

# Filtrage et assimilation de données

**G. Perrin**

guillaume.perrin@univ-eiffel.fr

Année scolaire 2022-2023



# Plan de la séance

- 1 Introduction
- 2 Cadre linéaire
- 3 Le filtre de Kalman
- 4 Méthodes de propagation d'ensembles
- 5 Filtre de Kalman étendu
- 6 Conclusions

# Introduction

Qu'est-ce que l'assimilation de données (DA) ?

- une famille spécifique de **problèmes inverses**,
- pour des systèmes **dynamiques**,
- représentés par des **modèles discrétisés** (en temps et espace),
- en présence de données **distribuées en temps**,
- présentes souvent en **grande quantité**.

⇒ un domaine très proche de la quantification d'incertitudes.

# Domaines d'application principaux

- Navigation et suivi d'objets,
- Economie/finance,
- Mécanique des fluides,
- Météorologie et océanographie,
- Géophysique, risques naturels, ingénierie pétrolière,
- Contrôle non destructif des structures,
- Médecine, biologie, chimie,
- Sciences sociales,
- ...

# Notations

On note :

- $t \geq 0$  le temps,  $t_1 < t_2 < \dots < t_\ell$  les temps d'observations du système,
- $\mathbf{x}(t)$  le vecteur d'état à  $t$ , discrétisé en espace (de dimension potentiellement grande), modélisé par un vecteur aléatoire pour quantifier son caractère **inconnu**,
- $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}(t_k)$  le vecteur d'état à  $t_k$ ,
- $\mathbf{y}_k$  le vecteur (**connu**) des observations à  $t_k$ , modélisé par un **vecteur aléatoire** en raison de la présence de **bruit**.

## Problématique

Comment caractériser la distribution de  $\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\ell$  ?

# Définition de deux (méta)modèles

La résolution de ce problème d'inférence repose sur l'introduction de deux types de modèle (pré-existants ou appris à partir de données) :

→ un modèle d'évolution temporel de l'état du système :

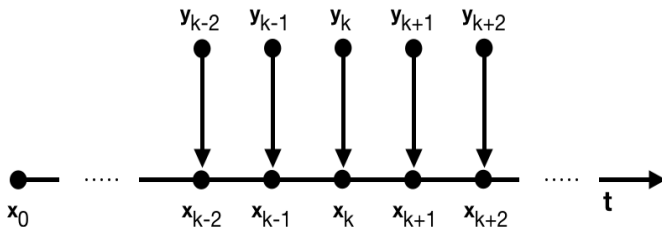
$$\mathbf{x}(t + dt) = \mathbf{f}_{t,dt}(\mathbf{x}(t), \mathbf{s}(t)) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad t \geq 0,$$

→ un modèle d'observation du système :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\eta}_k, \quad 1 \leq k \leq \ell.$$

- $\mathbf{s}$  est un forçage, une source ou un contrôle potentiel,
- $\boldsymbol{\xi}$  désigne l'erreur de modèle,
- $\boldsymbol{\eta}_k$  désigne l'erreur d'observation.

# Différents types de problème pour la DA



A partir de ces informations, on peut alors chercher à produire :

- une meilleure estimation de l'état actuel du système (**filtering** problem),
- une prédiction de ses états futurs (**forecast** problem),
- une meilleure estimation de ses états passés (**smoothing** problem).

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Cadre linéaire**
- 3 Le filtre de Kalman
- 4 Méthodes de propagation d'ensembles
- 5 Filtre de Kalman étendu
- 6 Conclusions



# Hypothèses

Supposons que les deux modèles d'évolution sont linéaires :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}_0 + \boldsymbol{\xi}_0,$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{s}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \quad k \geq 1,$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad \ell \geq k \geq 0,$$

avec  $\mathbf{m}_0$  **choisi**, et  $\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\eta}_k$  des vecteurs aléatoires tels que  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}_k] = \mathbf{0}$ ,  $\text{Var}(\boldsymbol{\xi}_k) = \mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_k] = \mathbf{0}$  et  $\text{Var}(\boldsymbol{\eta}_k) = \mathbf{R}_k$ .

