

Schémas Volumes Finis (VF) pour les écoulements diphasiques en milieu poreux

Eric Flauraud¹

¹IFP Energies nouvelles



Outline

- 1 Introduction aux écoulements en milieu poreux
- 2 Le modèle diphasique
- 3 La résolution numérique

Introduction aux écoulements en milieu poreux

L'étude des écoulements en milieu poreux intervient dans des domaines variés :

- L'extraction du pétrole et du gaz contenus dans le sous-sol.
- Le stockage géologique du CO_2 .
- La géothermie.
- La dépollution des sols.
- ...

Introduction aux écoulements en milieu poreux

● Le milieu poreux

- Porosité $\phi[-]$: La porosité est la mesure en pourcentage volumique de la quantité de vide existant dans un volume de roche.

$$\phi = \frac{V_{pore}}{V_{total}}$$

- Perméabilité $\kappa[m^2]$: La perméabilité d'une roche est l'aptitude de cette roche à laisser circuler à travers ses pores un fluide dont elle est saturée. κ est représentée par un tenseur le plus souvent diagonal dans le repère local lié à la géométrie de la roche.

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{pmatrix}$$

milieu anisotrope : $\kappa_x \neq \kappa_y \neq \kappa_z$

milieu isotrope : $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z$

Introduction aux écoulements en milieu poreux

• Les fluides

- Dans le sous sol, le milieu poreux est occupé par des fluides qui peuvent être de l'eau et (ou) des hydrocarbures. On distingue trois phases : eau (w), huile (o) et gaz (g). Ces phases peuvent être miscibles ou immiscibles.
- Saturation $S_\alpha[-]$, $\alpha = w, o, g$: La saturation d'une phase est le rapport du volume de la phase sur le volume de pore :

$$S_w = \frac{V_w}{V_{pore}}, S_o = \frac{V_o}{V_{pore}}, S_g = \frac{V_g}{V_{pore}}$$

$$\text{avec } V_{pore} = V_w + V_o + V_g$$

$$\Rightarrow S_w + S_o + S_g = 1$$

• Propriétés physiques :

- les masses volumiques ρ_w , ρ_o et ρ_g
- les viscosités μ_w , μ_o et μ_g

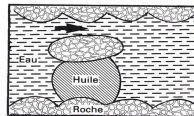
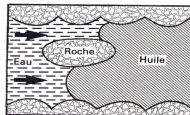
Introduction aux écoulements en milieu poreux

- Phénomènes capillaires
 - Pression capillaire : On appelle pression capillaire P_c la différence de pression existant entre deux points infiniment voisins et situés de part et d'autre de l'interface entre deux fluides. Pour un couple eau/huile, on note :

$$P_{c_{ow}}(S_w) = P_o - P_w$$

Introduction aux écoulements en milieu poreux

- Phénomènes capillaires
 - Saturation d'huile résiduelle (S_{or}) : Sous l'effet de la pression capillaire, des gouttes d'huile vont se trouver piégées dans le milieu poreux. On appelle l'ensemble des gouttes immobilisées "huile résiduelle" et la saturation en huile résiduelle correspondante est notée S_{or} . Les valeurs moyennes sont entre 20% et 40%. Ainsi, seulement une partie de l'huile (ou du gaz) sera déplacée.



Introduction aux écoulements en milieu poreux

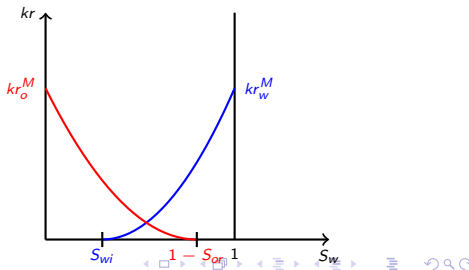
● Perméabilités relatives

- Définition : Si deux fluides s'écoulent simultanément, on constate une réduction de la perméabilité de chaque fluide. Les deux fluides se gênent. Cette gêne se modélise par les perméabilités relatives qui sont fonctions dépendantes de la saturation.
- Exemple pour un écoulement eau/huile ($S_o = 1 - S_w$) :

