MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 4 - Année 2022-2023

1 Loi gaussienne et erreur expérimentale

On dispose de N mesures indépendantes, $X_1, \ldots, X_N$, d'une même quantité X. Le bruit de mesure permet de considérer que ces mesures sont aléatoires. On suppose que l'erreur de mesure est caractérisée par une unique densité f inconnue. On suppose néanmoins que les erreurs de mesure sont centrées sur X. On pose $\Phi = \log(f)$.

1. Ecrire la vraisemblance $\mathcal{L}(X)$ d'obtenir $X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_n$ en fonction de f et X.

2. On suppose que cette fonction de vraisemblance est maximale lorsque $X = \frac{x_1+\ldots+x_N}{N} =: \widehat{x}$, pour tout $N \geq 1$. En déduire que la quantité $\Phi(x_1-X)+\ldots+\Phi(x_N-X)$ est également maximale en $X = \widehat{x}$.

3. En déduire que :

$$\Phi'(x_1 - \widehat{x}) + \ldots + \Phi'(x_N - \widehat{x}) = 0.$$

4. Déduire du cas $N = 2$ que Φ' est une fonction impaire.

5. Déduire du cas $N = 3$ que Φ' vérifie, pour tout u, v : $\Phi'(u + v) = \Phi'(u) + \Phi'(v)$.

6. En déduire que $\Phi(X) = \alpha \frac{X^2}{2} + \beta$.

7. En déduire que la fonction f est une fonction gaussienne.

2 Inférence de la loi d'une quantité d'intérêt à partir de mesures indirectes

On s'intéresse à la loi statistique de la variable aléatoire Y, dont on suppose une loi a priori gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2. Pour cela, on dispose de la mesure d'une quantité Z, telle que :

$$Z = \alpha Y + \varepsilon,$$

où α est une constante connue, reliant la mesure à la variable aléatoire d'intérêt, et ε est une erreur de mesure aléatoire, de loi gaussienne de moyenne nulle et de variance connue σ^2_{mes}. On suppose que les grandeurs Y et ε sont indépendantes statistiquement.

1. Calculer la moyenne et la covariance de Z.

2. Calculer la covariance croisée entre Z et Y, $\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])(Z-\mathbb{E}[Z])\right]$.

3. En déduire que le vecteur (Y,Z) est gaussien, de moyenne $(\mu,\alpha\mu)$, et de matrice de covariance $\begin{bmatrix} \sigma^2 & \alpha\sigma^2 \\ \alpha\sigma^2 & \alpha^2\sigma^2+\sigma^2_{\text{mes}} \end{bmatrix}$.

4. A partir des formules de conditionnement gaussien, en déduire la loi de $(Y|Z)$.

3 Mesures redondantes et réduction des incertitudes

On cherche à mesurer deux quantités Y_1 et Y_2. On dispose pour cela de processus expérimentaux bruités permettant de mesurer directement Y_1 et Y_2, mais également Y_1+Y_2. On note alors respectivement X_1^{obs}, X_2^{obs} et X_3^{obs} les résultats de mesure des grandeurs Y_1, Y_2 et Y_1+Y_2, que l'on suppose indépendants statistiquement, et dont on peut supposer un comportement gaussien :

$$X_1^{\text{obs}} \sim \mathcal{N}\left(Y_1,V_1\right),\ X_2^{\text{obs}} \sim \mathcal{N}\left(Y_2,V_2\right),\ X_3^{\text{obs}} \sim \mathcal{N}\left(Y_1+Y_2,V_3\right),$$

où les incertitudes de mesure V_1, V_2 et V_3 sont connues.

1. Calculer la probabilité de l'évènement $(x_1 \leq X_1^{\text{obs}} \leq x_1+dx_1, x_2 \leq X_2^{\text{obs}} \leq x_2+dx_2, x_3 \leq X_3^{\text{obs}} \leq x_3+dx_3)$.

2. Montrer que le logarithme de cette probabilité est proportionnel, à une constante additive près, à :

$$Q := Y_1^2\left(\frac{1}{V_1}+\frac{1}{V_3}\right)+Y_2^2\left(\frac{1}{V_2}+\frac{1}{V_3}\right)+\frac{2Y_1Y_2}{V_3}-2Y_1\left(\frac{x_1}{V_1}+\frac{x_3}{V_3}\right)-2Y_2\left(\frac{x_2}{V_2}+\frac{x_3}{V_3}\right).$$

3. En posant $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)$, montrer que Q est égal, à une constante additive près, à :

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu})^T[R]^{-1}(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\mu}),$$

où les grandeurs $\boldsymbol{\mu}$ et $[R]^{-1}$ sont à expliciter.

4. Dans quelle mesure peut on en déduire que l'incertitude sur le couple (Y_1,Y_2) est gaussienne ? Commenter l'apport de la mesure de Y_1+Y_2 sur cette incertitude.

5. Sans refaire les calculs, expliquer comment intégrer une mesure indépendante de Y_1-Y_2, une seconde mesure de Y_1 ou Y_2.