- $\mathbf{F}_k$  et  $\mathbf{H}_k$  sont généralement appelés modèle d'évolution et opérateur d'observation.
- On ne considère pas ici les états intermédiaires entre deux mesures pour simplifier les notations...

# Reformulation matricielle

Notons  $\mathbf{X}_k$  le vecteur des états (**à estimer**),  $\mathbf{Y}_{k|\ell}$  le vecteur des observations (**connu**) et  $\mathbf{Z}_{k|\ell}$  le vecteur de bruit (**connu**), tels que :

$$\mathbf{X}_k := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{k|\ell} := \begin{pmatrix} m_0 \\ s_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ s_\ell \\ y_\ell \\ s_{\ell+1} \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{k|\ell} := \begin{pmatrix} -\xi_0 \\ -\xi_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ -\xi_\ell \\ \eta_\ell \\ -\xi_{\ell+1} \\ \vdots \\ -\xi_k \end{pmatrix}.$$

On note aussi  $\mathbf{\Gamma}_{k|\ell} := \text{diag}(\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{Q}_\ell, \mathbf{R}_\ell, \mathbf{Q}_{\ell+1}, \dots, \mathbf{Q}_k)$  la matrice de covariance de  $\mathbf{Z}_{k|\ell}$  (diagonale par bloc).

# Reformulation matricielle

On déduit :  $\mathbf{Y}_{k|\ell} = \mathbf{A}_{k|\ell} \mathbf{X}_k + \mathbf{Z}_{k|\ell},$

$$\mathbf{A}_{k|\ell} := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F}_1 & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}_2 & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\mathbf{F}_\ell & \mathbf{I} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_\ell & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_{\ell+1} & \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_k & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

# Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)

Le BLUE de  $\mathbf{X}_k$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_k$ , est alors défini par le (ou l'un des) minimiseur(s) de

$$J_{k|\ell}(\mathbf{X}_k) := \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{k|\ell} - \mathbf{A}_{k|\ell}\mathbf{X}_k\|_{\mathbf{\Gamma}_{k|\ell}}^2,$$

avec la notation  $\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}}^2 = \mathbf{w}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{w}$ . En supposant toutes les matrices de covariance inversibles, on déduit :

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \left( \mathbf{A}_{k|\ell}^T \mathbf{\Gamma}_{k|\ell}^{-1} \mathbf{A}_{k|\ell} \right)^{-1} \mathbf{A}_{k|\ell}^T \mathbf{\Gamma}_{k|\ell}^{-1} \mathbf{Y}_{k|\ell}.$$

$\Rightarrow \hat{\mathbf{X}}_k$  est le BLUE de  $\mathbf{X}_k$ , au sens où il a la **variance minimale** parmi les estimateurs **linéaires** ( $\hat{\mathbf{X}}_k \propto \mathbf{Y}_{k|\ell}$ ) **non-biaisés** ( $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{X}}_k] = \mathbf{X}_k$ ), avec :

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{X}}_k) = \left( \mathbf{A}_{k|\ell}^T \mathbf{\Gamma}_{k|\ell}^{-1} \mathbf{A}_{k|\ell} \right)^{-1}.$$

# Cadre gaussien

Si on suppose également que le vecteur aléatoire  $\mathbf{Z}_{k|\ell}$  est **gaussien**, alors on peut montrer que :

$$\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{k|\ell} \sim \mathcal{N} \left( \hat{\mathbf{x}}_k, \left( \mathbf{A}_{k|\ell}^T \mathbf{\Gamma}_{k|\ell}^{-1} \mathbf{A}_{k|\ell} \right)^{-1} \right).$$

- la distribution de  $\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_\ell$  est alors connue pour tout  $k \geq 0$  (on a résolu le problème initial),
- **toute l'information disponible** est utilisée (le passé, le présent, le futur) pour caractériser cette distribution.
- pour résoudre ce problème, il est nécessaire de manipuler (et d'inverser...) des matrices potentiellement **gigantesques**, ce qui est souvent impossible à faire en pratique (mémoire, stockage)...