$$kr_w(S_w) = kr_w^M \left(\frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}} \right)^\alpha$$

$$kr_o(S_o) = kr_o^M \left(\frac{S_o - S_{or}}{1 - S_{or}} \right)^\beta$$

$$kr_w^M, kr_o^M, \alpha, \beta > 0$$



Introduction aux écoulements en milieu poreux

- Loi d'écoulement = loi de Darcy

$$\vec{U}_\alpha = \phi S_\alpha \vec{V}_\alpha = -\bar{K} \frac{kr_\alpha}{\mu_\alpha} \left(\vec{\nabla} P_\alpha - \rho_\alpha \vec{g} \right), \quad \alpha = w, o, g$$

où \vec{U}_α et \vec{V}_α sont respectivement la vitesse de Darcy et la vitesse moyenne de la phase α

- Conservation des masses

$$\frac{\partial \phi \rho_\alpha S_\alpha}{\partial t} + \text{div} \left(\phi \rho_\alpha S_\alpha \vec{V}_\alpha \right) = q_\alpha, \quad \alpha = w, o, g$$

En appliquant la loi de Darcy, on obtient :

$$\frac{\partial \phi \rho_\alpha S_\alpha}{\partial t} + \text{div} \left(\rho_\alpha \vec{U}_\alpha \right) = q_\alpha, \quad \alpha = w, o, g$$

où q_α est un terme source lié à l'injection et à la production de la phase α au niveau des puits.

Procédés de récupération des hydrocarbures

- **Récupération primaire (taux de récupération $\leq 25\%$)**
Récupération du pétrole par simple déplétion (chute de pression) à l'aide de puits producteurs.
- **Récupération secondaire (taux de récupération de 25% à 40%)**
Injection d'eau ou de gaz dans le réservoir afin de maintenir la pression.
- **Récupération assistée (taux de récupération de 30% à 70%)**
 - **Méthodes miscibles :**
Injection de gaz miscibles avec l'huile en place afin de réduire les forces capillaires.
 - **Méthodes chimiques :**
Ajout de produits chimiques (polymères, surfactants,...) dans l'eau d'injection afin d'améliorer l'efficacité de déplacement.
 - **Méthodes thermiques (huiles lourdes) :**
Injection de vapeur d'eau afin de diminuer la viscosité de

Etude d'un écoulement diphasique eau/huile incompressible

- Hypothèses simplificatrices :
 - écoulement incompressible : ρ_w et ρ_o sont constants,
 - pas de pression capillaire : $P_w = P_o = P$,
 - pas de termes de gravité : $\rho_w g = \rho_o g = 0$,
 - pas de termes sources : $q_w = q_o = 0$,
 - la porosité du milieu est supposée constante : $\phi(x, t) = \phi$,
 - le tenseur κ est supposé isotrope ($\kappa = \text{scalaire}$) et indépendant du temps : $\kappa(x, t) = \kappa(x)$.
- Notations :
 - Ω désigne le milieu poreux et $\partial\Omega$ sa frontière,
 - $(0, T)$, $T > 0$ désigne l'intervalle de temps
 - $P = P(x, t)$, $\forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$
 - $S_w = S_w(x, t)$, $S_o = S_o(x, t)$, $\forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$

Le modèle mathématique

- Conservations de la masse des phases eau (w) et huile (o)

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}_w) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

$$\phi \frac{\partial S_o}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}_o) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (2)$$

- Loi de Darcy

$$\vec{U}_w = -\kappa \frac{kr_w(S_w)}{\mu_w} (\vec{\nabla} P) \quad (3)$$

$$\vec{U}_o = -\kappa \frac{kr_o(S_o)}{\mu_o} (\vec{\nabla} P) \quad (4)$$

- Loi de fermeture : conservation des volumes

$$S_w + S_o = 1 \quad (5)$$

Le modèle mathématique

- Mise en forme du système en pression P et saturation $S = S_o$

$$\operatorname{div}(\vec{U}_T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (6)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{M_o(S)}{M_w(1-S) + M_o(S)} \vec{U}_T\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (7)$$

où \vec{U}_T est la vitesse totale définie par :

$$\vec{U}_T = \vec{U}_w + \vec{U}_o = -M_T(S) \kappa \vec{\nabla} P \quad (8)$$

et M_α est la mobilité de la phase α :

$$M_\alpha(S_\alpha) = \frac{Kr_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha}, \alpha = w, o \quad (9)$$

