Introduction aux approches V&V-UQ

G. Perrin

guillaume.perrin@univ-eiffel.fr

Année 2022-2023






Plan de la séance

1. Introduction
2. Notations et définitions
3. Formulation V&V-UQ de problèmes classiques
4. Conclusion

Introduction

Bienvenue dans le monde du risque

Introduction

Bienvenue dans le monde du risque

Introduction

Bienvenue dans le monde du risque

Introduction

Le contrôle du risque dans la société

- Le **contrôle du risque** est actuellement complètement intégré à la prise de décision dans nos sociétés :

Introduction

Le contrôle du risque dans la société

- Le **contrôle du risque** est actuellement complètement intégré à la prise de décision dans nos sociétés :
- Prise de risque **personnelle** (transports particuliers) / Prise de risque **par la société** (transports en commun.)

Introduction

Le contrôle du risque dans la société

- Le **contrôle du risque** est actuellement complètement intégré à la prise de décision dans nos sociétés :
- Prise de risque **personnelle** (transports particuliers) / Prise de risque **par la société** (transports en commun.)
- Attention **au mode de calcul** du risque ! (et aux pondérations)

Introduction

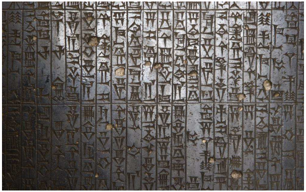
La simulation pour garantir la sécurité

- Acteur majeur d'aide à la prise de décision, le rôle de la simulation ne cesse de se renforcer pour la **conception** et la **garantie** de nouveaux objects.
- En effet, avec des puissances de calcul toujours plus importantes, des progrès constants en modélisation des phénomènes physiques, la simulation ne se limite plus à décrire et comprendre ce que l'on a observé, mais à **prédire** ce qui n'a pas encore été observé.
- Dans une perspective de minimisation des coûts, la simulation doit alors permettre de mieux adapter/justifier/réduire les marges de sécurité.

Introduction

La marge de sécurité, une vieille histoire...

(a) Statue d'Hammurabi, roi de Babylone vers 2000 ans av. JC



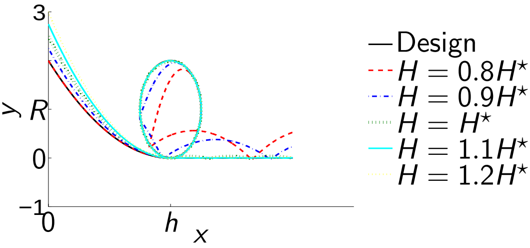
(b) Extrait du code d'Hammurabi

[...] Si un architecte a construit pour un autre une maison, et n'a pas rendu solide son oeuvre, si la maison construite s'est écroulée, et a tué le maître de la maison, cet architecte est passible de mort. [...]

[...] Si c'est la fortune mobilière qu'il a détruite, il restituera tout ce qu'il a détruit, et parce qu'il n'a rendu solide la construction, et qu'elle s'est effondrée, il restaurera la maison ruinée, à ses propres frais. [...]

Introduction

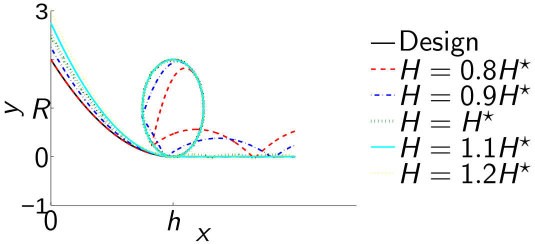
Un premier exemple



- Quels paramètres retenir pour la conception du looping ?
- Sur quels modèles (physiques, mathématiques...) se baser pour le dimensionnement ?

Introduction

Un premier exemple



- Quels paramètres retenir pour la conception du looping ?
- Sur quels modèles (physiques, mathématiques...) se baser pour le dimensionnement ?
- En négligeant les frottements, on peut montrer par conservation d'énergie que la hauteur minimale de lancement du wagon est égale à $H^\star = 5R/2$. Commenter.

Introduction

L'intégration des incertitudes crée la confiance

$$y^{\text{sim}} = 0.42367589235124$$

$$y^{\text{réel}} = 0.42367589235124\,?$$

Introduction

L'intégration des incertitudes crée la confiance

$$y^{\text{sim}} = 0.42367589235124$$

$$y^{\text{réel}} \in [0.42367589235 \pm 10^{-11}]\,?$$

$\Rightarrow$ incertitudes numériques (arithmétique finie, compilateurs, schémas de résolution MC,...),

Introduction

L'intégration des incertitudes crée la confiance

$$y^{\text{sim}} = 0.42367589235124$$

$$y^{\text{réel}} \in [0.4236 \ \pm 10^{-4}]\,?$$

$\Rightarrow$ incertitudes numériques (arithmétique finie, compilateurs, schémas de résolution MC,...),

$\Rightarrow$ incertitudes paramétriques (paramètres, conditions limites, conditions initiales mal-connus),

Introduction

L'intégration des incertitudes crée la confiance

$$y^{\text{sim}} = 0.42367589235124$$

$$y^{\text{réel}} \in [0.42 \pm 10^{-2}]\,?$$

- $\Rightarrow$ incertitudes numériques (arithmétique finie, compilateurs, schémas de résolution MC,...),
- $\Rightarrow$ incertitudes paramétriques (paramètres, conditions limites, conditions initiales mal-connus),
- $\Rightarrow$ incertitudes de modélisation (simplifications, phénomènes manquants...).