# Illustration graphique

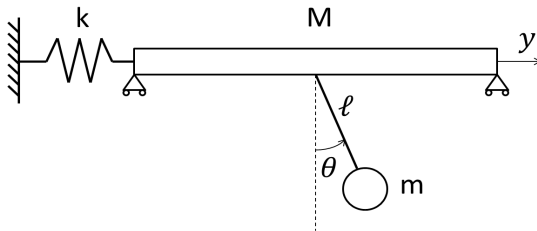


FIGURE: Système pendule - plaque

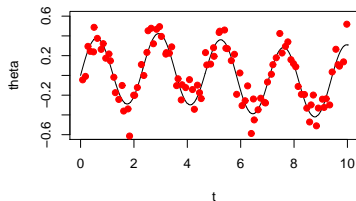
- $\theta$  est l'angle de rotation du pendule, et  $y$  est le déplacement horizontal de la plaque.
- $\mathbf{x} = (y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})$  est le vecteur d'état.

On observe régulièrement la position du pendule et on cherche à prédire la position du pendule et de la plaque.

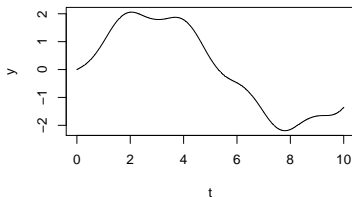
# Illustration graphique

Les évolutions de  $y$  et  $\theta$  satisfont le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{y} + ky + m\ell \left( \ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right) = 0, \\ \ddot{y} \cos(\theta) + \ell \ddot{\theta} + g \sin(\theta) = 0, \\ (y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta})(t = 0) = (y_0, \theta_0, \dot{y}_0, \dot{\theta}_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$



(a) Evolution de  $\theta$



(b) Evolution de  $y$

FIGURE:  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0.5, 1)$ ,  $m = 1$ ,  $\ell = 2$ ,  $M = 2$ ,  $k = 1$ .

# Illustration graphique

- La linéarisation et la discrétisation de ces équations conduisent à :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\xi}_k,$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} dt \\ \mathbf{A} dt & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{(t_k - t_{k-1})/dt}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} M + m & m\ell \\ 1 & \ell \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

- L'observation de la position du pendule se traduit par :

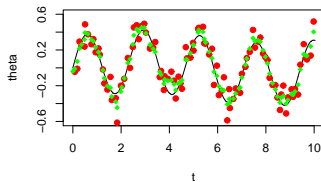
$$y_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \eta_k, \quad \mathbf{H}_k = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\xi}_k$  caractérise l'erreur de linéarisation et de discrétisation, tandis que  $\eta_k$  correspond à l'erreur de mesure.

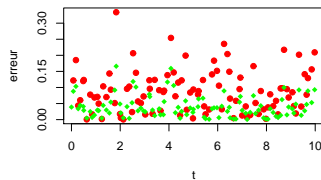


# Illustration graphique

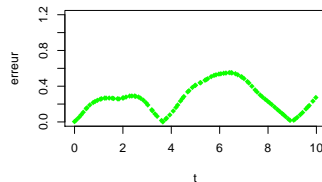
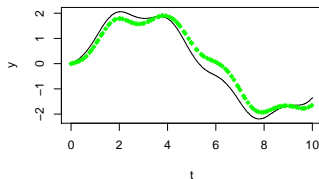
Rouge  $\leftrightarrow$  mesures / Vert  $\leftrightarrow$  modèle direct



(a) Evolution de  $\theta/y$



(b) Erreur sur  $\theta/y$



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Cadre linéaire
- 3 Le filtre de Kalman**
- 4 Méthodes de propagation d'ensembles
- 5 Filtre de Kalman étendu
- 6 Conclusions

# Hypothèses

- La méthode directe précédemment introduite présente un coût numérique qui croît avec le cube du nombre d'itérations considérées.
  - L'idée du filtre de Kalman est de **casser cette complexité**, en décomposant le problème précédent en une série de problèmes beaucoup plus simples.
- L'objectif est de construire pour tout  $k$  le couple (BLUE + covariance)  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{C}_{k|k})$  de  $\mathbf{x}_k$  à partir du couple  $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{C}_{k-1|k-1})$ , de  $\mathbf{y}_k$  et de  $\mathbf{s}_k$  uniquement !
- Une méthode en deux étapes :
- 1 **Prédiction** : on calcule à partir du (méta)modèle (sans utiliser  $\mathbf{y}_k$ )  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{C}_{k|k-1})$  à l'instant  $t_k$  à partir de  $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{C}_{k-1|k-1})$ .
  - 2 **Mise-à-jour** : on utilise  $\mathbf{y}_k$  (sans utiliser le (méta)modèle) pour passer de  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{C}_{k|k-1})$  à  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{C}_{k|k})$ .

