DM 2. Copule d'Ahli Mikhail Haq

Posons la copule C définié tel que :

$$\begin{array}{rcl} C \quad : \quad [0,1]^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ u, v & \mapsto & \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)} \end{array}$$

avec θ un réel dont on définira son ensemble de définition.
Question 1 – .
Vérifions que C est bien une copule.
Tout d'abord, on peut voir que C(u,v)=C(v,u) pour tout $u, v \in [0,1]^2$ les deux première propriétés sont bien vérifiées (C(0,v) et C(1,v)=v)
Pour la 2-croissance, il faut que C vérifie :
Pour tout $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in [0,1]^4$ tel que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$

$$\frac{u_1v_1}{1-\theta(1-u_1)(1-v_1)} - \frac{u_1v_2}{1-\theta(1-u_1)(1-v_2)} - \frac{u_2v_1}{1-\theta(1-u_2)(1-v_1)} + \frac{u_2v_2}{1-\theta(1-u_2)(1-v_2)} \geq 0$$

Cette inégalité est alors vérifiée pour $\theta \in [-1,1]$, et on a alors que C est une copule.

Question 2 – .
Soit (U,V) un vecteur de deux variables aléatoires chacunes distribuées uniformément sur $[0,1]$, soit $S \in [0,1]$, alors :

$$\begin{aligned} P_f = \mathbb{P}((U \geq S), (V \geq S)) &= 1 - \mathbb{P}((U \leq S), (V \leq S)) \\ &= 1 - F_{(U,V)}(S,S) = 1 - C(F_U(S), F_V(S)) \\ &= 1 - C(S,S) = 1 - \frac{S^2}{1-\theta(1-S)^2} \end{aligned}$$

Question 3 – .
On se retrouve alors avec l'expression du dessus, mais pour des θ différents, on a alors que si $\theta_1 \geq \theta_2$, $P_f^{(1)} \geq P_f^{(2)}$, et ceux pour tout θ_1, θ_2.

Question 4 – .
On a donc d'après la question 3 que P_f est croissant selon θ. Or θ est définie sur $[-1,1]$. Donc la valeur de θ où P_f est maximale est $\theta = 1$

Question 5 – .
Soit $\rho = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$
Calcul de $\mathbb{E}(U)$:
$\mathbb{E}(U) = \int_0^1 u f_U(u)\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}$ car U suit une loi uniforme sur $[0,1]$
De même, $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{2}$.
Pour $\mathbb{E}(UV)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(UV) &= \mathbb{E}(g((U,V))) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 g((u,v)) f_{(U,V)}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v && \text{(Théorème de transfert)} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 uv f_{(U,V)}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

Or d'après les propriétés de la copule C on a :

$$F_{(U,V)}(u,v) = C(F_U(u), F_V(v))$$

Donc en dérivant selon u et v :

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(F_U(u), F_V(v)) f_U(u) f_V(v)$$

Question 6 – .

Question 7 – .
On peut alors dériver ρ par apport à θ. Comme $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{E}(V)$ ne dépendent pas de θ, on a seulement :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^1 \int_0^1 C(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta} C(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v && \text{C est continue sur le compacte } \texttt{[0,1]+}^2. \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{uv(1-u)(1-v)}{(1-\theta(1-u)(1-v))^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

On a alors une intégrante positive sur `[0,1]`^{2}, on a donc que l'intégrale l'est aussi et donc que $\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \geq 0$

Question 8 – .
On a alors d'après la question 7 que ρ est croissante sur `[-1,1]` selon θ, or pour maximiser l corrélation entre U et V il faut maximiser la covariance ρ donc la valeur de $\theta = 1$ est celle qui maximise la corrélation entre nos deux variables (même réponse que pour la 4)