Introduction

L'importance de la maîtrise des incertitudes

- Pour pouvoir être prédictive, la simulation se doit de prendre en considération les différentes sources d'incertitudes potentiellement présentes.
- Une fois les incertitudes considérées, l'information fournie est plus **riche**. Au lieu de fournir une **unique** valeur déterministe, la simulation est en mesure :
    - de fournir une **confiance** pour des prédictions de quantités d'intérêt,
    - d'associer une **probabilité d'occurence** à différents scénarii.

Exemples

- indices de confiance pour les prévisions météorologiques,
- probabilité de succès pour une opération médicale,
- risque de ruine d'une structure...

Introduction

Les approches V&V-UQ

Les approches de vérification/validation et de quantification des incertitudes (V&V-UQ) doivent ainsi être vues comme des outils efficaces pour cet enrichissement des résultats de simulation, en

- fournissant des méthodes permettant d'**intégrer au mieux l'information disponible** (avis d'experts, mesures expérimentales directes ou indirectes) pour construire des modèles adaptés des incertitudes,
- proposant une **reformulation** (bien posée) **des problèmes classiques** pour leur permettre d'intégrer les incertitudes,
- mettant à disposition des méthodes permettant de **résoudre efficacement** ces problèmes soumis à des incertitudes.

Introduction

Organisation du cours

- **Séance 1 :** introduction aux approches V&V-UQ.
- **Séance 2 :** rappels de statistiques 1-d.
- **Séance 3 :** modélisation n-d.
- **Séance 4 :** propriétés de la loi gaussienne.
- **Séance 5 :** modélisation des incertitudes.
- **Séance 6 :** propagation des incertitudes.
- **Séance 7 :** analyse de sensibilité.
- **Séance 8 :** optimisation sous incertitudes.
- **Séance 9 :** méthodes de Monte Carlo avancées.
- **Séance 10 :** analyse de risque.
- **Séance 11 :** problèmes inverses.
- **Séance 12 :** filtrage et assimilation de données.

Plan de la séance

1 Introduction

2 Notations et définitions

3 Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

4 Conclusion

Notations et objectifs

Notations générales

Dans ce cours, on notera :

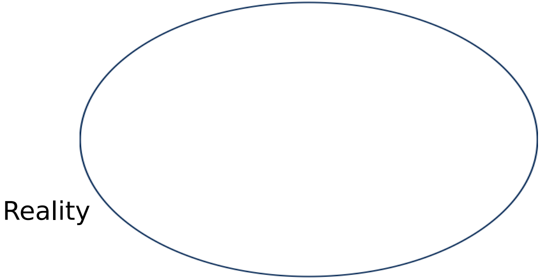
- $\mathcal{S}$ le système d'intérêt (physique, mécanique, économique, biologique,...), que l'on suppose pouvoir être décrit par un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$ (dimensions, propriétés matériaux, équations d'état, conditions limites...).
- $y(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Y}$ la quantité d'intérêt (QoI) permettant d'analyser le bon fonctionnement de $\mathcal{S}$ (on peut penser au maximum d'un effort, d'une pression, d'une accélération).
- $\boldsymbol{x}$ et y peuvent correspondre à des scalaires, des vecteurs, des fonctions...
- Les ensembles $\mathbb{X}$ (des entrées) et $\mathbb{Y}$ (des sorties) sont la plupart du temps des sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}$ respectivement.

L'application $\boldsymbol{x} \mapsto y(\boldsymbol{x})$ est *a priori* **non-linéaire**.

Notations et objectifs

Incertitudes sur les sorties

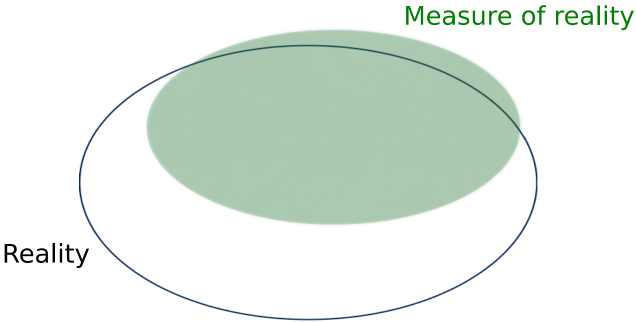
Différentes versions de la réalité conduisent à différentes sources d'incertitudes.



