EDPS avancées et volumes finis

Sup' Galilée, MACS 3, le 15 Novembre 2019

N.B. : Les notes de cours et de TDs sont autorisées. La plus grande attention sera portée à la rigueur des raisonnements.

Exercice 1 :

En une dimension d'espace, sur le segment $]0, L[$ (avec $L > 0$), et étant donné une fonction f de $L^2(]0, L[)$, on considère l'équation suivante

$$-u'' = f \tag{1}$$

associée aux conditions aux limites de Neumann suivantes

$$u'(0) = a \text{ et } u'(L) = b. \tag{2}$$

Question 1 (1 pt) : Montrer qu'une condition nécessaire pour que les équations (1)–(2) puissent avoir une solution est

$$a - b = \int_0^L f(x)dx. \tag{3}$$

On suppose dans toute la suite de cet exercice que la relation (3) **est vérifiée.**

Question 2 (1 pt) : Pourquoi la solution de (1)–(2) ne peut elle pas être unique ?

Pour remédier à ce problème, on impose de plus la contrainte

$$\int_{[0,L]} u(x)dx = c \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

et on admettra que le système (1)–(2)–(4) admet une solution unique sous la condition que la relation de compatibilité (3) soit bien vérifiée.

Pour la discrétisation de (1), on découpe le segment $[0, L]$ en N intervalles notés T_i, avec $i \in [1, N]$. Les inconnues discrètes seront notées u_i et seront des approximations de la solution de (1)–(2) aux points x_i, milieux des cellules T_i, dont la longueur sera notée $|T_i|$.

On considère le schéma vu en cours :

$$-F_{i+1/2} + F_{i-1/2} = \int_{T_i} f(x)dx, \tag{5}$$

pour tout $i \in [1, N]$, avec :

$$F_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N-1. \tag{6}$$

Pour discrétiser les conditions aux limites, on prendra de plus :

$$F_{1/2} = a \quad \text{et} \quad F_{N+1/2} = b. \tag{7}$$

Enfin, l'équivalent discret de (4) est donné par

$$\sum_{i=1}^{N} |T_i| \, u_i = c. \tag{8}$$

Question 3 (3 pts) : Rappeler brièvement comment l'approximation (5)–(6) est obtenue et justifier le choix proposé par (7) et par (8).

Question 4 (1 pt) : Montrer que si la relation (3) est vérifiée, alors le système constitué des équations (5) pour $1 \leq i \leq N$ accompagné de (7) est équivalent au système constitué des équations (5) pour $1 \leq i \leq N-1$ accompagné de (7).

On considère donc à présent le système linéaire constitué des équations (5) **pour** $1 \leq i \leq N-1$ **(accompagné de** (6) **et** (7)**) et de l'équation** (8)**.** C'est donc un système carré de taille $N \times N$ lorsque l'on remplace les expressions des flux (6) et (7) dans les équations (5).

On rappelle que pour un système linéaire carré, existence de la solution pour tout second membre et unicité de la solution pour tout second membre sont deux propriétés équivalentes, et que l'unicité se prouve par injectivité : supposons que toutes les données soient nulles, c'est-à-dire $a = b = c = 0$ et $\int_{T_i} f(x)dx = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$; il s'agit de prouver qu'alors nécessairement tous les u_i sont nuls.

Question 5 (2 pts) : On suppose que $a = b = c = 0$ et $\int_{T_i} f(x)dx = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$. En utilisant la condition aux limites à gauche et en raisonnant de proche en proche, montrer que $F_{i+1/2} = 0$ pour tout i, avec $0 \leq i \leq N$. En déduire qu'il existe $U \in \mathbb{R}$ tel que $u_i = U$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Déduire de (8) que $u_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Conclure.

On suppose à présent qu'en pratique $\int_{T_i} f(x)dx$ est calculé à l'aide d'une formule de quadrature. Le système à résoudre est donc

$$-F_{i+1/2} + F_{i-1/2} = Q(T_i, f), \tag{9}$$

pour tout $i \in [1, N]$, avec toujours (6) et (7), et on a

$$Q(T_i, f) = \int_{T_i} f(x)dx + \varepsilon_i \ , \ \ 1 \leq i \leq N. \tag{10}$$

où ε_i est l'erreur due à la formule de quadrature, et l'on supposera que

$$|\varepsilon_i| \leq C|T_i|^{1+\alpha}, \tag{11}$$

où α est l'ordre de la formule de quadrature.

Question 6 (1 pt) : Montrer que le système composé des équations (9) (avec toujours (7)) ne peut pas posséder de solution sauf si $\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = 0$. Que pensez vous de cette condition en pratique ?

