MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 8 - Année 2022-2023

1 Analyse statique d'une éolienne et fiabilité

On définit les deux repères suivants :

$$\begin{array}{l} \text{repère cartésien} : (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)\,, \\ \text{repère cylindrique} : (\boldsymbol{e}_r(\theta), \boldsymbol{e}_\theta(\theta), \boldsymbol{e}_z) \end{array}.$$

On modélise l'éolienne comme un cylindre plein de rayon R, de section S et de hauteur H, et l'action du vent sous la forme d'une force de pression non uniforme (cf figure **??**) :

$$p(\theta, z) = cz^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

1. Justifier, d'après l'expression de la pression, que le déplacement maximal de l'éolienne se situe en $z = H$ et selon $\boldsymbol{e}_x$. On admet que l'amplitude maximale de ce déplacement (appelée flêche) vaut :

$$v^{\max} = \frac{13cH^6}{90ER^3},$$

avec E la rigidité de l'éolienne.

2. On observe que les dimensions R et H sont connues de manière incertaine, et prennent respectivement des valeurs uniformément réparties dans $[R_0, R_0 + \Delta R]$, $[H_0, H_0 + \Delta H]$. On définit alors P_f la probabilité que la flêche soit supérieure à un seuil V. Montrer que :

$$P_f = \mathbb{P}(R^{-3}H^6 > S),$$

avec S un seuil à déterminer.

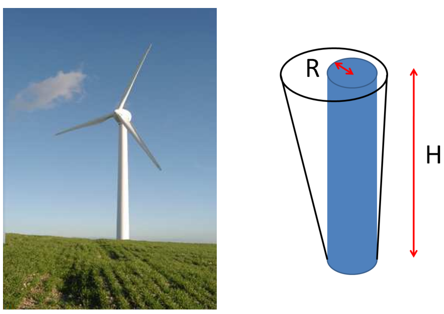

FIGURE 1 – Modélisation approchée d'une éolienne.

3. Représenter sur un graphique la zone de défaillance, dans le cas où :

$$\begin{cases} R_0 \leq (H_0 + \Delta H)^2 S^{-1/3} \leq R_0 + \Delta R, \\ H_0 \leq R_0^{1/2} S^{1/6} \leq H_0 + \Delta H. \end{cases}$$

Expliquer alors comment calculer P_f (sans développer tous les calculs).

2 Marges de sécurité

On s'intéresse à la garantie d'un système $\mathcal{S}$, pour lequel on aimerait s'assurer que la valeur "réelle" d'une quantité d'intérêt pour la sécurité, notée $y^{\text{réel}}$ soit inférieure à un seuil S. Pour cela, on suppose que l'on dispose d'un simulateur de cette quantité d'intérêt, notée y^{sim}. Cette quantité simulée est aléatoire, du fait qu'elle intègre un certain nombre d'incertitudes (numériques, paramétriques, de modèle). Pour assurer le bon fonctionnement du système, on se donne alors un niveau de risque acceptable α (par exemple $\alpha = 5\%$), et on cherche à vérifier que :

$$p = \mathbb{P}(y^{\text{sim}} > S) < \alpha.$$

Afin d'estimer cette probabilité p, on suppose disposer de N tirages indépendants de y^{sim}, notés $y_1, \ldots, y_N$.

1. Rappeler l'estimateur Monte Carlo de p, noté $\widehat{p}$, ainsi que sa loi asymptotique lorsque $N \to +\infty$.

2. Si $p = \alpha$, en déduire que $\mathbb{P}(\widehat{p} < \alpha) = 1/2$.

3. Afin de minimiser les chances de garantir un système ne devant pas être garanti, on se donne le critère suivant :

"On accepte de garantir le système $\mathcal{S}$ si $\widehat{p} + a < \alpha$".