# Mise en équations - cas gaussien

→ On suppose que tous les vecteurs aléatoires sont gaussiens.

❶ **Initialisation** : on pose  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{m}_0$ ,  $\mathbf{C}_{0|0} = \mathbf{Q}_0$ .

❷ **Prédiction** : Si  $\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{C}_{k-1|k-1})$ , alors :

$$\mathbf{x}_k \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{C}_{k|k-1}),$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} := \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{s}_k, \quad \mathbf{C}_{k|k-1} := \mathbf{F}_k \mathbf{C}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k.$$

❸ **Mise-à-jour** : par conditionnement gaussien, on déduit :

$$\mathbf{x}_k \mid \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{C}_{k|k}),$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} := \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),$$

$$\mathbf{C}_{k|k} := \mathbf{C}_{k|k-1} - \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k|k-1},$$

$$\mathbf{S}_k := \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k.$$

# Mise en équations - cas gaussien

En notant  $\mathbf{K}_k := \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} = \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$  le **gain de Kalman**, on peut récrire moyenne et covariance de prédiction sous la forme :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}),$$

$$\mathbf{C}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{C}_{k|k-1}.$$

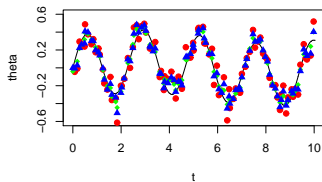
⇒ le gain de Kalman quantifie l'apport de la mesure  $\mathbf{y}_k$  par rapport à la prédiction avec (méta)modèle seul.

# Mise en équations - cas **NON** gaussien

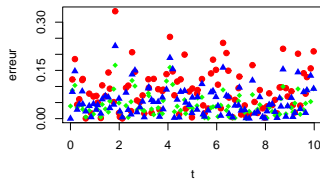
- Dans le cadre **non-gaussien**, on parle de **méthodes variationnelles**.
  - On peut alors montrer (via une série de minimisations un peu plus techniques de potentiels quadratiques) que le BLUE de  $\mathbf{x}_k$  sachant  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k)$  se calcule **exactement selon la récurrence précédente**, et que sa covariance est aussi donnée par les formules trouvées dans le cas gaussien.
- ⇒ ce résultat est **très important**, car il montre la **robustesse** de la méthode, et permet d'envisager le traitement de cas non linéaires où l'hypothèse gaussienne n'a plus vraiment de sens !

# Illustration graphique

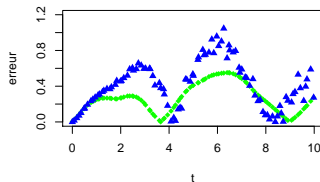
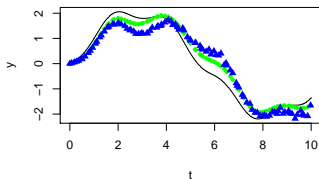
Rouge  $\leftrightarrow$  mesures / Vert  $\leftrightarrow$  modèle direct / Bleu  $\leftrightarrow$  Kalman linéaire.



(a) Evolution de  $\theta/y$



(b) Erreur sur  $\theta/y$



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Cadre linéaire
- 3 Le filtre de Kalman
- 4 Méthodes de propagation d'ensembles**
- 5 Filtre de Kalman étendu
- 6 Conclusions



# Contexte

- Pour certaines applications, la dimension  $d_x$  du vecteur d'état  $\mathbf{x}$  est tellement grande (on peut penser à des discrétisations 3D fines de l'espace par exemple) qu'il est **impossible de stocker ou manipuler** la matrice de covariance  $\mathbf{C}_{k|k}$  (de dimension  $d_x \times d_x$ ).
- Le principe des **méthodes de propagation d'ensemble** (on parle aussi de filtre de Kalman d'ensemble) est alors de faire évoluer une population de  $d_x \gg M \gg 1$  vecteurs d'état, notés  $\mathbf{x}^{(m)}$ ,  $1 \leq m \leq M$ , dont les moyenne et covariance empiriques se rapprochent le plus possible (au sens Monte Carlo) des quantités recherchées.

