MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 7 - Année 2022-2023

1 Méthodes de réduction de variance

L'idée de cet exercice est d'illustrer les principales méthodes de réduction de variance, afin d'accélérer les convergences des extimateurs Monte-Carlo. On cherche ainsi à évaluer numériquement la valeur de π, à partir de tirages aléatoires de deux variables indépendantes X_1 et X_2, qui sont toutes deux uniformément réparties sur $[0,1]$.

On note $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$, et on définit 1_Ω la fonction indicatrice définie sur $[0,1] \times [0,1]$ telle que $1_\Omega(x_1, x_2) = 1$ si $(x_1, x_2) \in \Omega$ et 0 sinon.

Approche Monte-Carlo classique.

1. Exprimer π en fonction de 1_Ω.

2. Définir l'estimateur Monte-Carlo, $\widehat{I}_N$, de π associé. Calculer la moyenne et la variance de cet extimateur, $\mathrm{Var}(\widehat{I}_N)$.

3. Déduire de cette variance le nombre moyen de tirages de X_1 et X_2 nécessaires à une estimation de π à 10^{-4} près avec une confiance de 95%.

Monte-Carlo conditionnel

4. En utilisant le fait que $x_1^2+x_2^2 \leq 1 \Leftrightarrow x_2 \leq \sqrt{1-x_1^2}$, récrire π en fonction de X_1 seulement. En déduire un nouvel estimateur de π, nommé $\widehat{I}_N^{\text{cond}}$.

5. Evaluer la variance de ce nouvel estimateur, puis comparer au cas Monte-Carlo précédent.

6. On propose de combiner l'estimateur précédent à une **stratification** des tirages. Pour cela, on propose de concentrer αN tirages à l'intervalle $[0, 1/2]$ et seulement $(1-\alpha)N$ tirages à l'intervalles $[1/2, 1]$. On nomme alors Y et Z les variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ respectivement. Proposer alors un nouvel estimateur de π, que l'on nomme $\widehat{I}^{\text{ST}}$.

7. Montrer que :

$$\mathrm{Var}(\widehat{I}^{\text{ST}}) = \frac{1}{4N}\left\{\frac{1}{\alpha}\mathrm{Var}(\sqrt{1-Y^2}) + \frac{1}{1-\alpha}\mathrm{Var}(\sqrt{1-Z^2})\right\}.$$

8. Calculer $C_Y = \mathrm{Var}(\sqrt{1-Y^2})$ et $C_Z = \mathrm{Var}(\sqrt{1-Z^2})$.

9. Calculer le rapport optimal $\alpha^\star$ minimisant $\mathrm{Var}(\widehat{I}^{\text{ST}})$ en fonction de C_Y et C_Z.

10. Evaluer la valeur de la variance associée à cette valeur de $\alpha^\star$ et comparer aux cas précédents.

Variable de contrÃ´le et tirage d'importance

11. On se donne une fonction de contrÃ´le g_r, ainsi que la constante associée $I_r = \mathbb{E}\left[g_r(X_1)\right]$ que l'on suppose connue. On nomme alors $\widehat{I}_N^{VC} = bI_r + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \left(\sqrt{1-X_1^2(\theta_n)} - bg_r(X_1)\right)$. Exprimer la variance de cet estimateur en fonction de b, $\mathrm{Var}(\widehat{I}_N^{\mathrm{cond}})$, $\mathrm{Cov}\left(\sqrt{1-X_1^2}, g_r(X_1)\right)$ et $\mathrm{Var}(g_r(X_1))$.

12. Evaluer la valeur optimale $b^\star$ permettant de minimiser la variance de $\widehat{I}_N^{VC}$.

13. Pour $g_r(x) = (1-x)^2$, on trouve :

$$\rho^2 = \frac{\mathrm{Cov}\left(\sqrt{1-X_1^2}, g_r(X)\right)^2}{\mathrm{Var}(g_r(X_1))\mathrm{Var}(\sqrt{1-X_1^2})} \approx 0.642.$$

En déduire la variance de l'estimateur associé à cette fonction de contrÃ´le.