M_T est la mobilité totale : $M_T(S) = M_w(1-S) + M_o(S)$

Le modèle mathématique

- On peut encore formuler le système sous la forme suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{U}_T(P, S)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (10)$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(f_o(S) \vec{U}_T(P, S)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \quad (11)$$

- La fonction $f_o(S)$ est appelée le flux fractionnaire (fractional flow). C'est une fonction **croissante** définie par :

$$f_o(S) = \frac{M_o(S)}{M_w(1 - S) + M_o(S)} \quad (12)$$

- L'équation (10) peut être vue comme une **équation elliptique linéaire en P** pour S donnée et l'équation (11) comme une **équation hyperbolique non linéaire en S** pour \vec{U}_T donnée.

Le modèle mathématique

- Les conditions aux limites

$$P(x, t) = P_D(x) \quad (x, t) \in \delta\Omega_D \times (0, T)$$

$$\vec{U}_T \cdot \vec{n} = U_N(x) \quad (x, t) \in \delta\Omega_N \times (0, T)$$

$$S(x, t) = S_{in}(x) \quad (x, t) \in \delta\Omega_{in} \times (0, T)$$

$\delta\Omega_D$ (resp. $\delta\Omega_N$) désigne la partie de la frontière sur laquelle on impose une condition de Dirichlet en pression (resp. une condition de Neumann) et $\delta\Omega_{in}$ désigne la partie de la frontière par laquelle on injecte un ou plusieurs fluides.

- Les conditions initiales

$$P(x, t = 0) = P_0(x) \quad x \in \Omega$$

$$S(x, t = 0) = S_0(x) \quad x \in \Omega$$

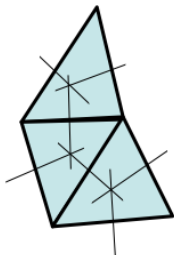
La résolution numérique

• Notations :

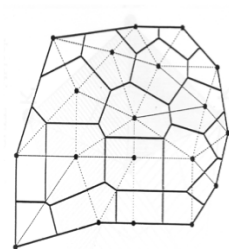
- On note \mathcal{M}_h un maillage admissible de Ω
- $\forall K \in \mathcal{M}_h$, \mathcal{E}_K désigne l'ensemble des arêtes de la maille K t.q.
 $\partial K = \cup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{\sigma}$
- \mathcal{E} désigne l'ensemble des arêtes de \mathcal{M}_h : $\mathcal{E} = \cup_{K \in \mathcal{M}_h} \mathcal{E}_K$
- On note $\mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \not\subset \partial\Omega\}$ et $\mathcal{E}_{bord} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \subset \partial\Omega\}$
- On note $\mathcal{E}_{bord}^D = \mathcal{E}_{bord} \cap \partial\Omega_D$ et $\mathcal{E}_{bord}^N = \mathcal{E}_{bord} \cap \partial\Omega_N$
- \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_L sont les centres des mailles K et L . Si $K \neq L$ et
 $\partial K \cap \partial L = K|L = \sigma \neq \emptyset$, alors $[\mathbf{x}_K \mathbf{x}_L] \perp \sigma$ (orthogonalité)
- $\forall \sigma \in \mathcal{E}$, alors il existe $\mathbf{x}_\sigma \in \sigma$ t.q. :
 - si $\sigma = \partial K \cap \partial L \in \mathcal{E}_{int}$, $\mathbf{x}_\sigma = [\mathbf{x}_K \mathbf{x}_L] \cap \sigma$
 - si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}$, $[\mathbf{x}_K \mathbf{x}_\sigma] \perp \sigma$ (orthogonalité)
- $\forall K \in \mathcal{M}_h$, $mes(K)$ = mesure de la maille K
- $\forall \sigma \in \mathcal{E}$, $mes(\sigma)$ = mesure de σ
- $d_{K\sigma}$ désigne la distance entre \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_σ
- $\vec{n}_{K,\sigma}$ est la normale à σ extérieur à K