# Mise en équations

- **Initialisation** : on note  $\tilde{\mathbf{x}}_{0|0}^{(m)}$  des réalisations iid selon  $\mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{Q}_0)$ .
- **Prédiction** : en notant  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_k^{(m)}$  des réalisations iid selon  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ , on construit :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(m)} = \mathbf{F}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{(m)} + \mathbf{s}_k + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_k^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M.$$

- **Mise-à-jour** : on duplique les observations en notant  $\tilde{\mathbf{y}}_k^{(m)}$  des réalisations iid selon  $\mathcal{N}(\mathbf{y}_k, \mathbf{R}_k)$ . On déduit :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{(m)} = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(m)} + \hat{\mathbf{K}}_k (\tilde{\mathbf{y}}_k^{(m)} - \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(m)}), \quad 1 \leq m \leq M.$$

⇒ l'ensemble des  $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{(m)}$  peut ensuite être post-traité pour en déduire un vecteur d'état moyen et des incertitudes associées.

# Mise en équations

- On ne peut néanmoins pas calculer le gain de Kalman  $\hat{\mathbf{K}}_k$  comme précédemment car  $\mathbf{C}_{k|k}$  est inconnu.
- En notant  $\bar{\mathbf{x}}_{k|k-1} := \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(m)}$ , remarquons d'abord que :

$$\frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M (\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(m)} - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{(m)} - \bar{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T = \frac{\mathbf{Z}_k \mathbf{Z}_k^T}{M-1}$$

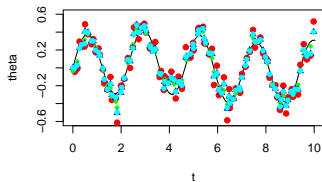
est l'approximation empirique de  $\mathbf{C}_{k|k-1}$ .

- On peut alors proposer une approximation empirique de  $\mathbf{K}_k$  sans jamais agréger de matrices de tailles  $d_x \times d_x$  :

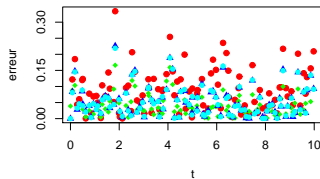
$$\hat{\mathbf{K}}_k := \frac{\mathbf{Z}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{Z}_k)^T}{M-1} \left( \frac{(\mathbf{H}_k \mathbf{Z}_k)(\mathbf{H}_k \mathbf{Z}_k)^T}{M-1} + \mathbf{R}_k \right)^{-1}.$$

# Illustration graphique

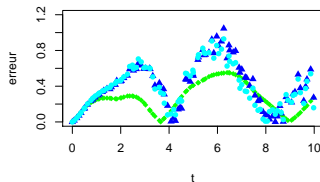
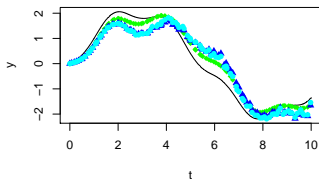
$R \leftrightarrow \text{mes.} / V \leftrightarrow \text{mod. dir.} / B \leftrightarrow K. \text{ linéaire} / C \leftrightarrow K. \text{ ensemble.}$



(e) Evolution de  $\theta/y$



(f) Erreur sur  $\theta/y$



# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Cadre linéaire
- 3 Le filtre de Kalman
- 4 Méthodes de propagation d'ensembles
- 5 Filtre de Kalman étendu**
- 6 Conclusions

# Contexte

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{s}_k) + \boldsymbol{\xi}_k, \quad k \geq 0,$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\eta}_k, \quad 1 \leq k \leq \ell.$$

- Le filtre de Kalman **étendu** ne suppose plus que les modèles d'évolution et d'observation  $\mathbf{f}_k$  et  $\mathbf{h}_k$  sont linéaires, mais **différentiables** en  $\mathbf{x}$ .
- L'objectif du filtre de Kalman étendu est alors de calculer le BLUE du système linéarisé.

