$ 所刻画的正是这个概率。在狭义相对论中, 我们知道物质的运动和信息的传播都不能超光速, 即类空的两点之间不应该有关联, 所以类空的两点之间的传播子应该为 0。我们计算非相对论性量子力学中的自由粒子的传播子可以得到:(取 Planck 常数 $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi it} \right)^{3/2} e^{im|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2/2t} \end{aligned} \quad (2)$$

当 $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ 很大而 t 很小时, 这个传播子仍然不为 0, 说明在类空间隔下的两个点之间存在关联, 这与狭义相对论是矛盾的。所以我们应当考虑相对论性量子力学, 此时自由粒子的传播子是

$$\begin{aligned} K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} | \vec{x}_1 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \\ &= \frac{1}{2\pi^2|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \int p \sin(p|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|) e^{-it\sqrt{p^2 + m^2}} dp \\ &\sim e^{-m\sqrt{\vec{x}^2 - t^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

这个传播子在类空间隔下仍然不为 0, 说明相对论性量子力学在因果律方面存在一些问题, 这将在 QFT 中得到回答。

1.1.2 构建理论的一般步骤

- 1 写下拉氏量, 比如 $\mathcal{L}[\phi] = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$
- 2 写下路径积分, 比如 $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathcal{L}[\phi]}$
- 3 对路径积分依照耦合系数进行微扰展开
- 4 微扰计算路径积分
- 5 发现存在发散问题
- 6 正规化来分离发散部分, 比如引入截断 Λ , 于是 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \int_{|x| > \frac{1}{\Lambda}} \frac{1}{x^2} dx$
- 7 令耦合系数为截断的微扰展开式
- 8 重整化, 只考虑路径积分的有限项
- 9 与实验比较
- 10 拿 Nobel 奖, 或者从头开始

1.2 分析力学回顾

1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程

分析力学中, 我们用广义坐标 $q(t)$ 与广义速度 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ 来刻画一个质点系统的运动状态。拉氏量 $L(q_i, \dot{q}_i; t)$ 是关于广义坐标和广义速度的泛函, 用来刻画系统的运动规律。

Note: 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$

泛函 $L: C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, 其中 $C(\Omega)$ 是 Ω 上的全体函数

力学体系的作用量定义为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t); t) dt \quad (4)$$

最小作用量原理 (哈密顿原理): 对于真实的一个运动轨迹, 当坐标发生一个变分后, 作用量不会变小。也就是说 $\delta S = 0$ 。

注: 这里的变分是等时变分, 即 $\delta t = 0$, 故拉氏量的变分中没有 $\frac{\delta L}{\delta t} \delta t$ 项。

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} (\delta \dot{q}_i dt) \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \end{aligned} \quad (5)$$

于是我们得到了 Euler-Lagrange 方程如下

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (6)$$

Euler-Lagrange 方程是系统的运动方程，比如对于一个谐振子，其拉氏量为 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ ，根据 Euler-Lagrange 方程可以得到，这正是谐振子的运动方程 $m\ddot{x} + kx = 0$ 。

考虑 Newton 第二定律 $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$ ，对于保守力 \vec{F} ，一般总可以写成势能的梯度 $\vec{F} = -\nabla V$ ，于是 Newton 第二定律可以写成 $m\ddot{\vec{x}} = -\nabla V$ 。这与 Euler-Lagrange 方程具有相同的形式，即如果令 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$ ，则 Euler-Lagrange 方程给出的正是 Newton 第二定律，并且我们顺便得到了在保守力系统中， $L = T - V$ 。

1.2.2 哈密顿力学

定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

对拉氏量作 Legendre 变换，定义哈密顿量，它是广义坐标和广义动量的函数

$$H(q_i, p_i; t) = p_i \dot{q}_i - L \quad (8)$$

由于 L 不显含 p_i ，我们计算得到 $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ ；以及根据 Euler-Lagrange 方程 (6)， $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} p_i = -\dot{p}_i$ 。于是我们得到了哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (9)$$

对于保守力系统，我们已经证明了其拉氏量等于动能减势能，即 $L = T - V$ 。由 (7)，不难得到 $H = T + V$ 。应注意此式仅对保守力学系统成立，对于经典电磁场下带电质点，其哈密顿量为 $H = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + e\phi(x)$ ，就不再是 $T + V$ 的形式了。

对于一个谐振子，不难计算得到其哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ 。利用哈密顿正则方程，不难得到谐振子的运动方程是

