上海大学研究生

量子场论讲义

主讲：陆杰

整理：杨光耀 严禹坤 吴梦之

目录

1 引言

1.1 引言

构建 OFT 的一些初衷

- 相对论性量子力学中的负能态问题
- 量子力学二级微扰论的虚粒子的诠释
- 因果律 (causality)

1.1.1 因果律问题的分析

我们考虑传播子

$$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1) := \langle \vec{x}_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | \vec{x}_1 \rangle \tag{1}$$

其中 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 是时间演化算符。这一项的物理意义是，假设在 t1 时刻有一个由 $|\vec{x}_1\rangle$ 来刻画的量子态，即位于 $\vec{x}_1$ 处的坐标算符本征态。让这个态经过一段时间演化后，它会变成弥漫于空间的波，在 t2 时刻有一定几率处于 $\vec{x}_2$，$K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1)$ 所刻画的正是这个概率。在狭义相对论中，我们知道物质的运动和信息的传播都不能超光速，即类空的两点之间不应该有关联，所以类空的两点之间的传播子应该为 0。我们计算非相对论性量子力学中的自由粒子的传播子可以得到:(取 Planck 常数 $\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{x}_1 \rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x}_2 | e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} | \vec{p} \rangle < \vec{p} | \vec{x}_1 > \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t} e^{i\dot{\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{3/2} e^{im|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|/2t}
\end{aligned} \tag{2}$$

当 $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$ 很大而 t 很小时，这个传播子仍然不为 0，说明在类空间隔下的两个点之间存在关联，这与狭义相对论是矛盾的。所以我们应当考虑相对论性量子力学，此时自由粒子的传播子是

$$\begin{aligned}
K(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t, 0) &= \langle \vec{x}_2 | e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} | \vec{x}_1 \rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{i\dot{\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \int p \sin(p|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|) e^{-it\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} dp \\
&\sim e^{-m\sqrt{\vec{x}^2 - t^2}}
\end{aligned} \tag{3}$$

这个传播子在类空间隔下仍然不为 0，说明相对论性量子力学在因果律方面存在一些问题，这将在 QFT 中得到回答。

1.1.2 构建理论的一般步骤

1 写下拉氏量，比如 $\mathcal{L}[\phi]=\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2+\lambda\phi^4$

2 写下路径积分，比如 $Z=\int\mathcal{D}\phi e^{i\int\mathcal{L}[\phi]}$

3 对路径积分依照耦合系数进行微扰展开

4 微扰计算路径积分

5 发现存在发散问题

6 正规化来分离发散部分，比如引入截断 Λ，于是 $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2}dx\to\int_{|x|>\frac{1}{\Lambda}}\frac{1}{x^2}dx$

7 令耦合系数为截断的微扰展开式

8 重整化，只考虑路径积分的有限项

9 与实验比较

10 拿 Nobel 奖，或者从头开始

1.2 分析力学回顾

1.2.1 最小作用量原理与 Euler-Lagrange 方程

分析力学中，我们用广义坐标 $q(t)$ 与广义速度 $\dot{q}=\frac{dq}{dt}$ 来刻画一个质点系统的运动状态。拉氏量 $L(q_i,\dot{q}_i;t)$ 是关于广义坐标和广义速度的泛函，用来刻画系统的运动规律。

Note: 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$

泛函 $L:C(\Omega)\to\mathbb{R}$，其中 $C(\Omega)$ 是 Ω 上的全体函数

力学体系的作用量定义为

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i(t),\dot{q}_i(t);t)dt \tag{4}$$

最小作用量原理 (哈密顿原理)：对于真实的一个运动轨迹，当坐标发生一个变分后，作用量不会变小。也就是说 $\delta S=0$。

注：这里的变分是等时变分，即 $\delta t=0$，故拉氏量的变分中没有 $\frac{\delta L}{\delta t}\delta t$ 项。

$$\begin{aligned}
0=\delta S&=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i;t)dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i+\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i+\int_{t_1}^{t_2}(\delta\dot{q}_i dt)\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{\delta L}{\delta q_i}\delta q_i+\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i}\delta q_i|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i})\delta q_i\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta\dot{q}_i})\right)\delta q_i
\end{aligned}\tag{5}$$