La résolution numérique

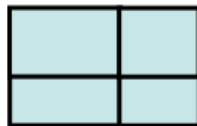
Exemples de maillages admissibles



triangles (angles $\leq \frac{\pi}{2}$)



maillage de voronoi



Maillage cartésien

La résolution numérique : Discrétisation en temps

- Discrétisation en temps : $[0, T] = \bigcup_{n=0, N-1} [t^n, t^{n+1}]$ avec $t^0 = 0$, $t^N = T$ et $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n > 0$.

$$\operatorname{div}(\vec{U}_T(P^{n+1}, S^\tau)) = 0 \quad (13)$$

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div}(f_o(S^\tau) \vec{U}_T(P^{n+1}, S^\tau)) = 0 \quad (14)$$

- $\tau = n + 1$: schéma totalement implicite (P^{n+1}, S^{n+1}) , inconditionnellement stable.
- $\tau = n$: schéma IMPES, Implicite en Pression et Explicite en Saturation (P^{n+1}, S^n) , conditionnellement stable (condition CFL). Le schéma IMPES permet de découpler la résolution de la pression et de la saturation.

La résolution numérique : Discrétisation en espace

- Discrétisation de l'équation en pression pour le schéma IMPES
 - Le principe des méthodes de volumes finis consiste à intégrer l'équation sur chaque maille K

$$\begin{aligned} \int_K \operatorname{div}(\vec{U}_T(P^{n+1}(\mathbf{x}), S^n(\mathbf{x}))) dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\partial K} \vec{U}_T(P^{n+1}(\mathbf{x}), S^n(\mathbf{x})) \cdot \vec{n}_{\partial K} d\sigma &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \left(-M_T(S^n(\mathbf{x})) \kappa(\mathbf{x}) \vec{\nabla} P^{n+1}(\mathbf{x}) \right) \cdot \vec{n}_{K,\sigma} d\sigma &= 0 \quad (15) \end{aligned}$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- L'approximation de équation (15) par un schéma volumes finis s'écrit

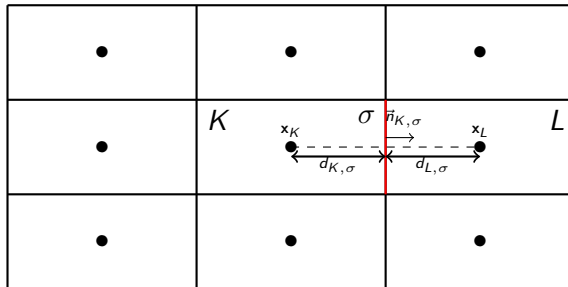
$$\sum_{\sigma \in \epsilon_K} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0 \quad (16)$$

où $F_{K,\sigma}^{n+1}$ est le flux numérique à travers l'arête σ et associé à la maille K . Ce flux numérique est une approximation du flux exact à travers σ :

$$F_{K,\sigma}^{n+1} \simeq \int_{\sigma} \left(-M_T(S^n(\mathbf{x})) \kappa(\mathbf{x}) \vec{\nabla} P^{n+1}(\mathbf{x}) \right) \cdot \vec{n}_{K,\sigma} d\sigma$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$ et $K|L$:



$$F_{K,\sigma}^{n+1} = M_{T,\sigma}^{int,n} T_{\sigma}^{int} (P_K^{n+1} - P_L^{n+1})$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$ et $\sigma = K|L$:
 - La mobilité totale est calculée en fonction du gradient de pression (décentrage amont) :

