

Exercice 1

INFO1 - BD
Td4 - Ex 1

→ $S(A, B, C, D)$, $\mathcal{F} = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, B \rightarrow D\}$

* Prouvez que $A \rightarrow C$
On sait que $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ donc par transitivité $A \rightarrow C$.

* Calcul des fermetures transitives:

Taille 1:

$$\begin{aligned} \{A\}^+ &= \{A, B, C, D\} \\ \{B\}^+ &= \{B, C, D\} \\ \{C\}^+ &= \{C\} \\ \{D\}^+ &= \{D\} \end{aligned}$$

DF non triviales induites:

$$A \rightarrow C, A \rightarrow D$$

A clé

Taille 2 ne contenant pas A (A est une clé):

$$\begin{aligned} \{B, C\}^+ &= \{B, C, D\} \\ \{B, D\}^+ &= \{B, D, C\} \\ \{C, D\}^+ &= \{C, D\} \end{aligned}$$

($BC \rightarrow D$ triviale car $B \rightarrow D$)

($BD \rightarrow C$ triviale car $B \rightarrow C$)

Taille 3 ne contenant pas A (A est une clé):

$$\{B, C, D\}^+ = \{B, C, D\}$$

* Clés: $\{A\}$

Sur-clés: tous les sur-ensembles de $\{A\}$.

→ $T(A, B, C, D)$, $\mathcal{F} = \{AB \rightarrow C, BC \rightarrow D, CD \rightarrow A, AD \rightarrow B\}$

* Prouvez que $AD \rightarrow C$
On sait que $AD \rightarrow B$ donc $AD \rightarrow AB$ par augmentation
et comme $AB \rightarrow C$, $AD \rightarrow C$ par transitivité.

* Calcul des fermetures transitives:

Taille 1:

$$\begin{aligned} \{A\}^+ &= \{A\} \\ \{B\}^+ &= \{B\} \\ \{C\}^+ &= \{C\} \\ \{D\}^+ &= \{D\} \end{aligned}$$

Taille 2:

$$\begin{aligned} \{A, B\}^+ &= \{A, B, C, D\} \\ \{A, C\}^+ &= \{A, C\} \\ \{A, D\}^+ &= \{A, D, B, C\} \\ \{B, C\}^+ &= \{B, C, D, A\} \\ \{B, D\}^+ &= \{B, D\} \\ \{C, D\}^+ &= \{C, D, A, B\} \end{aligned}$$

DF non triviales induites:

$$AB \rightarrow D$$

$\{A, B\}$ clé

$$AD \rightarrow C$$

$\{A, D\}$ clé

$$BC \rightarrow A$$

$\{B, C\}$ clé

$$CD \rightarrow B$$

$\{C, D\}$ clé

Taille 3:

aucun triplet ne contenant pas ni $\{A, B\}$, ni $\{A, D\}$, ni $\{B, C\}$
ni $\{C, D\}$.

* Clés: $\{A, B\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$

Sur-clés: tous les sur-ensembles des clés.

→ $U(A, B, C, D), F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

* Prouvez que $A \rightarrow D$

On sait que $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$ donc $A \rightarrow C$ par transitivité.
Gr $C \rightarrow D$ donc $A \rightarrow D$ par transitivité.

* Calcul des fermetures transitives

Taille 1 :

$\{A\}^+ = \{A, B, C, D\}$

$\{B\}^+ = \{B, C, D, A\}$

$\{C\}^+ = \{C, D, A, B\}$

$\{D\}^+ = \{D, A, B, C\}$

DF non triviales induites :

$A \rightarrow C, A \rightarrow D$

$B \rightarrow D, B \rightarrow A$

$C \rightarrow A, C \rightarrow B$

$D \rightarrow B, D \rightarrow C$

$\{A\}$ clé

$\{B\}$ clé

$\{C\}$ clé

$\{D\}$ clé

* Clés : $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}$

Sur-clés : tous les sur-ensembles des clés
(i.e tous sous-ens possibles des attributs).

Exercice 2

INF01 - BD
Td4 - Ex.2

$R(A, B, C, D, E, F)$ et $\mathcal{F} = \{AB \rightarrow C, BC \rightarrow AD, D \rightarrow E, CF \rightarrow B\}$

1°) Fermeture de AB

$$\{A, B\}^+ = \{A, B, C, D, E\}$$

$\{AB\}$ sur-clé ?

$\{A, B\}$ n'est pas une sur-clé car $F \notin \{A, B\}^+$.

2°) Déterminer une clé de R.

idée : ajouter F
 $\{A, B, F\}$ clé ?

→ $\{A, B, F\}^+ = \{A, B, C, D, E, F\}$ donc $\{A, B, F\}$ est une sur-clé.

→ $\{A, B, F\}$ contient-il une clé ?

• $\{A, B\}$ n'est pas une sur-clé

donc $\{A\}$ et $\{B\}$ ne sont pas des clés.

• $\{F\}$ est-il une clé ?

$\{F\}^+ = \{F\}$ donc $\{F\}$ n'est pas sur-clé donc pas clé.

• $\{A, F\}$ est-il une clé ?

$\{A, F\}^+ = \{A, F\}$, donc $\{A, F\}$ n'est pas sur-clé donc pas clé.

• $\{B, F\}$ est-il une clé ?

$\{B, F\}^+ = \{B, F\}$ donc $\{B, F\}$ n'est pas sur-clé donc pas clé.

donc

$\{A, B, F\}$ ne contient pas de clé.

Donc

$\{A, B, F\}$ est une clé de R.