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -kx \\ \dot{q}_i = \frac{p}{m} \end{cases} \quad (10)$$

定义泊松括号

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (11)$$

这里默认对指标 i 求和，称为 Einstein 求和。当然，严格来讲 Einstein 求和是一上一下两个指标求和，称为缩并，本质上来讲是流形的切空间及其对偶空间的内积，这里的 q_i 和 p_i 并不构成流形的切空间和对偶空间，所以这里不强调上下标。当然，更精细的理论会从辛几何的角度来理解分析力学，此时拉格朗日力学是切丛上的力学，哈密顿力学是余切丛上的力学，Einstein 求和也确实是切空间和余切空间的内积。于是可以得到广义坐标和广义动量的对易关系

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jk} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (12)$$

力学量 $F = F(q_i, p_i; t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\quad (13)$$

特别地，对于哈密顿量，我们有

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (14)$$

这意味着 $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$ ，也就是说如果哈密顿量不显含时，那么哈密顿量是一个守恒量。

1.3 量子力学中的谐振子

一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 。定义产生湮灭算符

$$\begin{cases} \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \\ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}) \end{cases} \quad (15)$$

产生与湮灭算符的基本性质是

$$\begin{aligned}\hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle\end{aligned} \quad (16)$$

于是可以求出第 n 能级的态矢量为

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (17)$$

定义粒子数算符 $\hat{N} = \sum_i \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ，于是

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad (18)$$

1.3.1 无耦合多体谐振子与自由全同粒子的粒子数表象

N 个无耦合谐振子的哈密顿量和态空间 (Fock 态) 为

$$\begin{aligned}\hat{H} = \hat{H}_k &= \sum \frac{\hat{p}_k^2}{2m_k} + \frac{1}{2}m_k\omega_k \hat{x}_k^2 = \sum (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})\hbar\omega_k \\ |n_1 n_2 \dots n_k \dots n_N\rangle &= (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}\end{aligned} \quad (19)$$

多体无耦合谐振子的 Fock 态空间可以用于刻画自由全同粒子系统。不严格来讲，可以按照以下表格来对应

谐振子系统	全同粒子系统
第 k 个谐振子	第 m 个粒子
$E = \sum_{k=1}^N n_k \hbar \omega_k$	$E = \sum_{m=1}^N n_m E_m$
Quanta in oscillators	particles in momentum

真空态定义为 $|\Omega\rangle = |00\rangle$, 于是 $\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger |\Omega\rangle \propto |11\rangle$, 以及 $\hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger |\Omega\rangle \propto |11\rangle$ 。我们可以得到

$$\hat{a}_{p_1}^\dagger \hat{a}_{p_2}^\dagger = \lambda \hat{a}_{p_2}^\dagger \hat{a}_{p_1}^\dagger, \quad |\lambda| = 1 \quad (20)$$

其中 $\lambda = 1$ 时为玻色子, $\lambda = -1$ 时为费米子, $\lambda = e^{i\theta}$ 为任意子。玻色子和费米子产生湮灭算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] &= [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \delta_{ij} \\ |n_1 n_2 \dots\rangle &= \Pi_m \frac{1}{\sqrt{n_m!}} (\hat{a}_{p_m}^\dagger)^{n_m} |0\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} &= \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = 0 \\ \{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (22)$$

1.3.2 多体耦合谐振子

经典耦合谐振子的哈密顿量

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} K (q_{j+1} - q_j)^2 \quad (23)$$

这里广义坐标 q_j 是第 j 个谐振子绝对位置相对于其平衡位置的相对坐标, 我们假定相邻两个谐振子平衡位置的距离是 a , 于是第 j 个谐振子的平衡位置是 ja , 它的绝对位置是 $x_j = q_j + ja$ 。对于两个耦合谐振子的情形, 我们可以对坐标 (q_1, q_2) 做可逆变换