于是我们得到了 Euler-Lagrange 方程如下

$$\frac{\delta L}{\delta q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}) = 0 \tag{6}$$

Euler-Lagrange 方程是系统的运动方程，比如对于一个谐振子，其拉氏量为 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$，根据 Euler-Lagrange 方程可以得到，这正是谐振子的运动方程 $m\ddot{x} + kx = 0$。

考虑 Newton 第二定律 $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$, 对于保守力 $\vec{F}$, 一般总可以写成势能的梯度 $\vec{F} = \nabla V$, 于是 Newton 第二定律可以写成 $m\ddot{\vec{x}} - \nabla V$。这与 Euler-Lagrange 方程具有相同的形式，即如果令 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$，则 Euler-Lagrange 方程给出的正是 Newton 第二定律，并且我们顺便得到了在保守力系统中，$L = T - V$。

1.2.2 哈密顿力学

定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7}$$

对拉氏量作 Legendre 变换，定义哈密顿量，它是广义坐标和广义动量的函数

$$H(q_i, p_i; t) = p_i\dot{q}_i - L \tag{8}$$

由于 L 不显含 p_i, 我们计算得到 $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$; 以及根据 Euler-Lagrange 方程 (6), $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt}q_i = -\dot{q}_i$。于是我们得到了哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \tag{9}$$

对于保守力系统，我们已经证明了其拉氏量等于动能减势能，即 $L = T - V$。由 (7)，不难得到 $H = T+V$。应注意此式仅对保守力学系统成立,对于经典电磁场下带电质点,其哈密顿量为 $H = \frac{(\vec{p}+e\hat{A})^2}{2m} + e\phi(x)$，就不再是 $T + V$ 的形式了。

对于一个谐振子，不难计算得到其哈密顿量 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$。利用哈密顿正则方程，不难得到谐振子的运动方程是

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -kx \\ \dot{q}_i = \frac{p}{m} \end{cases} \tag{10}$$

定义泊松括号

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{11}$$

这里默认对指标 i 求和，称为 Einstein 求和。当然，严格来讲 Einstein 求和是一上一下两个指标求和，称为缩并，本质上来讲是流形的切空间及其对偶空间的内积，这里的 q_i 和 p_i 并不构成流形的切空间和对偶空间，所以这里不强调上下标。当然，更精细的理论会从辛几何的角度来理解分析力学，此时拉格朗日力学是切丛上的力学，哈密顿力学是余切丛上的力学，Einstein 求和也确实是切空间和余切空间的内积。于是可以得到广义坐标和广义动量的对易关系

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \\ &= \delta_{ik}\delta_{jk} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{12}$$

力学量 $F=F(q_i,p_i;t)$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}+\frac{\partial F}{\partial t}\\&=\{F,H\}+\frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}\tag{13}$$

特别地，对于哈密顿量，我们有

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}\tag{14}$$

这意味着 $\frac{\partial H}{\partial t}=0\Rightarrow\frac{dH}{dt}=0$，也就是说如果哈密顿量不显含时，那么哈密顿量是一个守恒量。

1.3 量子力学中的谐振子

一维谐振子的哈密顿量 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\frac{1}{2}m\omega^2x^2$。定义产生湮灭算符

$$\begin{cases}\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p})\\\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p})\end{cases}\tag{15}$$

产生与湮灭算符的基本性质是

$$\begin{aligned}\hat{a}\left|n\right\rangle&=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle\\\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle&=\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle\end{aligned}\tag{16}$$

于是可以求出第 n 能级的态矢量为

$$\left|n\right\rangle=\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle\tag{17}$$