Pour remédier à ce problème, on considère alors le système de taille $(N+1) \times (N+1)$ suivant, d'inconnues (u_i, λ) avec $1 \leq i \leq N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-F_{i+1/2} + F_{i-1/2} + |T_i|\lambda = Q(T_i, f), \tag{12}$$

pour tout $i \in [1, N]$ (avec toujours (6) et (7)), accompagné de (8).

Question 7 (3 pts) : Prouver que si les données sont nulles ($a = b = c = 0$ et $Q(T_i, f) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$), alors $L\lambda = 0$, puis comme précédemment $F_{i+1/2} = 0$ pour tout $0 \leq i \leq N$, et enfin $u_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Conclure. Quel est l'avantage du système (12) pour tout $i \in [1, N]$ (avec toujours (6) et (7)), accompagné de (8), par rapport au système (9) pour tout $i \in [1, N]$ (avec toujours (6) et (7)), accompagné de (8) ?

Question 8 (2 pts) : Montrer à présent que pour des données non nulles, alors

$$L\lambda = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \tag{13}$$

et déduire de (13) et (11) que

$$|\lambda| \leq Ch^\alpha, \tag{14}$$

où $h = \sup_i |T_i|$.

On souhaite mesurer à présent l'écart entre la solution du système "idéal" (sans formule de quadrature) composé de (5)–(6)–(7)–(8) et la solution du système résolu en pratique (avec formule de quadrature) composé de (12)–(6)–(7)–(8). On note $u_i^{(1)}$ et $F_{i+1/2}^{(1)}$ les quantités liées à ce premier système "idéal" et $u_i^{(2)}$ et $F_{i+1/2}^{(2)}$ les quantités liées à ce second système, celui que l'on résout en pratique.

Question 9 (2 pts) : Montrer grâce aux conditions aux limites que $F_{1/2}^{(1)} - F_{1/2}^{(2)} = 0$, puis de proche en proche grâce à (5) et (12) que $|F_{i+1/2}^{(1)} - F_{i+1/2}^{(2)}| \leq Ch^\alpha$ pour tout $0 \leq i \leq N$.

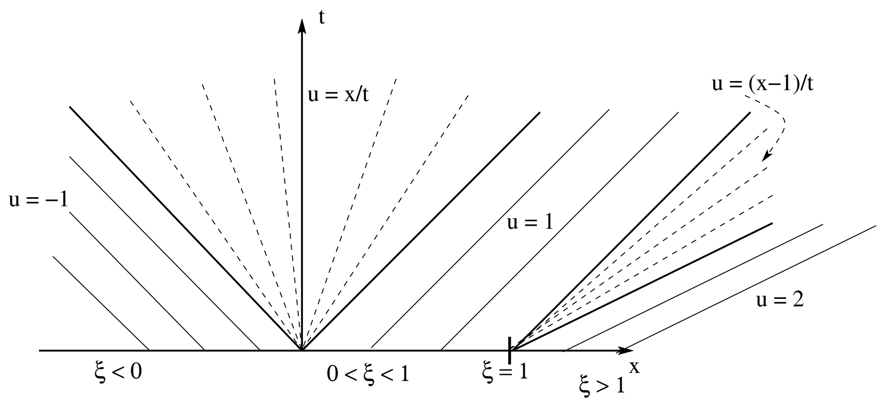

FIGURE 1 – Caractéristiques et détentes pour la Question 1

Question 10 (2 pts) : Montrer ensuite grâce à l'inégalité de Poincaré discrète vue en cours que ceci implique que $|u_i^{(1)} - u_i^{(2)}| \leq Ch^\alpha$ pour tout $1 \leq i \leq N$. Conclure quant à l'effet de l'utilisation d'une formule de quadrature sur la précision du schéma.

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation d'inconnue u :

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, \tag{15}$$

munie de la condition initiale

$$u(x, t = 0) = u_0(x). \tag{16}$$

Déterminer la solution faible entropique de cette équation dans les deux cas proposés aux Questions 1 et 2, lorsque $f(u) = \frac{u^2}{2}$. On tracera les caractéristiques et les éventuelles lignes de choc dans le plan (x, t), on donnera l'expression de la solution $u(x, t)$ pour tout $t > 0$ et on tracera de plus l'allure de la solution à un ou des instant(s) convenablement choisi(s).

