DM 4. Approches Monte-Carlo multiniveaux

On s'intéresse au calcul de l'intégrale :

$$\mathcal{I} = \int_{-1.5}^{1.5} z^2 sin(z^2) dz$$

On dispose pour cela de plusieurs codes :
— un code " parfait " : $x \to 3(3x - 1.5)^2 sin((3x - 1.5)^2$

— un code " précis " : $x \to -3.22(x - 0.5)^2 + 345.8(x - 0.5)^4 - 993.8(x - 0.5)^6$

— un code " approché " : $x \to 2.5(3x - 1.5)^2$

On suppose que chaque appel à y_1, y_2, y_3 coûte C_1, C_2, C_3 respectivement, avec $C_1 \geq C_2 \geq C_3$. l'objectif de l'exercice est d'optimiser les appels à y_1, y_2, y_3 pour permettre la meilleure estimation de I à coût total fixe. ,

Question 1 – .
Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$. On note $X_1, X_2, .., X_N$ N copies indépendantes de même loi que X, alors un estimateur de Monte-Carlo de $\mathcal{I}$ est :

$$\boxed{\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_1(X_k)}$$

Question 2 – .

Calcul de $\mathbb{E}(\hat{I}_N)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{I}_N) &= \mathbb{E}(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_1(X_k)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(y_1(X_k)) \\
&= \mathbb{E}(y_1(X)) && \text{Indépendance} \\
&= \int_{-1.5}^{1.5} z^2 sin(z^2) dz && \text{Th de transfert et CV} \\
&= \boxed{\mathcal{I}}
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{V}(\hat{I}_N)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\hat{I}_N) &= \mathbb{V}(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_1(X_k)) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{V}(y_1(X_k)) \\
&= \boxed{\frac{1}{N}\mathbb{V}(y_1(X))} && \text{Indépendance}
\end{aligned}$$

Question 3 – .

On a alors que $\mathbb{V}(\hat{I}_N) = \frac{\mathbb{V}(y_1(X))}{N} = \frac{3.99}{N}$. Mais alors d'après le théorème d'approximation asymptotique

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= \mathbb{P}(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{\frac{N}{\mathbb{V}(y_1(X))}}(\hat{I}_N - \mathcal{I}) \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) && \text{avec } 1-\alpha = 0.95 \\
&= \mathbb{P}(-1.96 \times \frac{3.99}{N} \leq (\hat{I}_N - \mathcal{I}) \leq 1.96 \times \frac{3.99}{N})
\end{aligned}$$

On veut alors $1.96 \times \frac{3.99}{N} \leq 10^{-2}$ ce qui donne $\boxed{N \geq 1.96 \times 399}$.

Question 4 – .
On peut prend $\widetilde{I}_{N_1,N_2,N_3} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3$. Le calcul de l'espérance nous donne un estimateur sans biais.

Question 5 – .

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=1}^{N_1} C_1 + C_2 + \sum_{k=N_1+1}^{N_1+N_2} C_2 + C_3 + \sum_{k=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3} C_3 \\
&= N_1C_1 + N_1C_2 + N_2C_2 + N_2C_3 + N_3C_3 \\
&= \boxed{N_1C_1 + (N_1+N_2)C_2 + (N_2+N_3)C_3}
\end{aligned}$$

Question 6 – .

Calcul de $\mathbb{V}(\widetilde{I}_{N_1,N_2,N_3})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\widetilde{I}_{N_1,N_2,N_3}) &= \frac{1}{N_1^2}\sum_{k=1}^{N_1}\mathbb{V}(y_1(X_k) - y_2(X_k)) + \frac{1}{N_2^2}\sum_{k=N_1+1}^{N_1+N_2}\mathbb{V}(y_2(X_k) - y_3(X_k)) + \frac{1}{N_3^2}\sum_{k=N_1+N_2+1}^{N_1+N_2+N_3}\mathbb{V}(y_3(X_k)) \\
&= \boxed{\frac{1}{N_1}\mathbb{V}(y_1(X) - y_2(X)) + \frac{1}{N_2}\mathbb{V}(y_2(X) - y_3(X)) + \frac{1}{N_3}\mathbb{V}(y_3(X))}
\end{aligned}$$