定义粒子数算符 $\hat{N}=\sum_i\hat{a}^\dagger\hat{a}$，于是

$$\hat{N}\left|n\right\rangle=n\left|n\right\rangle\tag{18}$$

1.3.1 无耦合多体谐振子与自由全同粒子的粒子数表象

N 个无耦合谐振子的哈密顿量和态空间 (Fock 态) 为

$$\begin{aligned}\hat{H}=\hat{H}_k=\sum\frac{\hat{p}_k^2}{2m_k}+\frac{1}{2}m_k\omega_k\hat{x}_k^2=\sum(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})\hbar\omega_k\\\left|n_1n_2...n_k...n_N\right\rangle=(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}...(\hat{a}_N^\dagger)^{n_N}\end{aligned}\tag{19}$$

多体无耦合谐振子的 Fock 态空间可以用于刻画自由全同粒子系统。不严格来讲，可以按照以下表格来对应

谐振子系统	全同粒子系统
第 k 个谐振子	第 m 个粒子
$E=\sum_{k=1}^N n_k\hbar\omega_k$	$E=\sum_{m=1}^N n_mE_m$
Quanta in oscillators	particles in momentum

真空态定义为 $|\Omega\rangle = |00\rangle$，于是 $\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2}|\Omega\rangle \propto |11\rangle$，以及 $\hat{a}^\dagger_{p_2}\hat{a}^\dagger_{p_1}|\Omega\rangle \propto |11\rangle$。我们可以得到

$$\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2} = \lambda\hat{a}^\dagger_{p_2}\hat{a}^\dagger_{p_1},\ |\lambda| = 1 \tag{20}$$

其中 $\lambda = 1$ 时为玻色子，$\lambda = -1$ 时为费米子，$\lambda = e^{i\theta}$ 为任意子。玻色子和费米子产生湮灭算符的对易关系为

$$\begin{aligned} [\hat{a}^\dagger_i, \hat{a}^\dagger_j] = [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \\ [\hat{a}_i, \hat{a}^\dagger_j] = \delta_{ij} \\ |n_1 n_2 ...\rangle = \Pi_m \frac{1}{\sqrt{n_m!}}(\hat{a}^\dagger_{p_m})^{n_m}|0\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \{\hat{c}^\dagger_i, \hat{c}^\dagger_j\} = \{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = 0 \\ \{\hat{c}_i, \hat{c}^\dagger_j\} = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{22}$$

1.3.2 多体耦合谐振子

经典耦合谐振子的哈密顿量

$$H = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2}k(q_{j+1} - q_j)^2 \tag{23}$$

这里广义坐标 q_j 是第 j 个谐振子绝对位置相对于其平衡位置的相对坐标，我们假定相邻两个谐振子平衡位置的距离是 a，于是第 j 个谐振子的平衡位置是 ja，它的绝对位置是 $x_j = q_j + ja$。对于两个耦合谐振子的情形，我们可以对坐标 (q_1, q_2) 做可逆变换

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

对动量也做相同变换，我们不难将哈密顿量改写成无耦合的形式 $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 q_2^2$。但是如果用相同的方式处理 N 个耦合谐振子，这个可逆矩阵并不容易构造，于是我们尝试傅里叶变换的方法。从泛函分析的观点来看，傅里叶变换实际上是希尔伯特空间上的基矢变换。我们不难知道，全体满足哈密顿正则方程的 $(q_1(t), ..., q_n(t); p_1(t), ..., p_n(t))$ 张成一个有限维线性空间，因此是一个希尔伯特空间。我们取这个线性空间的一组基 $\{(e^{i(ka-\omega t)}, e^{i(k2a-\omega t)}, ..., e^{i(kja-\omega t)}, ..., e^{i(kNa-\omega t)}; e^{i(ka-\omega t)}, ..., e^{i(kNa-\omega t)})\}$。我们对系统要求周期性边界条件 $x_{N+j} = x_j$，进而对波矢 k 有一个限制条件:

$$e^{ikNa} = 1 \tag{25}$$

于是有 $k = \frac{2n\pi}{N}$，共有 N 种允许的取值，恰好可以系统的 N 个独立自由度。于是对 $q_j(t)$ 和 $p_j(t)$ 可做线性展开，即离散傅里叶变换

$$\begin{aligned} q_j = \tfrac{1}{\sqrt{N}}\textstyle\sum_k \tilde{q}_j e^{-ikja} \\ q_j = \tfrac{1}{\sqrt{N}}\textstyle\sum_k \tilde{p}_j e^{ikja} \end{aligned} \tag{26}$$