# Mise en équations

La linéarisation doit être faite avec attention, en linéarisant autour des "bonnes" valeurs de  $\mathbf{x}$ .

→ on linéarise  $\mathbf{f}_k$  autour de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$  pour la prédiction :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{s}_k) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{s}_k)(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}) + \boldsymbol{\xi}_k, \\ &= \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \tilde{\mathbf{s}}_k + \boldsymbol{\xi}_k.\end{aligned}$$

→ on linéarise  $\mathbf{h}_k$  autour de  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$  pour la mise à jour.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_k &= \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) + \boldsymbol{\eta}_k, \\ \tilde{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k.\end{aligned}$$

# Mise en équations

En appliquant les équations trouvées pour le filtre de Kalman linéaire, on déduit (**prédiction**) :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \tilde{\mathbf{s}}_k = \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{s}_k),$$

$$\mathbf{C}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{C}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k,$$

puis (**mise-à-jour**) :

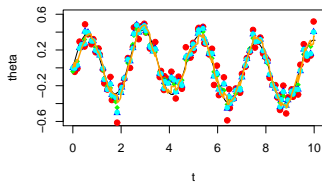
$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{k|k} &= \mathbf{C}_{k|k-1} - \mathbf{C}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k|k-1}, \\ &= (\mathbf{C}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \text{ (formule de Woodbury),}\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{C}_{k|k} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})).$$

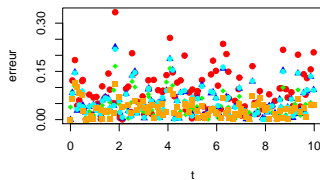


# Illustration graphique

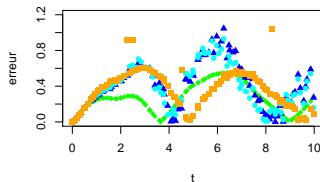
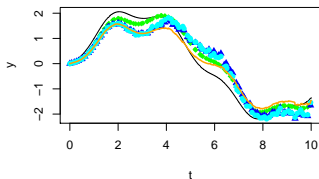
$R \leftrightarrow \text{mes.}$  /  $V \leftrightarrow \text{dir.}$  /  $B \leftrightarrow \text{K. lin.}$  /  $C \leftrightarrow \text{K. ens.}$  /  $O \leftrightarrow \text{K. étendu.}$



(i) Evolution de  $\theta/y$



(j) Erreur sur  $\theta/y$



# Conclusions

- L'assimilation de données est une thématique très à la mode pour la simulation de systèmes complexes.
- La DA cherche à prédire le comportement de tels systèmes en couplant "data", "probabilités" et "modèles physiques" (des termes comme "data-driven models" sont parfois utilisés).
- D'autres approches existent (ex : méthodes de filtres particulières pour gérer des modèles non-linéaires non gaussiens...).
- De nombreux défis existent :
  - concernant la complexité et la taille croissantes des modèles physiques et des données disponibles (données dépendantes...),
  - pour des méthodes moins gourmandes "écologiquement" (cout, temps de calcul),
  - pour un couplage efficace aux techniques émergentes de machine learning.

# Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Cadre linéaire
- 3 Le filtre de Kalman
- 4 Méthodes de propagation d'ensembles
- 5 Filtre de Kalman étendu
- 6 Conclusions**

# Quizz

- **L'assimilation de données sert à**
  - ☐ corriger les modèles physiques ☐ remplacer les modèles physiques
  - ☐ enrichir les modèles physiques.
- **Pour améliorer les prédictions de l'assimilation de données, il faut**
  - ☐ collecter davantage de données ☐ proposer un modèle plus représentatif
  - ☐ mieux sélectionner les données ☐ discrétiser davantage temps et espace.
- **Supposer un modèle gaussien pour le vecteur d'état vous semble**
  - ☐ raisonnable ☐ farfelu ☐ utile si validé ☐ dangereux