Notations et objectifs

Incertitudes sur les sorties

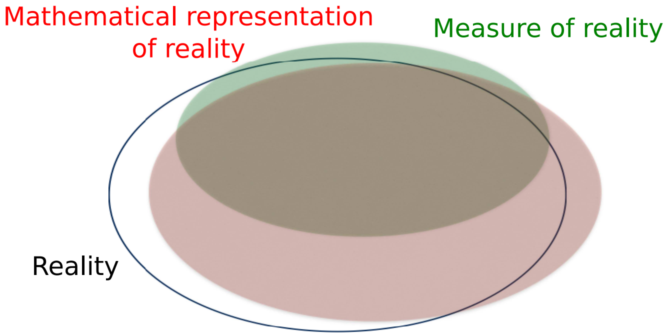
Différentes versions de la réalité conduisent à différentes sources d'incertitudes.



Notations et objectifs

Incertitudes sur les sorties

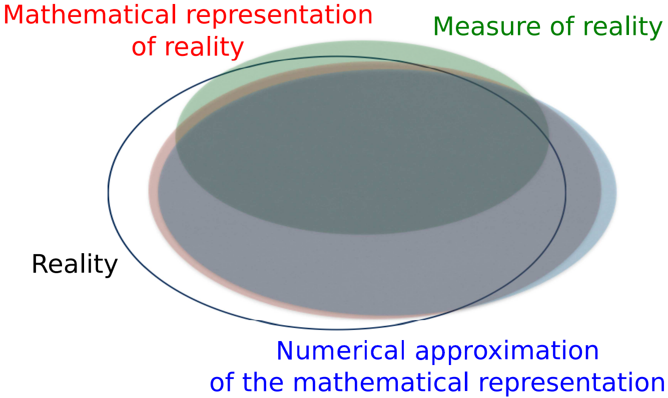
Différentes versions de la réalité conduisent à différentes sources d'incertitudes.



Notations et objectifs

Incertitudes sur les sorties

Différentes versions de la réalité conduisent à différentes sources d'incertitudes.



Notations et objectifs

Incertitudes sur les sorties

- On note y^{real} et y^{mes} les valeurs réelles et mesurées de y.
- On note $y^{\text{mod}}(\cdot;\boldsymbol{\beta})$ et $y^{\text{sim}}(\cdot;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})$ la représentation (mathématique) paramétrique de y et son approximation numérique (par discrétisation des équations par exemple).

Plusieurs sources d'incertitudes sur les sorties

- Contrôler l'erreur de mesure, $\varepsilon^{\text{mes}} := y^{\text{mes}} - y^{\text{real}}$, est du ressort de la **métrologie** (plus de détails dans le Guide to the expression of Uncertainty in Measurement (GUM)).
- Choisir $\boldsymbol{\delta}$ afin de contrôler l'erreur numérique, $\varepsilon^{\text{num}} := y^{\text{mod}}(\cdot;\boldsymbol{\beta}) - y^{\text{sim}}(\cdot;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})$, est l'objectif de la **vérification**.
- Identification la valeur de $\boldsymbol{\beta}$ est l'objectif de la **calibration**.
- Contrôler l'erreur de simulation, $\varepsilon^{\text{sim}} := y^{\text{real}} - y^{\text{sim}}(\cdot;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})$, est le but de la **validation**.

Notations et objectifs

Incertitudes sur les entrées

La valeur de $\boldsymbol{x}$ peut aussi être incertaine. On distinque généralement deux sources d'incertitudes pour $\boldsymbol{x}$:

- les incertitudes **épistémiques** (réductibles) : des composantes déterministes de $\boldsymbol{x}$ ne sont pas parfaitement connues,
- les incertitudes **aléatoires** (non-réductibles) : des composantes de $\boldsymbol{x}$ sont aléatoires par nature (dispersion de fabrication, vent, radioactivité naturelle...).

La **théorie des probabilités** est généralement considérée pour modéliser à la fois les incertitudes sur les entrées et les sorties.

Cela conduit le plus souvent à des modèles probabilistes hiérarchiques pour $y^{\mathrm{sim}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})$, du fait que :

- $\boldsymbol{x}$ est aléatoire,
- $y^{\mathrm{sim}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})|\boldsymbol{x}$ est également aléatoire.

Code validé $\neq$ code vérifié

Vérification

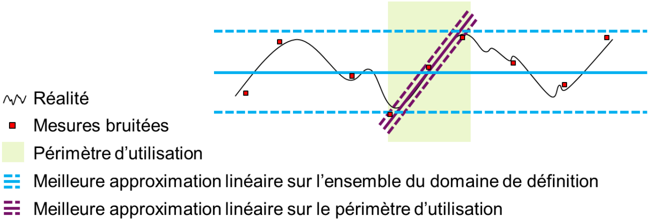
- Définition : processus visant à déterminer si un modèle numérique est conforme au modèle mathématique qu'il est censé résoudre $\leftrightarrow$ "solving the equations right".
- Cela fait référence à de l'analyse numérique, en se basant classiquement sur des solutions de références et l'étude d'algorithmes.