$e^{i(kja-\omega t)}$ 称为波矢 k 的振动模式或第 k 个振动模式，接下来将看到，它代表了一个集体激发，在固体物理中称为格波，波矢 k 是格波波矢，对格波做正则量子化后得到声子。于是哈密顿量变成

$$\hat{H} = \sum_k \frac{1}{2m}\tilde{p}_k\tilde{p}_{-k} + \frac{1}{2}m\omega_k^2\tilde{q}_k^2 \tag{27}$$

这是 N 个无耦合的谐振子的系统哈密顿量，其中声子的振动频率 $\omega_k^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$。接下来我们对其进行正则量子化，引入产生湮灭算符

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega_k}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)\\ \tilde{p}_k &= -i\sqrt{\tfrac{2m\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)\end{aligned} \tag{28}$$

于是哈密顿量变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \frac{1}{2}\hbar\omega_k(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_{-k}^\dagger\hat{a}_{-k}) \tag{29}$$

由于 $\hat{a}_{-k}^\dagger\hat{a}_{-k} = \hat{a}_{-k}\hat{a}_{-k}^\dagger + 1$，于是哈密顿量进而变成

$$\hat{H} = \sum_k^N \hbar\omega_k(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger + \frac{1}{2}) \tag{30}$$

其中，当系统的谐振子数 N 趋于无穷时，第二项会贡献一个无穷大的零点能，不具有可观测效应，这个之后我们再详细讨论。

1.4 二次量子化：波函数算符化

不严格地来讲，一次量子化可以理解为把粒子变成波，二次量子化可以理解为把波变成粒子。(二次量子化：对于多个自由粒子，将具有相同状态的粒子平面波构成的波包视为状态特定的“粒子”？产生湮灭算符作用在一个波包上面产生或者湮灭一个平面波。)。

在粒子数表象下，波函数变为算符，作用在多粒子态上在 x 处产生确定的具有不同动量的粒子。

$$\begin{cases}\Psi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p \hat{a}_p^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\\ \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_p \hat{a}_p e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\end{cases} \tag{31}$$

玻色子和费米子分别满足对易关系和反对易关系

$$\begin{aligned}[\Psi(\vec{x}),\Psi^\dagger(\vec{y})] &= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\\ [\Psi(\vec{x}),\Psi(\vec{y})] &= [\Psi^\dagger(\vec{x}),\Psi^\dagger(\vec{y})] = 0\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\{\Psi(\vec{x}),\Psi^\dagger(\vec{y})\} &= \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\\ \{\Psi(\vec{x}),\Psi(\vec{y})\} &= \{\Psi^\dagger(\vec{x}),\Psi^\dagger(\vec{y})\} = 0\end{aligned} \tag{33}$$

于是算符可以表达为

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \sum_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle\langle\beta|\\ &= \sum_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}|\alpha\rangle\langle\beta|\\ &= \sum_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\hat{a}_\alpha^\dagger\hat{a}_\beta\end{aligned} \tag{34}$$

特别地，动量算符、哈密顿量算符 (自由粒子)、势能算符表达为

$$\begin{array}{l} \hat{p}=\sum_p \vec{p}\ \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p=\sum_p \vec{p}\ \hat{n}_p \\ \hat{H}=\sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m}\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p=\sum_p \frac{\vec{p}^2}{2m}\hat{n}_p \\ \hat{V}=\sum_{p_1,p_2} V_{\vec{p_1}-\vec{p_2}}\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p=\sum_{p_1,p_2} V_{\vec{p_1}-\vec{p_2}}\hat{n}_p \end{array} \tag{35}$$

1.5 多体系统的连续极限与场概念的引入

多体谐振子的哈密顿量和拉氏量是

$$\begin{array}{l} H=\sum_j (\frac{p_j^2}{2m}+\frac{1}{2}k(q_{j+1}-q_j)^2) \\ L=\sum_j (\frac{p_j^2}{2m}-\frac{1}{2}k(q_{j+1}-q_j)^2) \end{array} \tag{36}$$