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

对动量也做相同变换, 我们不难将哈密顿量改写成无耦合的形式 $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 q_2^2$ 。但是如果用相同的方式处理 N 个耦合谐振子, 这个可逆矩阵并不容易构造, 于是我们尝试傅里叶变换的方法。从泛函分析的观点来看, 傅里叶变换实际上是希尔伯特空间上的基矢变换。我们不难知道, 全体满足哈密顿正则方程的 $(q_1(t), \dots, q_n(t); p_1(t), \dots, p_n(t))$ 张成一个有限维线性空间, 因此是一个希尔伯特空间。我们取这个线性空间的一组基 $\{(e^{i(ka-\omega t)}, \dots, e^{i(kja-\omega t)}, \dots, e^{i(kNa-\omega t)}; e^{i(ka-\omega t)}, \dots, e^{i(kja-\omega t)}, \dots, e^{i(kNa-\omega t)}) : k \in \mathbb{R}\}$, 这组基的物理图像是一个行波运动在这个谐振子链上, 每个谐振子的相位由其平衡位置坐标决定。我们对系统要求周期性边界条件 $x_{N+j} = x_j$, 进而对波矢 k 有一个限制条件:

$$e^{ikNa} = 1 \quad (25)$$

于是有 $k = \frac{2n\pi}{Na}$, 共有 N 种允许的取值, 恰好可以描述系统的 N 个独立自由度。于是对 $q_j(t)$ 和 $p_j(t)$ 可做线性展开, 即离散傅里叶变换

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{q}_j e^{-ikja} \\ p_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{p}_j e^{ikja} \end{aligned} \quad (26)$$

$e^{i(kja-\omega t)}$ 称为波矢 k 的振动模式或第 k 个振动模式, 之后将会看到, 它代表了一个集体激发, 在固体物理中称为格波, 波矢 k 是格波波矢, 对格波做正则量子化后得到声子。利用傅里叶变换, 哈密顿量可以转化为

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2m} \tilde{p}_k \tilde{p}_{-k} + \frac{1}{2} m \omega_k^2 \tilde{q}_k^2 \quad (27)$$

这是 N 个无耦合的谐振子的系统哈密顿量，其中声子的振动频率 $\omega_k^2 = \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$ ， K 是弹簧劲度系数， k 是格波波矢。接下来我们对其进行正则量子化，引入产生湮灭算符

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_k}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \\ \tilde{p}_k &= -i\sqrt{\frac{2m\hbar\omega_k}{2}} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger) \end{aligned} \quad (28)$$

于是哈密顿量变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \frac{1}{2} \hbar \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}) \quad (29)$$

由于 $\hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} = \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger + 1$ ，于是哈密顿量进而变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \hbar \omega_k (\hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2}) \quad (30)$$

其中，当系统的谐振子数 N 趋于无穷时，第二项会贡献一个无穷大的零点能，不具有可观测效应，这个之后我们再详细讨论。

附：多体耦合谐振子哈密顿量的直接对角化

以上对于多体耦合谐振子哈密顿量，我们采用傅里叶变换的方式将其对角化，使其变成无耦合模式的哈密顿量。事实上，我们也可以像分析力学一样，直接对 (q_1, \dots, q_N) 做可逆变换，来得到哈密顿量的简正模式。我们首先将经典哈密顿量写成矩阵形式：

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p_1, \dots, p_N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix} + \frac{K}{2} (q_1, \dots, q_N) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} \quad (31)$$

设可逆矩阵 T 可以将经典哈密顿量对角化，即

$$T \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_1 \\ \dots \\ p'_N \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_1 \\ \dots \\ q'_N \end{pmatrix} \quad (32)$$

使得哈密顿量变为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p'_1, \dots, p'_N) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ \dots \\ p'_N \end{pmatrix} + \frac{K}{2} (q'_1, \dots, q'_N) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_1 \\ \dots \\ q'_N \end{pmatrix} = \sum_k \left(\frac{p_k'^2}{2m} + \frac{K\lambda_k}{2} q_k'^2 \right) \quad (33)$$

这样经典哈密顿量就变成无耦合谐振子系统的哈密顿量了,而主要困难在于如何求出特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, 即求解行列式方程

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

这个行列式可以根据线性代数的循环行列式来计算:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ a_n & a_0 & \dots & a_{n-1} \\ & \dots & \dots & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = f(\omega_1)f(\omega_2)\dots f(\omega_n) \quad (35)$$

其中 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^{n-1}$, 以及 $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 是 $z^n = 1$ 的第 k 个根。取 $a_0 = \lambda - 2$, $a_1 = 1$, $a_n = 1$, 其余 $a_k = 0$, 于是

$$f(x) = \lambda - 2 + x + x^{n-1} \quad (36)$$

所以行列式等于

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^N (\lambda - 2 + e^{i\frac{2k\pi}{N}} + e^{i\frac{2k\pi(N-1)}{N}}) \\ &= \prod_{k=1}^N (\lambda - 2 + e^{i\frac{2k\pi}{N}} + e^{-i\frac{2k\pi}{N}}) \\ &= \prod_{k=1}^N (\lambda - (2 - 2\cos\frac{2k\pi}{N})) \end{aligned} \quad (37)$$

