MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

DM2 - Année 2022-2023

1 Copule d'Ali-Mikhail-Haq

On considère la fonction suivante :

$$C : \begin{cases} [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto \dfrac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v).} \end{cases} \tag{1}$$

1. Pour quelles valeurs de θ la fonction C peut être considérée comme une fonction copule ?

2. Soient U et V deux variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0,1]$, dont la relation de dépendance est caractérisée par le copule C, de valeur θ donnée. On cherche à quantifier le risque qu'une des deux variables aléatoires soit plus grande que $0 < S < 1$, c'est à dire la probabilité $P_f := \mathbb{P}((U \geq S) \cup (V \geq S))$. Exprimer P_f en fonction de S et de θ.

3. On considère maintenant deux vecteurs aléatoires (U_1, V_1) et (U_2, V_2) dont chaque composante est uniformément distribuée sur $[0,1]$, et dont les relations de dépendance sont définies par la fonction C, mais de paramètres respectifs θ_1 et θ_2. Comparer alors les valeurs de $P_f^{(1)} := \mathbb{P}((U_1 \geq S) \cup (V_1 \geq S))$ et $P_f^{(2)} := \mathbb{P}((U_2 \geq S) \cup (V_2 \geq S))$ en fonction de θ_1 et θ_2.

4. En déduire la valeur de θ permettant de minimiser P_f.

5. On note $\rho = \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[V]$ le coefficient de corrélation entre U et V. Rappeler le lien entre la densité du couple (U,V), notée $f_{U,V}$ et la fonction copule C, ainsi que les valeurs de $\mathbb{E}[U]$ et $\mathbb{E}[V]$.

6. En déduire (en passant par une intégration par partie justifiée) que :

$$\mathbb{E}[UV] = \int_0^1 \int_0^1 C(u,v)dudv. \tag{2}$$

7. Montrer que la dérivée de ρ par rapport à θ est positive.

8. En déduire la valeur de θ telle que U et V sont les plus corrélés positivement. Commenter par rapport aux conclusions de la question 4.