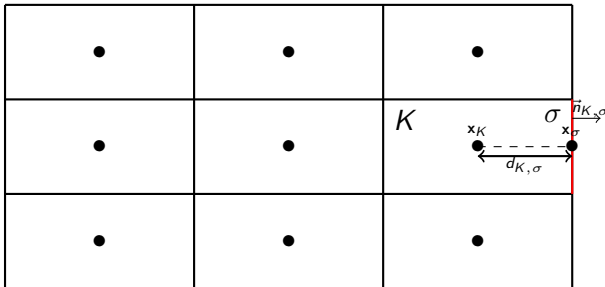
$$M_{T,\sigma}^{int,n} = \begin{cases} M_T(S_K^n) & \text{si } P_K^n \geq P_L^n \\ M_T(S_L^n) & \text{si } P_K^n < P_L^n \end{cases} \quad (17)$$

- La transmissivité est calculée par moyenne harmonique :

$$\frac{1}{T_\sigma^{int}} = \frac{d_{K\sigma}}{\text{mes}(\sigma)\kappa_K} + \frac{d_{L\sigma}}{\text{mes}(\sigma)\kappa_L}$$
$$T_\sigma^{int} = \text{mes}(\sigma) \frac{\kappa_K \kappa_L}{\kappa_L d_{K\sigma} + \kappa_K d_{L\sigma}} \quad (18)$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}^D$ et condition de Dirichlet $P_D(\mathbf{x})$:



$$F_{K,\sigma}^{n+1} = M_{T,\sigma}^{bord,n} T_{\sigma}^{bord} (P_K^{n+1} - P_{\sigma})$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K^D \cap \mathcal{E}_{bord}$ et condition de Dirichlet $P_D(\mathbf{x})$:
 - On définit P_σ et S_σ comme étant les valeurs de P_D et S_{in} au point \mathbf{x}_σ :

$$P_\sigma = P_D(\mathbf{x}_\sigma) \quad S_\sigma = S_{in}(\mathbf{x}_\sigma)$$

- La mobilité totale est calculée en fonction du gradient de pression (décentrage amont) :

$$M_{T,\sigma}^{bord,n} = \begin{cases} M_T(S_K^n) & si \quad P_K^n \geq P_\sigma \\ M_T(S_\sigma) & si \quad P_K^n < P_\sigma \end{cases} \quad (19)$$

- La transmissivité est donnée par :

$$T_\sigma^{bord} = mes(\sigma) \frac{\kappa_K}{d_{K\sigma}} \quad (20)$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}^N$ et condition de Neumann $U_N(\mathbf{x})$:
 - On écrit simplement

$$F_{K,\sigma}^{n+1} = \text{mes}(\sigma) U_{N,\sigma}$$

où $U_{N,\sigma} = U_N(\mathbf{x}_\sigma)$.

- Si $U_{N,\sigma} > 0$ le flux est sortant et si $U_{N,\sigma} < 0$ le flux est rentrant.
- Si $U_{N,\sigma} = 0$ la frontière est imperméable : rien ne rentre et rien ne sort à travers σ .

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

Schéma Volumes Finis pour la pression

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{M}_h \\ \text{avec} \\ F_{K,\sigma}^{n+1} = M_{T,\sigma}^{int,n} T_{\sigma}^{int} (P_K^{n+1} - P_L^{n+1}) \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int} \\ F_{K,\sigma}^{n+1} = M_{T,\sigma}^{bord,n} T_{\sigma}^{bord} (P_K^{n+1} - P_{\sigma}) \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}^D \\ F_{K,\sigma}^{n+1} = \text{mes}(\sigma) U_{N,\sigma} \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}^N \end{array} \right.$$

$M_{T,\sigma}^{int,n}$, T_{σ}^{int} , $M_{T,\sigma}^{bord,n}$ et T_{σ}^{bord} sont donnés par (17), (18), (19) et (20)

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en pression

- Propriétés du schéma aux Volumes Finis

Conservativité du flux

Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$ et $\sigma = K|L$:

$$F_{K\sigma}^{n+1} = -F_{L\sigma}^{n+1}$$

Consistance du flux

$$\frac{1}{mes(\sigma)} F_{K,\sigma}^{n+1} = \frac{1}{mes(\sigma)} \int_{\sigma} (\vec{U}_T(P^{n+1}, S^n)) \cdot \vec{n}_{K\sigma} d\sigma + O(h)$$

La résolution numérique : Système linéaire en pression

- En assemblant l'ensemble des équations discrètes, on obtient un système linéaire de taille N (N = nombre de mailles) :

$$AU = B$$

où :

- U est le vecteur de \mathbb{R}^N dont les composantes sont les valeurs de la pression P^{n+1} dans chaque maille $K \in \mathcal{M}_h$.
- $A \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ est une matrice symétrique définie positive (discrétisation d'un problème elliptique).
- $B \in \mathbb{R}^N$ est le second membre dont les coefficients dépendent des conditions aux limites.