Validation

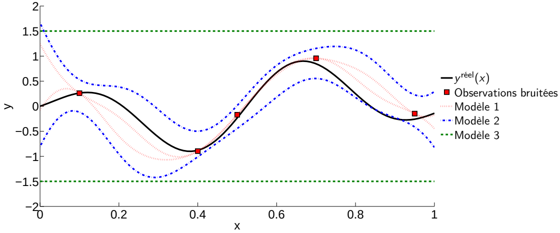
- Définition : processus visant à déterminer si un modèle est représentatif de la réalité, dans son périmètre d'utilisation $\leftrightarrow$ "solving the right equations".
- Cela suppose **la confrontation à des mesures** et l'utilisation de tests statistiques (test du χ_2...).

Code validé $\neq$ code parfait

- Pour être valide, un code est souvent amené à **maximiser** les **compensations d'erreur**.
  - $\Rightarrow$ Un code peut être **"valide" pour une application** et ne pas l'être pour une autre (d'où l'importance du périmètre d'utilisation).
  - $\Rightarrow$ Un code peut être **"valide" pour la restitution de certains observables** et ne pas l'être pour d'autres.
- Pour étendre le domaine de validité, il est souvent nécessaire de travailler à la **réduction** de ces **compensations d'erreur**.

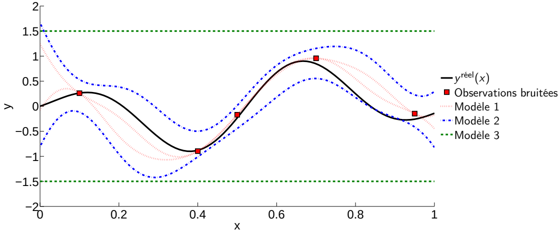


Code validé $\neq$ code utilisable



- Le modèle 1 n'est pas valide car il ne restitue pas la "réalité".
- Le modèle 3 est "plus valide" que le modèle 1, mais non utilisable.

Code validé $\neq$ code utilisable



- Le modèle 1 n'est pas valide car il ne restitue pas la "réalité".
- Le modèle 3 est "plus valide" que le modèle 1, mais non utilisable.

Bien caractériser les incertitudes ne signifie pas les réduire...

$\Rightarrow$ travailler sur des modèles physiques plus pertinents pour réduire ε^{sim} ;

$\Rightarrow$ améliorer les schémas de résolution et la stabilité des algorithmes pour réduire ε^{num} ;

$\Rightarrow$ intégrer davantage de mesures informatives pour réduire l'incertitude paramétrique.

Notations et objectifs

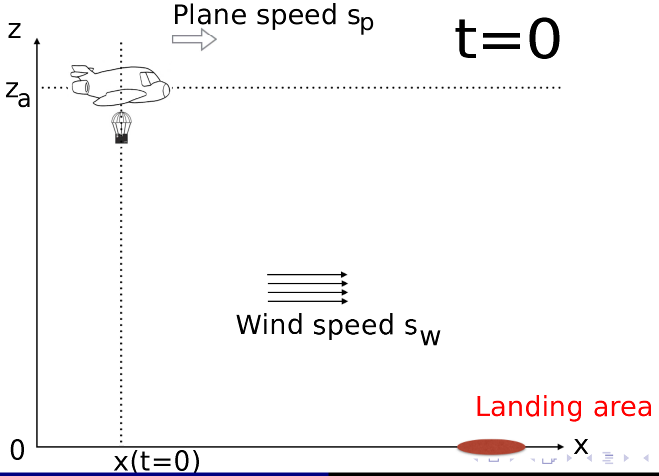
Validation de systèmes complexes

- Si l'on utilise la simulation pour analyser des systèmes pour lesquels peu ou pas d'expériences globales sont disponibles (déraillement de train, incident nucléaire, accident de voiture), le processus de validation est plus difficile.
- Dans ce cas, on effectue classiquement la validation d'un maximum de **sous-systèmes**, pour lesquels des mesures sont disponibles, et l'idée est ensuite d'accumuler systématiquement des "preuves" de bon fonctionnement du système global.
- Plusieurs guides (principalement aux USA) ont ainsi été proposés :
  - le CSAU (Code Scaling, Applicability and Uncertainty) est utilisé par la US Nuclear Regulatory Commission,
  - le CAS (Credibility Assessment Scale) est développé par la NASA
  - le PMI (Predictive Maturity Index) est développé par Los Alamos.
  - le PCMM (Predictive Capability Maturity Model) est mis-au-points au Sandia National Lab.