Question 1 (3 pts) :

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}.$$

Les caractéristiques ont pour équation

$$x(t) = \xi + a(u_0(\xi))t = \xi + u_0(\xi)t$$

On distingue donc trois cas

$$\begin{cases} x(t) = \xi - t & \text{si} \quad \xi < 0 \\ x(t) = \xi + t & \text{si} \quad 0 \leq \xi < 1 \\ x(t) = \xi + 2t & \text{si} \quad 1 \leq \xi \end{cases}.$$

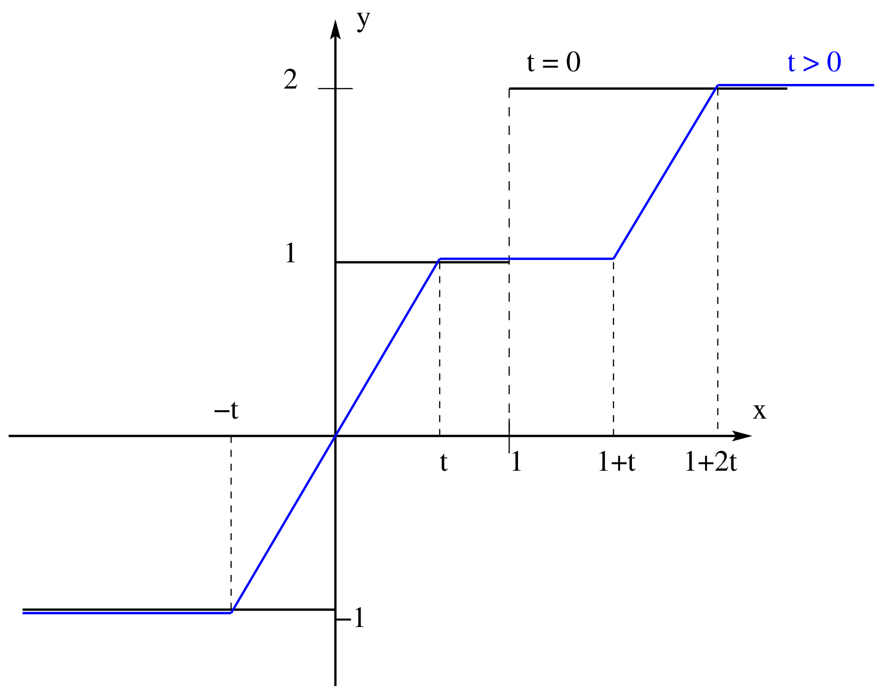

FIGURE 2 – Solution $u(x,t)$ pour la Question 1 pour $t = 0$ (en noir) et pour $t > 0$ (en bleu)

On a trois zones dans le plan, à l'intérieur desquelles un point (x,t) quelconque se trouve sur une et une seule caractéristique, et on peut facilement calculer le pied de celle-ci

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Si } \ x < -t & \text{alors} & \xi = x + t \\ \text{Si } \ t \le x < 1 + t & \text{alors} & \xi = x - t \\ \text{Si } \ 1 + 2t \le x & \text{alors} & \xi = x - 2t \end{array}\right. .$$

Et on a alors

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Si } \ x < -t & \text{alors} & u(x,t) = u_0(\xi) = u_0(x+t) = -1 \\ \text{Si } \ t \le x < 1 + t & \text{alors} & u(x,t) = u_0(\xi) = u_0(x-t) = 1 \\ \text{Si } \ 1 + 2t \le x & \text{alors} & u(x,t) = u_0(\xi) = u_0(x-2t) = 2 \end{array}\right. .$$

Dans les zones de la figure 1 sans caractéristiques, on trace les droites ayant pour pied les points de discontinuité initiaux, c'est-à-dire les droites d'équation $x = ct$, pour $-1 \le c \le 1$, et les droites d'équation $x = 1 + ct$ pour $1 \le c \le 2$. On vérifie que u est constante sur chacune de ces droites

— Dans la première zone, on vérifie que $u(x,t) = \frac{x}{t}$ est solution classique

— Dans la seconde zone, on vérifie que $u(x,t) = \frac{(x-1)}{t}$ est solution classique

Remarque : de façon générale, si on a une discontinuité en x_0 à l'instant initial, avec u_0 croissante en ce point, la solution sera $u(x,t) = \frac{(x-x_0)}{t}$ dans la zone du plan privée de caractéristiques. On a donc ici, pour résumer (voir figure 2)

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -t \\ \frac{x}{t} & \text{si} \quad -t \leq x < t \\ 1 & \text{si} \quad t \leq x < 1+t \\ \frac{(x-1)}{t} & \text{si} \quad 1+t \leq x < 1+2t \\ 2 & \text{si} \quad 1+2t \leq x \end{cases}.$$

Cette solution est la solution faible entropique ; en effet :

- Elle satisfait aux conditions initiales (presque partout)
- Partout où elle est $\mathcal{C}^1$, elle est solution au sens classique
- Elle est globalement continue (pour $t > 0$), on n'a donc aucune condition supplémentaire à vérifier

Question 2 (4 pts) :

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -3 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}.$$

La condition initiale est décroissante et discontinue en $x = 0$ et en $x = 1$. On a donc (au début) deux chocs.