Quel doit être le signe de a pour que l'introduction de la marge permette de réduire le nombre de garanties à tord ? Commenter l'appellation "marge de sécurité" pour a, ainsi que l'appellation "risque de garantie à tord" pour $r = \max_{p \geq \alpha} \mathbb{P}(\widehat{p} + a < \alpha)$.

4. En supposant que $\widehat{p}$ suit sa loi asymptotique, montrer que $\mathbb{P}(\widehat{p} + a < \alpha) = \Phi\left(\frac{(\alpha - p - a)\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

5. On se place dans la configuration où $p < \frac{1}{2}$. Montrer alors que $p \mapsto \mathbb{P}(\widehat{p} + a < \alpha)$ est une fonction décroissante vis-à-vis de p.

6. En déduire la plus petite valeur de a permettant d'assurer que pour tout $p \geq \alpha$, $\mathbb{P}(\widehat{p} + a < \alpha) \leq 1 - \gamma$, c'est à dire la valeur de a permettant d'assurer que $r \leq 1 - \gamma$, avec γ un niveau de confiance donné (par exemple $\gamma = 95\%$).

3 Fiabilité et processus ponctuels

On s'intéresse à une quantité Y de PDF f_Y. On cherche à calculer $P_f = \mathbb{P}(Y > S)$, où S est un seuil donné.

1. Soient $Y_1, \ldots, Y_N$ N réalisations indépendantes de Y. En déduire l'estimateur Monte Carlo de P_f, que l'on nomme $\widehat{P}_f$.

2. Calculer la moyenne et la variance de cet estimateur $\widehat{P}_f$.

3. On note $\delta = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{P}_f)}/\mathbb{E}\left[\widehat{P}_f\right]$ le coefficient de variation de cet estimateur. En déduire la valeur de N pour que δ soit inférieur ou égal à 0.1. Donner les valeurs de N associées aux valeurs $P_f \in \left\{10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}\right\}$. Commenter.

4. Pour accélérer cette estimation de P_f, on introduit les deux probabilités suivantes, pour $S_1 < S$:

$$P_1 = \mathbb{P}(Y > S_1), \quad P_2 = \mathbb{P}(Y > S \mid Y > S_1), \tag{1}$$

et on note $\widehat{P}_1$ et $\widehat{P}_2$ leurs estimateurs Monte Carlo associés à $N_1 \leq N$ tirages indépendants de Y et $N - N_1$ tirages indépendants de $(Y > S \mid Y > S_1)$. En déduire un nouvel estimateur de P_f en fonction de $\widehat{P}_1$ et $\widehat{P}_2$, que l'on nomme cette fois $\widetilde{P}_f$.

5. Montrer que $\mathbb{E}\left[\widetilde{P}_f\right] = P_f$ et que :

$$\mathrm{Var}(\widetilde{P}_f) = \frac{P_1(1-P_1)P_2(1-P_2)}{N_1(N-N_1)} + \frac{P_1(1-P_1)P_2^2}{N_1} + \frac{P_2(1-P_2)P_1^2}{N-N_1}. \tag{2}$$

6. Dans le cas où N est fixe et $P_1 = 1$, en déduire la valeur de N_1 permettant de minimiser $\mathrm{Var}(\widetilde{P}_f)$.

7. De même, dans le cas où N est fixe et $P_2 = 1$, en déduire la valeur de N_1 permettant de minimiser $\mathrm{Var}(\widetilde{P}_f)$.

8. Dans le cas où $P_1 = P_2$, trouver la valeur de N_1 permettant de minimiser $\mathrm{Var}(\widetilde{P}_f)$.

9. A valeur de N fixée, en déduire un critère sur la valeur de P_f à partir de laquelle une telle décomposition est intéressante, au sens où $\mathrm{Var}(\widetilde{P}_f) \leq \mathrm{Var}(\widehat{P}_f)$.

10. Application numérique. Pour $N = 10^4$, et $P_f \in \{0.5, 0.1, 0.01\}$, indiquer s'il vaut mieux considérer $\widetilde{P}_f$ ou $\widehat{P}_f$.