Notations et objectifs

L'exemple du parachutage d'un colis

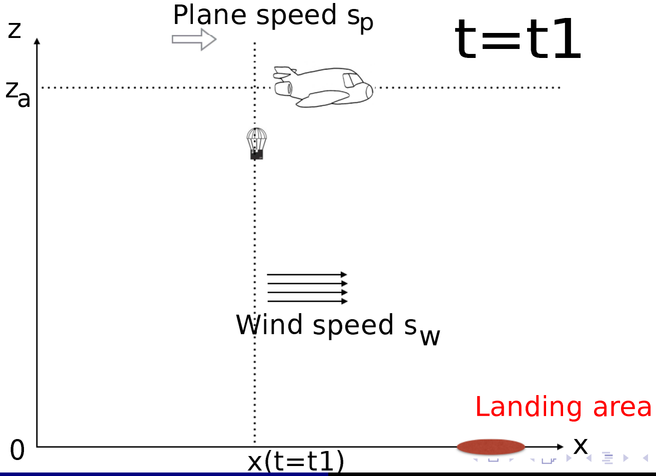
Comment localiser avec la simulation la position d'atterrissage d'un colis parachuté ?



Notations et objectifs

L'exemple du parachutage d'un colis

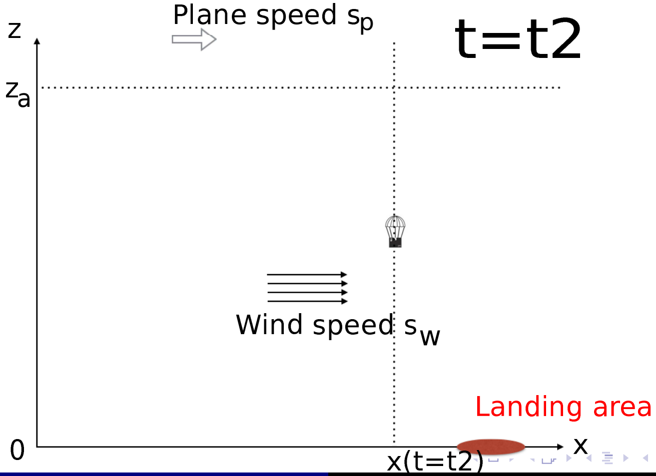
Comment localiser avec la simulation la position d'atterrissage d'un colis parachuté ?



Notations et objectifs

L'exemple du parachutage d'un colis

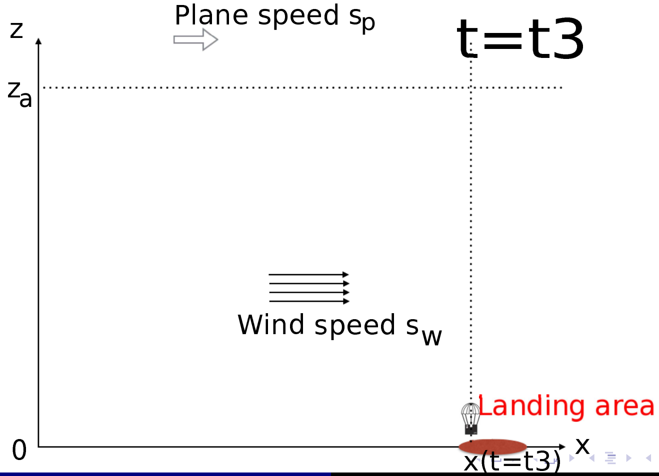
Comment localiser avec la simulation la position d'atterrissage d'un colis parachuté ?



Notations et objectifs

L'exemple du parachutage d'un colis

Comment localiser avec la simulation la position d'atterrissage d'un colis parachuté ?



Notations et objectifs

L'exemple du parachutage d'un colis

Sorties

- y^{real} est la "vraie" position d'atterrissage.
- En notant $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{g}$, la position "modélisée", $y^{\text{mod}}(\cdot;\boldsymbol{\beta})$, peut être vue comme la composante horizontale de $\boldsymbol{x}(t)$ lorsque $\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{e}_z \rangle = 0$:

$$\begin{cases} m\ddot{\boldsymbol{x}} = m\boldsymbol{g} - \boldsymbol{A}(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{s}_w)\left\|\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{s}_w\right\|, \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t=0) = \boldsymbol{s}_p, \quad \boldsymbol{x}(t=0) = (x_0, z_a). \end{cases}$$

- En notant $\boldsymbol{\delta} = dt$, la position "simulée", $y^{\text{sim}}(\cdot;\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})$, peut être vue comme la composante horizontale de $\widehat{\boldsymbol{x}}(t)$ lorsque $\langle \widehat{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{e}_z \rangle = 0$:

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}(t+dt) = \widehat{\boldsymbol{x}}(t) + \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t)dt, \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t+dt) = \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t) + \left(\boldsymbol{g} - \frac{1}{m}\boldsymbol{A}(\dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t) - \boldsymbol{s}_w(t))\left\|\dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t) - \boldsymbol{s}_w(t)\right\|\right)dt, \\ \dot{\widehat{\boldsymbol{x}}}(t=0) = \boldsymbol{s}_p, \quad \widehat{\boldsymbol{x}}(t=0) = (x_0, z_a). \end{cases}$$