所以全体简正模式的特征值为

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{N} = 2\sin^2\frac{2k\pi}{N} \quad (38)$$

这与我们用傅里叶变换得到的结果是一致的。剩下的步骤与无耦合谐振子系统是一致的,在此就不赘述了。

1.4 二次量子化：波函数算符化

不严格地来讲,一次量子化可以理解为把粒子变成波,二次量子化可以理解为把波变成粒子。(二次量子化:对于多个自由粒子,将具有相同状态的粒子平面波构成的波包视为状态特定的“粒子”?产生湮灭算符作用在一个波包上面产生或者湮灭一个平面波。)

在粒子数表象下，波函数变为算符，作用在多粒子态上在 \mathbf{x} 处产生确定的具有不同动量的粒子。

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ \Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p \hat{a}_p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{cases} \quad (39)$$

玻色子和费米子分别满足对易关系和反对易关系

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})] &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})] &= [\Psi^\dagger(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})] = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})\} &= \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{y})\} &= \{\Psi^\dagger(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{y})\} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

于是算符可以表达为

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle\alpha| \hat{A} |\beta\rangle \langle\beta| \\ &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle\beta| \\ &= \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \end{aligned} \quad (42)$$

特别地，动量算符、哈密顿量算符（自由粒子）、势能算符表达为

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \sum_p \vec{p} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_p \vec{p} \hat{n}_p \\ \hat{H} &= \sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m} \hat{n}_p \\ \hat{V} &= \sum_{p_1, p_2} V_{\vec{p}_1 - \vec{p}_2} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p = \sum_{p_1, p_2} V_{\vec{p}_1 - \vec{p}_2} \hat{n}_p \end{aligned} \quad (43)$$

1.5 多体系统的连续极限与场概念的引入

核心思路是：单体系统-> 多体系统-> 连续极限-> 场

多体谐振子的哈密顿量和拉氏量是

$$\begin{aligned} H &= \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right) \\ L &= \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} - \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \right) \end{aligned} \quad (44)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时，我们可以认为 $\frac{q_{j+1} - q_j}{l} \rightarrow \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial x} \sim \nabla \phi$ ，即连续极限下，离散的格点可以过渡到连续的场。此时，动能和势能分别过渡到

$$\begin{aligned} T &= \sum_j \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{l} \int dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t} \right)^2 = \int dx \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \\ V &= \sum_j \frac{1}{2} k (q_{j+1} - q_j)^2 \rightarrow \sum_j k l^2 \left(\frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial x} \right)^2 \sim \int dx \tau (\nabla \phi)^2 \end{aligned} \quad (45)$$

这样，哈密顿量和拉氏量过渡到连续体系中变成

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau (\nabla \phi)^2 \right] \\ L &= \int d^3 \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau (\nabla \phi)^2 \right] \end{aligned} \quad (46)$$

场论中我们希望所有可观测量满足 Lorentz 协变性，但哈密顿量和拉氏量在 Lorentz 变换下都不是协变量，这为我们研究可观测量带来不便。我们可以引入拉氏密度 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2$ ，这是一个 Lorentz 协变量，于是拉氏量可以表示为 $L = \int d^3x \mathcal{L}$ 。这样，作用量就可以写成 Lorentz 协变的形式

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L} \quad (47)$$

最小作用量原理给出场论中的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (48)$$

仿照分析力学，我们可以引入 ϕ 场的正则共轭动量场，以及哈密顿量密度

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \\ \mathcal{H} &= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \end{aligned} \quad (49)$$

类似有正则方程

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi)} \end{cases} \quad (50)$$

1.6 经典相对论性场

我们采用记号 $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 的度规。

1.6.1 张量运算复习

考虑闵氏时空，坐标 $x^\mu = (t, \vec{x})$ ， $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x})$ 。取自然单位制 $c = \hbar = 1$ ，此时

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) \\ p^2 &= p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \\ \partial^2 &= \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (51)$$

1.6.2 基本的经典相对论性场

在场论中，我们所研究的场必须满足 Lorentz 对称性，用数学语言讲，就是场必须是 Poincare 群的群表示。通过对 Poincare 群的结构进行分析，低自旋的相对论性场只有以下几种

实标量场 Klein-Gorden 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

经典拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$

复标量场 $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ ， $\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