La résolution numérique : Système linéaire en pression

- L'assemblage du système se fait en parcourant l'ensemble des arêtes σ du maillage :

$$\begin{aligned} \sigma = K|L \in \mathcal{E}_{int} : \quad & A(i_K, i_K) = A(i_K, i_K) + M_{T,\sigma}^{int,n} T_{\sigma}^{int} \\ & A(i_L, i_L) = A(i_L, i_L) + M_{T,\sigma}^{int,n} T_{\sigma}^{int} \\ & A(i_K, i_L) = A(i_K, i_L) - M_{T,\sigma}^{int,n} T_{\sigma}^{int} \\ & A(i_L, i_K) = A(i_L, i_K) - M_{T,\sigma}^{int,n} T_{\sigma}^{int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}^D : \quad & A(i_K, i_K) = A(i_K, i_K) + M_{T,\sigma}^{bord,n} T_{\sigma}^{bord} \\ & B(i_K) = B(i_K) + M_{T,\sigma}^{bord,n} T_{\sigma}^{bord} P_{\sigma} \end{aligned}$$

$$\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}^N : \quad B(i_K) = B(i_K) - \text{mes}(\sigma) U_{N,\sigma}$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en saturation

- Discrétisation de l'équation en saturation pour le schéma IMPES

$$\int_K \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t^n} + \operatorname{div} \left(f_o(S^n) \vec{U}_T(P^{n+1}, S^n) \right) \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_K \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t^n} \right) dx + \int_{\partial K} f_o(S^n) (\vec{U}_T(P^{n+1}, S^n)) \cdot \vec{n}_K d\sigma = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_K \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t^n} \right) dx + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} f_o(S^n) (\vec{U}_T(P^{n+1}, S^n)) \cdot \vec{n}_{K\sigma} d\sigma = 0$$

(21)

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en saturation

- L'approximation de équation (21) par un schéma volumes finis s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{mes}(K)\phi \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{in}} F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_L^n) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

- Le terme d'accumulation vérifie :

$$\text{mes}(K)\phi \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t^n} \simeq \int_K \left(\phi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t^n} \right) dx$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en saturation

- Le flux numérique $F_{o,K,\sigma} \simeq \int_{\sigma} f_o(S^n)(\vec{U}_T(P^{n+1}, S^n)).\vec{n}_{K\sigma} d\sigma$ est calculé par un décentrage amont en fonction du signe du flux total :

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{in}$ et $\sigma = K|L$

$$F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_L^n) = f_o(S_K^n) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ + f_o(S_L^n) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^-$$

- Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}$

$$F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_{\sigma}) = f_o(S_K^n) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ + f_o(S_{\sigma}) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^-$$

$$\text{où } [F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ = \max(F_{K,\sigma}^{n+1}, 0) \text{ et } [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- = \min(F_{K,\sigma}^{n+1}, 0).$$

La résolution numérique : Discrétisation de l'équation en saturation

- Le flux numérique vérifie les propriétés suivantes :

Conservativité du flux à travers les arêtes

Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}$ et $\sigma = K|L$:

$$F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_L^n) = -F_{o,L,\sigma}(S_L^n, S_K^n)$$

Consistance du flux

$$F_{o,K,\sigma}(S^n, S^n) = \int_{\sigma} f_o(S^n) \vec{U}_T \cdot \vec{n}_{K\sigma} d\sigma + O(|\sigma|h)$$

