

MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

DM3 - Année 2022-2023

1 Location de voitures entre particuliers

On cherche à proposer un service aux propriétaires intéressés pour louer leur voiture à des particuliers, qui leur permette de maximiser leur gain moyen. On note p le prix de location et \mathbf{x} le vecteur des caractéristiques du véhicule (gamme, marque, ancienneté, note moyenne attribuée par les précédents loueurs...), si bien que la probabilité qu'un client intéressé loue une voiture de caractéristique \mathbf{x} au prix p s'écrit :

$$f \circ h(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}, p), \quad h(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}, p) = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{x} + \beta_2 p, \quad f(u) = \frac{1}{1 + \exp(-u)}.$$

avec $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \boldsymbol{\beta}_1, \beta_2)$ un vecteur de paramètres inconnus.

1. Expliquer, au regard des fonctions f et h , dans quelle mesure ce choix de modélisation peut être pertinent. Selon vous, quel est le signe attendu de β_2 ?

2. A paramètres $\boldsymbol{\beta}$ connus, quel serait le gain moyen, noté $g(\mathbf{x}, p)$, d'un propriétaire louant une voiture aux caractéristiques \mathbf{x} à un prix p ?

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}(u)$ et montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial p}(\mathbf{x}, p) = \frac{1 + (1 + \beta_2 p) \exp(-(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{x} + \beta_2 p))}{(1 + \exp(-(\beta_0 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{x} + \beta_2 p)))^2}$$

4. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial p}$ s'annule en une unique valeur de p , notée p^* .

5. A quoi correspond p^* ? Quel est son intérêt pour le propriétaire d'une voiture à louer ?

6. La valeur de p^* dépend de la valeur de $\boldsymbol{\beta}$. Expliquer (sans faire de calculs) comment estimer cette valeur.