经典拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$

Dirac 场 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0$

经典拉氏量 $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi$

γ 矩阵将在后面进行详细介绍。

电磁场 Maxwell 方程组

$$\text{经典拉氏量 } \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

1.6.3 电磁场的进一步讨论

由 $F_{\mu\nu}$ 可以构造出两个 Lorentz 标量: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$ 和 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \propto \vec{E} \cdot \vec{B}$, 其中第二项是 Lorentz 赝标量, 会破坏宇称, 与量子反常和拓扑效应有密切的关系。

在进阶的场论中, 我们将会知道, Lorentz 对称性要求无质量的矢量场必须耦合到一个守恒流上, 即

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (53)$$

基于电磁场的拉氏量, 可以推导出 Maxwell 方程组

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (54)$$

$$\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (55)$$

其中 $G_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 是 $F_{\mu\nu}$ 的对偶 (Hodge duality)。此外, (55) 也可以由 $F^{\mu\nu}$ 的 Bianchi 恒等式

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

得到。

我们知道在经典电磁学中, 如果引入磁单极子, 那么在 (55) 的右侧需要引入磁荷密度和磁流密度, 即

$$\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = J_m^\mu \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \\ \nabla \times \vec{E} = \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad (56)$$

1.6.4 标量场

实标量场的拉氏量写作

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 \quad (57)$$

由 Euler-Lagrange 方程可得 Klein-Gorden 方程:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \quad (58)$$

我们称系数 m 为质量, 我们在动量空间来理解它的物理意义。动量空间中 $\partial_\mu \rightarrow ip_\mu$, 于是动量空间的 KG 方程是 $(-p^\mu p_\mu + m^2)\phi = 0$ 。即 ϕ 的质量是 m_ϕ , 由狭义相对论的能量动量关系 $E^2 = \vec{p}^2 + m_\phi^2$ 知道 $p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = -m_\phi^2$, 于是 $m^2 = m_\phi^2$, 说明 KG 方程的系数 m^2 代表了 ϕ 的质量。

ϕ^4 理论的拉氏量是

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \quad (59)$$

这是场论中最重要的一个例子，后面几章我们将会深入研究它。

最后，对于 Klein-Gorden 方程的物理图像，我们做以下注记。在相对论性量子力学中，我们将 $\phi(x)$ 诠释为一个相对论性粒子的波函数， $|\phi(x)|^2$ 诠释为该粒子出现在 x 的概率，KG 方程是这个粒子的运动方程，地位相当于量子力学中的薛定谔方程。但是到场论中，我们的物理图像是完全不同的。这里，我们将 $\phi(x)$ 诠释为一个经典场，类似于经典流体的流速场或者经典电磁场，KG 方程是这个经典场的运动方程，地位相当于流体力学中的 Navier-Stokes 方程或者电动力学中的 Maxwell 方程组。事实上，这个物理图像在场论中是普遍的，狄拉克场、电磁场都是这样的物理图像，甚至在非相对论场论中，薛定谔方程的物理图像也转换为一个经典场的场方程。量子场论的正则量子化，就是对各种经典场来做量子化的。

2 量子力学中的对称性

2.1 概述

么正算符复习

么正算符的生成元

变换的主动观点与被动观点

主动观点：态不变，参考系变换

被动观点：态变换，参考系不变

希尔伯特空间的 $U(1)$ 对称性：量子力学中的物理态并不构成希尔伯特空间，而是希尔伯特空间模掉复数 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ 的商空间，有时称为投影希尔伯特空间。对于有限维情形，物理态空间就是复射影空间 $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n / \mathbb{C}^\times$ 。而态矢量 $|\psi\rangle$ 由于是归一化的并且具有自由全局相位，因此既不定义在希尔伯特空间上，也不定义在物理态空间上，而是定义在希尔伯特空间模掉正实数 \mathbb{R}^+ 的商空间上，模掉 \mathbb{R}^+ 代表了态的归一化。态矢量 $|\psi\rangle$ 的自由相位在微分几何上代表了物理态空间上的纤维，因而态矢量构成的空间是物理态空间上的纤维丛，这在拓扑学上称为 Hopf 纤维化。

以二能级系统为例，其物理态空间是 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 / \mathbb{C}^\times$ ，拓扑上同胚于单位球面 S^2 ，因此可以用 Bloch 球上的点来描述物理态；而态矢量的空间是 $\mathbb{C}^2 / \mathbb{R}^+$ ，拓扑上同胚于高维球面 S^3 ，可以定义 Hopf 映射 $\pi: S^3 \rightarrow S^2$ ，可以诱导一个纤维 $S^3 / \pi = U(1)$ ，这正是态矢量的全局相位所构成的群。