14. On récrit :

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\frac{f(x)}{f(x)}dx = \mathbb{E}_f\left[\frac{\sqrt{1-X_1^2}}{f(X_1)}\right].$$

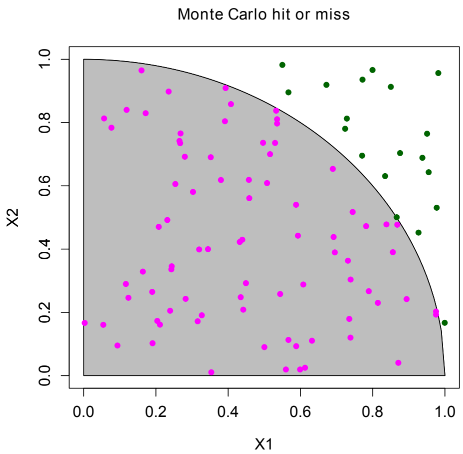
On définit alors l'estimateur de tirage d'importance :

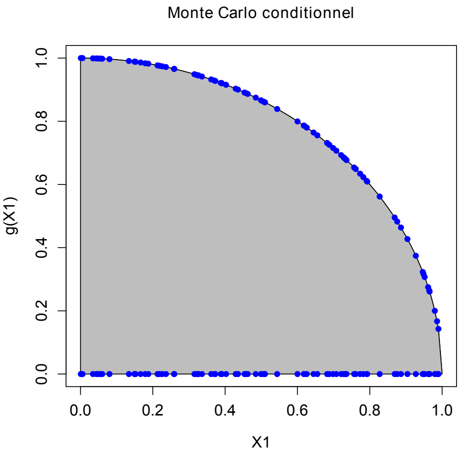
$$\widehat{I}_N^{TI} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{1-\widetilde{X}^2}}{f(\widetilde{X})},$$

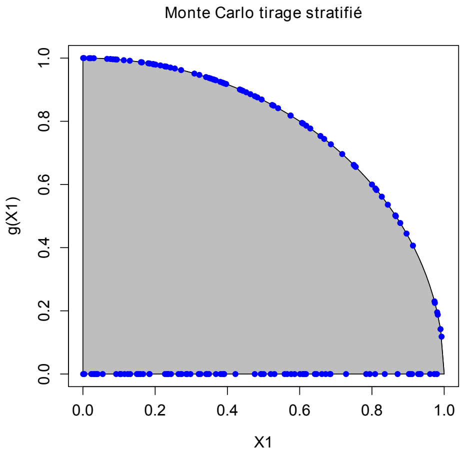
avec $\widetilde{X}$ une variable aléatoire de PDF f. Exprimer la variance de ce nouvel estimateur.

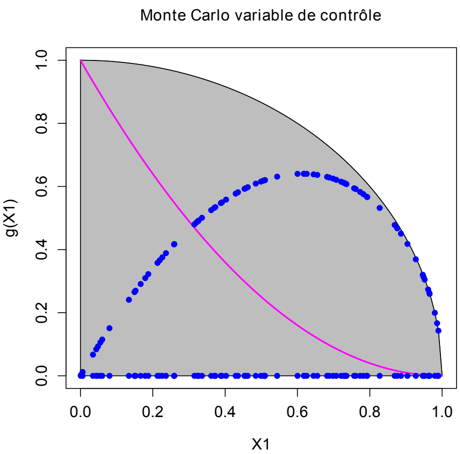
15. Pour $f(x) = 1.5 - x$, on admet que $\mathrm{Var}(\widehat{I}_N^{TI}) \approx \frac{0.0099}{N}$. Expliquer dans quelle mesure $f(x)$ permet de réduire cette variance.

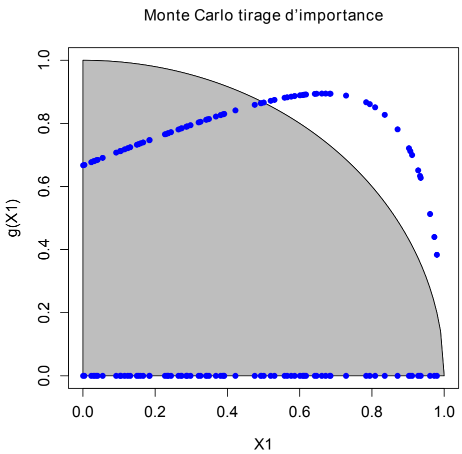
16. Commenter l'ensemble des méthodes de réduction de variance proposées, en terme d'efficacité numérique.


Monte Carlo hit or miss
X2
X1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Monte Carlo conditionnel
g(X1)
X1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Monte Carlo tirage stratifié
g(X1)
X1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Monte Carlo variable de contrôle
g(X1)
X1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Monte Carlo tirage d'importance
g(X1)
X1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0