

CCD 成像测量金属的杨氏模量

雷逸鸣

1 计算公式

经推导可知杨氏模量计算公式为：

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \delta L}$$

1.1 测量数据

1) 金属线长度：

$$L_2 = 103.81\text{cm}$$

$$L_1 = 28.70\text{cm}$$

$$L = L_2 - L_1 = 74.91\text{cm}$$

接下来估算不确定度，取最小分度值得：

$$\sigma_L = \frac{0.1\text{cm}}{\sqrt{3}} = 0.058\text{cm}$$

2) 金属丝直径：

测量数据：

表 1 金属丝直径测量数据

测量次数	d/mm
1	0.321
2	0.320
3	0.321
4	0.321
5	0.320
6	0.320
7	0.319
8	0.321
9	0.322
10	0.321

统计上述数据得到：

$$\bar{d} = 0.3206\text{mm}$$

由于实验使用的螺旋测微仪零点误差 $d_0 = 0.000\text{mm}$ ，故不需要修正零点。

计算误差：

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_i - \bar{d})^2}{10 \cdot (10 - 1)} + \left(\frac{e_d}{\sqrt{3}}\right)^2} = 5.8 \times 10^{-3}\text{mm}$$

其中 e_d 取为最小分度值 0.01mm。

3) 砝码质量：

测量数据：

表 2 砝码质量测量数据

砝码序号	m/g
1	200.10
2	199.98
3	200.27
4	199.86
5	199.84
6	199.74
7	199.86
8	199.86
9	199.98

统计上述数据得到：

$$\bar{m} = 199.943\text{g}$$

下面计算误差：

$$\sigma_{\bar{m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (m_i - \bar{m})^2}{9 \cdot (9 - 1)} + \left(\frac{e_m}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0.054\text{g}$$

其中 e_m 取为最小分度值 0.01g。

4) 金属丝伸长量：

测量数据：

表 3 金属丝拉伸变化数据表

i	m/g	r_i/mm	r'_i/mm	\bar{r}_i/mm	$\delta L/\text{mm}$
0	0.00	2.38	2.40	2.390	0.545
1	200.10	2.5	2.51	2.505	0.535
2	400.08	2.62	2.62	2.620	0.530
3	600.35	2.72	2.72	2.720	0.545
4	800.21	2.84	2.83	2.835	0.535
5	1000.05	2.93	2.94	2.935	/
6	1199.79	3.04	3.04	3.040	/
7	1399.65	3.15	3.15	3.150	/
8	1599.51	3.26	3.27	3.265	/

求得：

$$\overline{\delta L} = 0.538\text{mm}$$

$$\sigma_{\overline{\delta L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\delta L_i - \overline{\delta L})^2}{5 \cdot (5 - 1)} + \left(\frac{e_{\delta L}}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6.5 \times 10^{-3}\text{mm}$$

其中 $e_{\delta L}$ 取为最小分度值 0.01mm。

5) 重力加速度：

取北京重力加速度 $g = 9.801\text{m/s}^2$

将以上实验数据统一整理为:

$$L = 74.910 \pm 0.06 \text{ cm}$$

$$d = 0.321 \pm 0.006 \text{ mm}$$

$$m = 199.94 \pm 0.06 \text{ g}$$

$$\delta L = 0.538 \pm 0.007 \text{ mm}$$

$$g = 9.801 \text{ m/s}^2$$

1.2 使用逐差法处理数据

剩将上述数据代入计算公式得:

$$E = 1.686 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

计算不确定度:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\delta L}}{\delta L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} = 0.040$$

由此得出:

$$E = 1.69 \pm 0.07 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

接下来比较误差来源:

$$\frac{\sigma_m}{m} = 3 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\sigma_{\delta L}}{\delta L} = 0.013$$

$$\frac{\sigma_L}{L} = 8 \times 10^{-4}$$

$$\frac{2 \cdot \sigma_d}{d} = 0.037$$

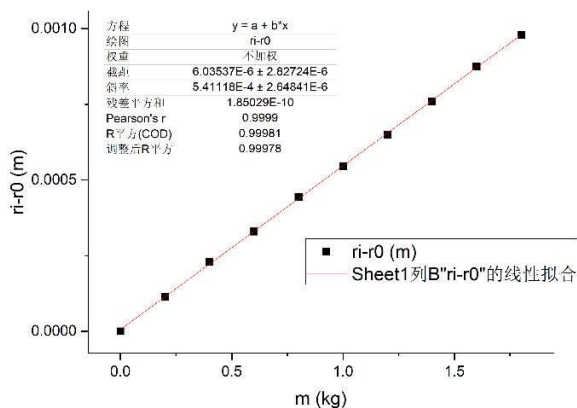
由此看出, d 和 δL 是主要误差来源。

1.3 最小二乘法处理数据

杨氏模量的公式可以变形为:

$$\delta L = \frac{4gL}{\pi E d^2} \cdot m$$

由于 m 的测量精度比 δL 的精度大两个数量级, 故取 m 为横坐标, 纵坐标取为 \bar{r}_i , 绘图如下:



代入公式计算得:

$$\sigma_k = k \sqrt{\frac{r^{-2} - 1}{n - 2}} = 2.6 \times 10^{-6} \text{ m/kg}$$

解得:

$$E = 1.676 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

不确定度:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2}$$

带入数据得:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{(0.037)^2 + (8 \times 10^{-4})^2 + (4.8 \times 10^{-3})^2} = 0.037$$

由此看出, d 的误差仍是主要影响因素。

$$E = 1.68 \pm 0.06 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

1.4 两种方法对比

比较计算结果, 我们可以发现, 两种计算方法得到的杨氏模量数值差距不大, 不确定度也比较接近, 需要注意的是, 第二种方法由于我们取定 m 为自变量, 故其不确定度被忽略了。这样做的条件是其误差较小对结果影响为一小量。

本实验最大误差来源是铁丝直径, 故在改进实验方法时, 可以首先改进铁丝直径的测量。

姓名 李逸飞 学号 2300011414星期 一 第 5 组页码 01 /

杨氏模量

预实验:

原理公式: $E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \Delta L}$

测量数据:

d : ~~0.321 mm~~ ~~0.321 mm~~ 0.321 mm 0.321 mm
~~0.321 mm~~ 0.319 mm 0.322 mm 0.321 mm

→ 看错 0.5 mm 里面有 5 了.

L : ~~103.9 cm~~ ~~28.5 cm~~
~~104.2 cm~~ ~~28.5 cm~~
 103.8 cm 28.7 cm

加载码:

正式实验:

L : $l_1 = 28.7 \text{ cm}$ $l_2 = 103.6 \text{ cm}$ $L = 74.9 \text{ cm}$

d : $d_1 = 321 \mu\text{m}$ $320 \mu\text{m}$ $321 \mu\text{m}$ $320 \mu\text{m}$ $320 \mu\text{m}$
 $320 \mu\text{m}$ $319 \mu\text{m}$ $321 \mu\text{m}$ $322 \mu\text{m}$ $321 \mu\text{m}$

砝码 小 1 2 ... 9

 $\alpha_m = 0.01 \text{ g}$

$m_1 = 200.10 \text{ g}$ $m_2 = 199.98 \text{ g}$ $m_3 = 200.27 \text{ g}$ $m_4 = 199.86 \text{ g}$

$m_5 = 199.84 \text{ g}$ $m_6 = 199.74 \text{ g}$ $m_7 = 199.86 \text{ g}$ $m_8 = 199.86 \text{ g}$ $m_9 = 199.98 \text{ g}$

 $g = 9.801 \text{ m/s}^2$

21/10/25
2021.10.23

姓名

学号

星期

第

组

页码

/

数据表

加

减

i

 r_i/mm r_i/mm \bar{r}/mm Δr

0

2.28
~~2.258~~

2.40

2.390

0.02

1

2.500

2.51

2.5065

0.01

2

2.62

2.62

2.620

0.00

3

2.72

2.72

2.720

0.00

4

2.84

2.83

2.84(-5)

0.01

5

2.93

2.94

2.94(-5)

0.01

6

3.04

3.04

3.040

0.00

7

3.15

3.15

3.150

0.00

8

3.26

3.27

3.26(+5)

0.01

9

3.37

3.37

3.370

0.00

$$\Delta L = \bar{r}_{i+5} - \bar{r}_i$$

$$\Delta L \approx 0.1076 \text{ mm}$$

$$E \approx 1.69 \times 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \text{ Pa}$$

2.148 (12)
2.0323