Notations et objectifs

L'exemple du parachutage d'un colis

Entrées : $\boldsymbol{x} = (x_0, z_a, \boldsymbol{s}_p, \boldsymbol{s}_w, m, \boldsymbol{A})$

- (x_0, z_a), la position de largage (épistemique).
- $\boldsymbol{s}_p$, la vitesse de l'avion à $t = 0$ (épistemique).
- $\boldsymbol{s}_w$, la vitesse du vent, qui dépend du temps (aléatoire).
- m, la masse du colis (épistemique).
- $\boldsymbol{A}$, la matrice des forces aérodynamiques (épistemique).

- **Vérification** $\leftrightarrow$ est-ce que le schéma numérique choisi permet à $y^{\text{sim}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta})$ de converger vers $y^{\text{mod}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta})$ lorsque dt tend vers 0 / comment choisir dt ?
- **Validation** $\leftrightarrow$ est-il nécessaire d'introduire des erreurs numériques ou de modèle pour que y^{real} soit dans $\mathcal{I}_\alpha$, avec $\mathbb{P}(y^{\text{sim}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathcal{I}_\alpha) = 1 - \alpha$? / quelle structure d'erreur proposer ?

Plan de la séance

1 Introduction

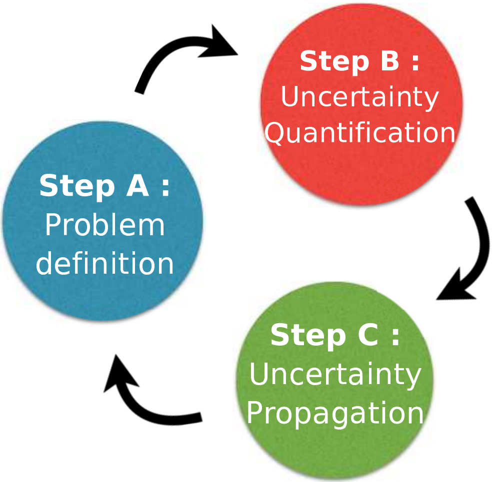
2 Notations et définitions

3 Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

4 Conclusion

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Schéma général



Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

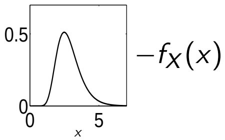
Step A : définition du problème

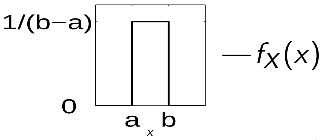
1. Quelle est la question ?
2. Quelles sont les quantités d'intérêt (QoI) ?
3. Quels modèles utiliser pour calculer ces QoI et répondre à la question ?
4. Quelles entrées et sorties pour ces modèles ?
5. Quels paramètres doivent être fixés pour pouvoir lancer ces modèles ?
6. Qu'est-ce qui peut manquer dans ces modèles ?
7. A-t-on des informations sur la structure de l'erreur de modèle qui peut affecter les sorties considérées ?
8. Quelle méthode est utilisée pour résoudre les équations des modèles ?
9. Sur quels paramètres sont basés ces solveurs ?
10. Peut-on évaluer l'erreur numérique de ces solveurs ?

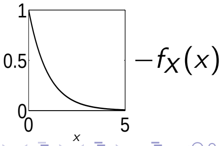
Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Step B : quantification des incertitudes

1. Quels sont les différentes sources d'incertitudes (sur les entrées et les sorties) ?
2. De quelle information dispose-t-on sur ces incertitudes ?
   - jugements d'expert (constraintes de positivité, bornes physiques,...),
   - mesures expérimentales directes et/ou indirectes ?
3. Quel est le modèle le "plus adapté" pour caractériser ces incertitudes, et notamment la structure de dépendance (inférence statistique) ?
   - modèles paramétriques (Gaussien, uniforme, Beta, ...),
   - modèles non paramétriques (représentations à noyaux),
   - théories alternatives (ensembles flous, P-box, fonctions de croyance,...).







Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Step C : propagation des incertitudes

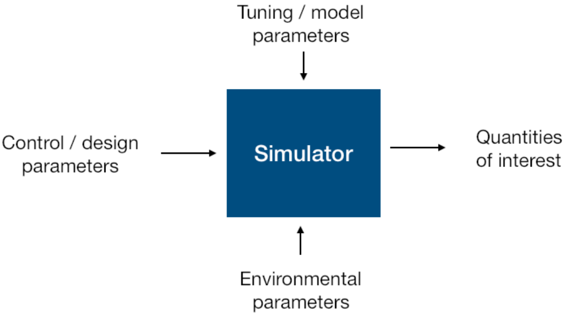
1. A-t-on accès aux équations sur lesquelles se base le modèle ?
   - $\rightarrow$ oui : on peut considérer des méthodes intrusives ou non,
   - $\rightarrow$ non : seules les méthodes non-intrusives peuvent être considérées. On parle dans ce cas de cas "boîte noire".
2. Le modèle est-il linéaire (ou faiblement non-linéaire) ? Si oui, on pourra partir sur des techniques de développement de Taylor.
3. Le modèle est-il monotone ?
4. A-t-on une quelconque information sur la régularité du modèle ?