La résolution numérique : Calcul des saturations

- Les saturations sont calculées de façon explicite dans chaque maille et ne nécessitent pas l'inversion d'un système :

$$S_K^{n+1} = S_K^n - \frac{\Delta t^n}{|K|\phi} \left(\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_L^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} F_{o,K,\sigma}(S_K^n, S_\sigma) \right)$$

La résolution numérique : Calcul de la condition CFL

- L'équation en saturation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \text{mes}(K)\phi \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t^n} &+ \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{in}} f_o(S_K^n) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ + f_o(S_L^n) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \\
 &+ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} f_o(S_K^n) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ + f_o(S_\sigma) [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- = 0
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

- L'équation en pression (16) peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{in}} \left([F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ + [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} \left([F_{K,\sigma}^{n+1}]^+ + [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \right) = 0
 \tag{24}$$

La résolution numérique : Calcul de la condition CFL

- En procédant à (23) - (24) $\times f_o(S_K^n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{mes}(K)\phi \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t^n} &+ \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{in}} (f_o(S_K^n) - f_o(S_L^n)) \left[F_{K,\sigma}^{n+1} \right]^- \\ &+ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} (f_o(S_K^n) - f_o(S_\sigma)) \left[F_{K,\sigma}^{n+1} \right]^- = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

- On pose

$$\delta(S_a, S_b) = \begin{cases} \frac{f_o(S_a) - f_o(S_b)}{S_a - S_b} & \text{si } S_a \neq S_b \\ f_o'(S_a) & \text{si } S_a = S_b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_{KL} &= \delta(S_K^n, S_L^n) \\ \delta_{K\sigma} &= \delta(S_K^n, S_\sigma) \end{cases}$$

La résolution numérique : Calcul de la condition CFL

- L'équation (25) devient :

$$\begin{aligned} \text{mes}(K)\phi \frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{in}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{KL} (S_K^n - S_L^n) \\ + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{K\sigma} (S_K^n - S_\sigma) = 0 \end{aligned}$$

- On en déduit l'expression de S_K^{n+1} sous la forme :

$$\begin{aligned} S_K^{n+1} = & \left[1 + \frac{\Delta t^n}{\text{mes}(K)\phi} \left(\sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{KL} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{K\sigma} \right) \right] S_K^n \\ & - \left(\frac{\Delta t^n}{\text{mes}(K)\phi} \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{KL} S_L^n \right) - \left(\frac{\Delta t^n}{\text{mes}(K)\phi} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{K\sigma} S_\sigma \right) \end{aligned}$$

La résolution numérique : Calcul de la condition CFL

Principe du maximum discret

Si $0 \leq S_K^n \leq 1, \forall K \in \mathcal{M}_h$ et $0 \leq S_\sigma \leq 1, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{bord}$, alors $0 \leq S_K^{n+1} \leq 1, \forall K \in \mathcal{M}_h$ si S_K^{n+1} est une combinaison convexe de $S_K^n, (S_L^n)_{L \in \mathcal{M}_h / \partial L \cap \partial K \neq \emptyset}$ et $(S_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}}$, autrement dit si la condition suivante est satisfaite (condition CFL) :

$$\Delta t^n \max_{K \in \mathcal{M}_h} \left(\frac{1}{mes(K)\phi} \left(- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{K\sigma} \right) \right) \leq 1. \quad (26)$$

où on a posé :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{K\sigma} = \sum_{\sigma=K|L \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{int}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{KL} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{bord}} [F_{K,\sigma}^{n+1}]^- \delta_{K\sigma}$$

La résolution numérique : Calcul de la condition CFL

- La fonction $f_o(S)$ étant une fonction croissante sur $[0, 1]$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis, on en déduit :

$$0 \leq \delta_{KL}, \delta_{K\sigma} \leq \sup_{0 \leq S \leq 1} f'_o(S)$$

- En pratique, on remplace la condition (26) par l'expression suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\phi \inf_{K \in \mathcal{M}_h} \text{mes}(K)}{\sup_{K \in \mathcal{M}_h} \left(- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (F_{K,\sigma}^{n+1})^- \right) \sup_{0 \leq S \leq 1} f'_o(S)} \quad (27)$$