Le premier est issu de $x = 0$ à $t = 0$ et a pour vitesse $\sigma_1'(t) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$. Son équation est donc $\sigma_1(t) = \frac{3}{2}t$.

Le second choc est issu de $x = 1$ à $t = 0$ et a pour vitesse $\sigma_2'(t) = \frac{1-3}{2} = -1$. Son équation est donc $\sigma_2(t) = 1 - t$.

Ces deux chocs séparent les caractéristiques d'équation

$$x(t) = \xi + 2t \;\text{ pour }\; \xi < 0$$

et

$$x(t) = \xi + t \;\text{ pour }\; 0 \leq \xi < 1$$

pour $x = \sigma_1(t)$ d'une part et les caractéristiques d'équation

$$x(t) = \xi + t \;\text{ pour }\; 0 \leq \xi < 1$$

et

$$x(t) = \xi - 3t \;\text{ pour }\; \xi \leq 1$$

pour $x = \sigma_2(t)$ d'autre part.

Ces deux chocs vont interagir lorsque $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$, c'est-à-dire en $t^* = \frac{2}{5}$.

Tant que $t < t^*$, on a trois zones dans le plan : la première, pour $x < \sigma_1(t)$ dans laquelle u vaut 2, la deuxième pour $\sigma_1(t) \leq x < \sigma_2(t)$ dans laquelle u vaut 1 et la troisième, pour $\sigma_2(t) \leq x$ dans laquelle u vaut -3.

$$u(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < \frac{3}{2}t \\ 1 & \text{si} \quad \frac{3}{2}t \leq x < 1-t \\ -3 & \text{si} \quad 1-t \leq x \end{cases}.$$

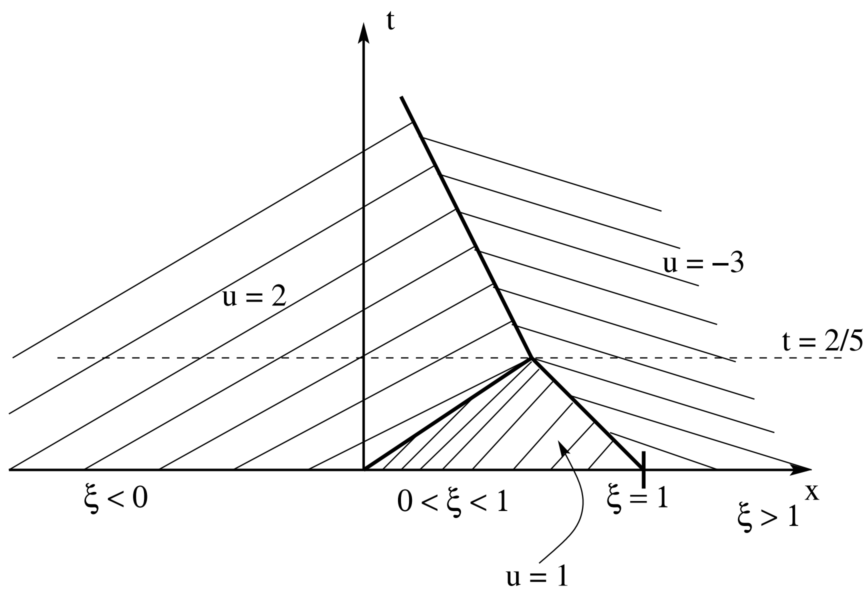

Figure 3 – Caractéristiques et chocs pour la Question 2

À $t = t^*$, la partie centrale disparaît puisque $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)$; il reste donc deux zones : on a $u(x, t^*) = 2$ pour $x < \frac{3}{5}$ et $u(x, t^*) = -3$ pour $x > \frac{3}{5}$.

Au-delà de t^*, il reste deux zones séparées par un choc pour lequel la vitesse est donnée par $\sigma_3'(t) = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$. Son équation est donc $\sigma_3(t) = -\frac{t}{2} + \frac{4}{5}$. La solution vaut 2 pour $x < \sigma_3(t)$ et -3 pour $x \geq \sigma_3(t)$.

$$u(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -\frac{t}{2} + \frac{4}{5} \\ -3 & \text{si} \quad -\frac{t}{2} + \frac{4}{5} \leq x \end{cases} .$$