$\Rightarrow$ Les techniques d'échantillonnage (telles que les approches Monte Carlo / Markov Chain Monte Carlo) sont généralement utilisées pour propager les incertitudes.

$\Rightarrow$ Moins le modèle est régulier, plus un grand nombre d'appels aux codes sont généralement nécessaires pour atteindre une précision donnée sur les résultats.

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

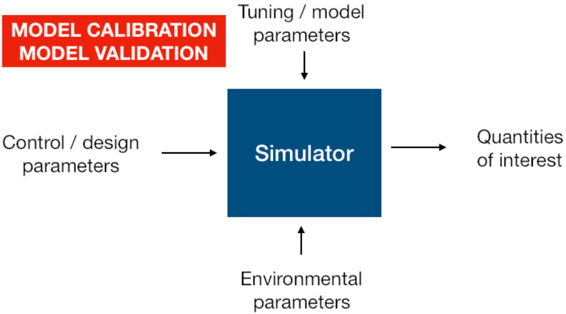
Step C : propagation des incertitudes : plusieurs types de problèmes



- Quantités d'intérêt $\boldsymbol{y}$
- Paramètres de modèle ("tuning") $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$,
- Paramètres d'environnement $\boldsymbol{x}^E$,
- Paramètres de contrôle/design $\boldsymbol{x}^D$.

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Step C : propagation des incertitudes : plusieurs types de problèmes

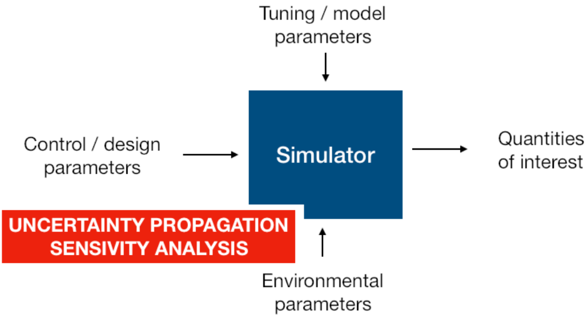


Paramètres de modèle (β, δ)

Calibration : trouver (β, δ) tel que que $\boldsymbol{y}^{\text{sim}} \approx \boldsymbol{y}^{\text{exp}}$.

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Step C : propagation des incertitudes : plusieurs types de problèmes

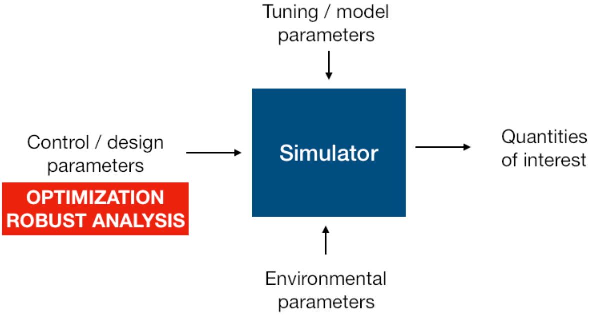


Paramètres d'environnement $\boldsymbol{x}^E$

Sensibilité : Trouver les composantes de $\boldsymbol{x}^E$ ayant le plus d'influence sur $\boldsymbol{y}$.
Propagation d'incertitude/fiabilité : Quantifier l'influence d'incertitudes sur $\boldsymbol{x}^E$ sur la connaissance de $\boldsymbol{y}$.

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Step C : propagation des incertitudes : plusieurs types de problèmes

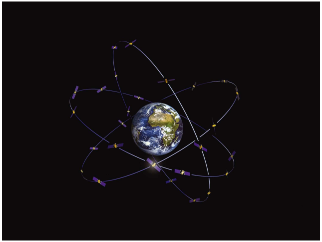


Paramètres de contrôle / design $\boldsymbol{x}^D$

Optimisation : Trouver les valeurs de $\boldsymbol{x}^D$ permettant d'optimiser les valeurs de $\boldsymbol{y}$.
Problème inverse : Identifier l'ensemble des valeurs de $\boldsymbol{x}^E$ permettant d'assurer que $\boldsymbol{y}$ vérifient certaines conditions.

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Troisième exemple : positionnement par GPS[1]



1. Connaissant la position de 5 satellites (incluant des incertitudes), comment calculer la position moyenne d'un récepteur GPS $\boldsymbol{R}$?
2. Quel serait le rayon de la sphère Ω centrée sur cette position moyenne telle que $\mathbb{P}(\boldsymbol{R} \in \Omega) = 90\%$?