2.2 典型的么正算符

2.2.1 时间平移

一个量子态由 t_1 演化到 t_2 的过程可以表述为

$$|\psi(t_2)\rangle = \hat{U}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad (60)$$

$\hat{U}(t_2, t_1)$ 称为时间演化算符，满足性质

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t) &= 1 \\ \hat{U}(t_3, t_2) \hat{U}(t_2, t_1) &= \hat{U}(t_3, t_1) \\ \hat{U}(t_1, t_2) &= \hat{U}^\dagger(t_2, t_1) = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) \\ \hat{U}(t_4, t_3) [\hat{U}(t_3, t_2) \hat{U}(t_2, t_1)] &= [\hat{U}(t_4, t_3) \hat{U}(t_3, t_2)] \hat{U}(t_2, t_1) \end{aligned} \quad (61)$$

因此全体时间演化算符 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 构成李群。我们考虑无穷小的时间平移

$$|\Psi(t + dt)\rangle = U(dt) |\psi(t)\rangle \quad (62)$$

由于

$$|\psi(t + dt)\rangle = |\psi(t)\rangle + \frac{d\psi(t)}{dt} dt \quad (63)$$

以及薛定谔方程

$$\hat{H}(t) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad (64)$$

可得

$$|\psi(t + dt)\rangle = (1 - i\hat{H}dt) |\psi(t)\rangle \quad (65)$$

对于有限长时间的演化

$$\begin{aligned} |\psi(0 + t)\rangle &= (1 - i\hat{H}(t_N \equiv t)dt)(1 - i\hat{H}(t_{N-1})dt)\dots(1 - i\hat{H}(t_1)dt)(1 - i\hat{H}(t_0 \equiv 0)dt) |\psi(0)\rangle \\ &= e^{-i\mathbb{T} \int \hat{H} dt} \end{aligned} \quad (66)$$

其中 \mathbb{T} 代表编时乘积。

2.2.2 空间平移

我们将一个量子态由 x 平移到 $x+dx$ 处 (被动观点), 于是

$$\begin{aligned} |\psi(x + dx)\rangle &= |\psi(x)\rangle + \frac{d|\psi(x)\rangle}{dx} dx \\ &= (1 + i\hat{p}dx) |\psi(x)\rangle \end{aligned} \quad (67)$$

对于有限远平移

$$|\psi(x + a)\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + i\hat{p} \frac{a}{N})^N |\psi(x)\rangle = e^{i\hat{p}a} |\psi(x)\rangle \quad (68)$$

若使用主动观点

$$\hat{U}(a) = e^{-i\hat{p}a} \quad (69)$$

综合考虑时空平移

$$\hat{U}(a_\mu) = e^{-ip^\mu a_\mu} = e^{-i\hat{H}t + i\hat{\vec{p}} \cdot \vec{a}} \quad (70)$$

2.3 转动变换

二维转动

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (71)$$

三维转动的刻画有多种方式，例如由绕 x 轴、y 轴、z 轴的三种转动复合构成，又如欧拉角。我们考虑 x,y,z 轴三种转动的复合

$$R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

一般转动矩阵是

$$R(\vec{\theta}) = R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) \quad (75)$$

转动矩阵的性质

全体转动矩阵构成 $O(3)$ 群。由于 $O(3)$ 并不是一个连通的流形，我们考虑其连通分支 $SO(3)$ ，代表连续变换。其余变换可以分解为反射变换和连续变换的复合。

考虑连续转动矩阵作用于量子态上。由于量子态空间构成线性空间，因此是 $SO(3)$ 群的群表示。以动量本征态为例，动量本征态和动量算符的变换是

$$\begin{aligned} |R(\vec{\theta})\vec{p}\rangle &= \hat{U}(\vec{\theta}) |\vec{p}\rangle \\ \hat{U}(\vec{\theta})\hat{p}\hat{U}^\dagger(\vec{\theta}) &= R(\vec{\theta})\hat{p} \end{aligned} \quad (76)$$

转动变换的生成元是角动量，于是转动变换的么正算符

$$\hat{U}(\vec{\theta}) = e^{-i\hat{J}\cdot\vec{\theta}} = e^{-i(\hat{J}\cdot\vec{n})\theta} \quad (77)$$

3 自由场的量子化

4 相互作用的量子场与费曼图