当 $N\to\infty$ 时，我们可以认为 $\frac{q_{j+1}-q_j}{l}\to\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial x}\sim\nabla\phi$，即连续极限下，离散的格点可以过渡到连续的场。此时，动能和势能分别过渡到

$$\begin{aligned} T&=\sum_j \frac{1}{2}m(\frac{\partial q_i}{\partial t})^2\to\frac{1}{l}\int dx\frac{1}{2}(\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial t})^2=\int dx\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 \\ V&=\sum_j \frac{1}{2}k(q_{j+1}-q_i)^2\to\sum_j kl^2(\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}})^2\sim\int dx\tau(\nabla\phi)^2 \end{aligned} \tag{37}$$

这样，哈密顿量和拉氏量过渡到连续体系中变成

$$\begin{aligned} H&=\int d^3\big[\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2+\frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2\big] \\ L&=\int d^x\big[\frac{1}{2}\rho(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2-\frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2\big] \end{aligned} \tag{38}$$

场论中我们希望所有可观测量满足 Lorentz 协变性，但哈密顿量和拉氏量在 Lorentz 变换下都不是协变量，这为我们研究可观测量带来不便。我们可以引入拉氏密度 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}\rho\big(\frac{\partial\phi}{\partial t}\big)^2-\frac{1}{2}\tau(\nabla\phi)^2$，这是一个 Lorentz 协变量，于是拉氏量可以表示为 $L=\int d^x\mathcal{L}$。这样，作用量就可以写成 Lorentz 协变的形式

$$S=\int dtL=\int d^4x\mathcal{L} \tag{39}$$

最小作用量原理给出场论中的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0 \tag{40}$$

仿照分析力学，我们可以引入 ϕ 场的正则共轭动量场，以及哈密顿量密度

$$\begin{aligned} \pi(x)&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \\ \mathcal{H}&=\pi\dot{\phi}-\mathcal{L} \end{aligned} \tag{41}$$

类似有正则方程

$$\begin{cases} \dot{\phi}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} \\ \dot{\pi}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}+\nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)} \end{cases} \tag{42}$$

1.6 relativistic

我们采用记号 $\eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ 的度规。

张量运算复习

考虑闵氏时空，坐标 $x^\mu = (t, \vec{x})$ ，$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x})$。取自然单位制 $c = \hbar = 1$, 此时

$$
\begin{aligned}
& p^\mu = (E, \vec{p}) \\
& p^2 = p^\mu p^\mu \eta_{\mu\mu} = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \\
& \partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu
\end{aligned}
\tag{43}
$$

常见的场

实标量场 Klein-Gorden 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$

拉氏量 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

复标量场 $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$，$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

拉氏量 $\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$

Dirac 场

电磁场 $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$

$$
F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}
\tag{44}
$$

因此 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$

除 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 外，$F_{\mu\nu}$ 还可构造出一个 Lorentz 赝标量 $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \propto \vec{E}\cdot\vec{B}$，这一项会破坏宇称，与量子反常和拓扑效应有密切的关系。

U(1) 对称性与流守恒

$$
\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{45}
$$

Maxwell 方程组

$$
\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu \ \Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \rho \\ \nabla\times\vec{B} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{46}
$$

$$
\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{47}
$$

其中 $G_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ 是 $F_{\mu\nu}$ 的对偶 (Hodge duality)。此外，(47) 也可以由 $F^{\mu\nu}$ 的 Bianchi 恒等式

$$
\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0
$$

得到。

我们知道在经典电磁学中，如果引入磁单极子，那么在 (47) 的右侧需要引入磁荷密度和磁流密度，即

$$
\partial_\lambda G^{\lambda\mu} = J_m^\mu \ \Rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{B} = \rho_m \\ \nabla\times\vec{E} = \vec{J}_m - \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{48}
$$

2 对称性

3 自由场的量子化

4 相互作用的量子场与费曼图