1

1. Inspired from the Mathematical Competitive Game 2014-2015 of the French Federation of Mathematical Games

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Troisième exemple : positionnement par GPS

Step A : définition du problem

- On dispose de 5 satellites, et chaque satellite $\boldsymbol{S}_k$ envoie un signal, qui est analysé par $\boldsymbol{R}$.
- Les horloges des satellites sont supposées parfaites et synchronisées (c'est le "temps absolu").
- L'horloge du récepteur peut différer de ce temps absolu d'une quantité τ, appelée "time shift" dans la suite.
- Des signaux envoyés par les satellites, le récepteur déduit les temps $t_k = \tau + \|\boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{R}\| / c$, ou les distances $D_k = c\tau + \|\boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{R}\|$, avec c la vitesse de la lumière (supposée connue).

Remarque : pour ce problème, on n'a pas besoin de codes numériques.

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Troisième exemple : positionnement par GPS

Step B : sources d'incertitudes

- τ peut être positif ou négatif, et est inconnu. On le suppose uniformément distribué sur $\mathbb{T}$.
- On suppose que chaque satellite renvoie une PDF pour D_k, $f_{\boldsymbol{D}} = f_{D_1} \times \cdots \times f_{D_5}$. En pratique, cette PDF est donnée sous une forme discrète, et définie sur un sous-ensemble compact $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^5$.
- Les positions des satellites sont aussi incertaines. Les positions $\boldsymbol{S}_k$ sont néanmoins supposées indépendantes et distribuées (non-uniformément) dans des sphères $\mathbb{S}_k$, de centres et de rayons connus. Soient $f_{\boldsymbol{S}_k}$ les PDFs de $\boldsymbol{S}_k$.

Remarque : toutes les incertitudes sont épistémiques, il n'y a pas d'aléatoire ici, juste du manque d'information...

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Troisième exemple : positionnement par GPS

Step C : propagation des incertitudes

Par construction :

- $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{R}\right] = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{r} f_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$,
- $\mathbb{P}(\boldsymbol{R} \in \Omega) = \int_{\Omega} f_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r}$.

$\Rightarrow$ l'étape "clé" est la construction de $f_{\boldsymbol{R}}$.
$\Rightarrow$ Pour cela, on peut remarquer que pour tout $\boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{r}) &= \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{S}_1\times\cdots\mathbb{S}_5} f_{\boldsymbol{R},\tau,\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_5}(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_5) dt d\boldsymbol{s}_1 \dots d\boldsymbol{s}_5, \\
&= \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{S}_1\times\cdots\mathbb{S}_5} f_{\boldsymbol{D}}(ct + \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_1\|, \dots, ct + \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}_5\|) dt d\boldsymbol{s}_1 \dots d\boldsymbol{s}_5, \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{f_{\boldsymbol{D}}(c\tau + \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{S}_1\|, \dots, c\tau + \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{S}_5\|)}{f_\tau(\tau) f_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{S}_1) \dots f_{\boldsymbol{S}_5}(\boldsymbol{S}_5)}\right].
\end{aligned}$$

Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

Troisième exemple : positionnement par GPS

Step C : propagation des incertitudes - résolution pratique

- Le support des PDFs de $\boldsymbol{S}_k$, τ et $\boldsymbol{D}$ étant compacts, le support de $f_{\boldsymbol{R}}$ est aussi compact.
- On utilise alors des techniques d'échantillonnage pour évaluer la PDF en un nombre bien choisi de points de $\mathbb{R}^3$.
- La PDF peut ensuite être post-traitée pour calculer $\mathbb{E}[\boldsymbol{R}]$ et trouver Ω.

Application numérique

- L'incertitude sur τ est souvent de $\pm 10^{-9} s$, le rayon des sphères pour la position des satellites est souvent choisie égale à $2m$, tandis que l'incertitude sur la distance entre le récepteur et les satellites est souvent de l'ordre de $\pm 10m$ (pour des distances supérieures à 20000km).

$\Rightarrow$ le rayon de Ω, telle que $\mathbb{P}(\boldsymbol{R} \in \Omega) = 90\%$, semble être de $\approx 2m$.

Plan de la séance

1 Introduction

2 Notations et définitions

3 Formulation V&V-UQ de problèmes classiques

4 Conclusion

Conclusion

- Dans ce premier cours, on a présenté le formalisme et les notations usuelles des approches V&V-UQ.
- Ces approches se basent fortement sur la théorie des probabilités.
- Il existe des théories alternatives pour caractériser les incertitudes, qui ne seront pas abordées dans ce cours.
- Les approches V&V-UQ amènent souvent plus de questions et de discussions que de réponses tranchées, et doivent être vues comme des aides à la prise de décision.
- Les approches V&V-UQ ne sont pas là pour remplacer les systèmes physiques/mécaniques/économiques, mais pour maximiser l'information que l'on peut en tirer.
- Bien caractériser les incertitudes ne signifie pas forcément les réduire...