EDPS avancées et volumes finis

Sup' Galilée, MACS 3, le 28 Janvier 2020

N.B. : Les notes de cours et de TDs sont autorisées. La plus grande attention sera portée à la rigueur des raisonnements.

Exercice 1 :

On considère l'équation de convection-diffusion suivante ($\nu > 0$ est le coefficient de diffusion et $a > 0$ la vitesse de convection) ; les coefficients sont constants ; on ne discutera pas les questions liées aux conditions aux limites et on se placera donc sur $\mathbb{R}$ entier.

$$-\nu u'' + au' = 0 \tag{1}$$

Question 1 (1,5 pts) : Quelle est la solution générale de cette équation ? Montrer qu'elle est monotone.

On découpe $\mathbb{R}$ en intervalles réguliers $T_i = [x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}]$ de longueur h et on associe à chaque T_i un point x_i en son milieu et une inconnue u_i.

Pour approcher la solution de l'équation (1), on propose le schéma volumes finis suivant :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = 0 \tag{2}$$

avec l'expression suivante

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\nu \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + au_{i+\frac{1}{2}}\,, \forall i\,,$$

où l'on va préciser par la suite comment est défini le terme $u_{i+\frac{1}{2}}$.

Question 2 (1,5 pts) : Expliquer comment est obtenue (2) à partir de (1) à l'aide de la méthode des volumes finis.

On considère à présent deux choix possibles pour $u_{i+\frac{1}{2}}$ (pour tout $i \in \mathbb{Z}$) :
a) $u_{i+\frac{1}{2}} = u_i$ (approximation décentrée vers l'amont du terme de convection)
b) $u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$ (approximation centrée du terme de convection).

Question 3 (1 pt) : Quel est a priori l'avantage, en terme de précision, du choix b) par rapport au choix a) ? Vous pourrez vous aider de développements limités autour du point $x_{i+1/2}$ pour justifier votre réponse.

On rappelle pour la suite des questions que la solution générale d'une récurrence à trois termes du type $u_{i+1} + au_i + bu_{i-1} = 0$ est une combinaison linéaire de deux suites géométriques dont les raisons sont les solutions (lorsqu'elles sont distinctes l'une de l'autre) de l'équation caractéristique associée $r^2 + ar + b = 0$.

Question 4 (1,5 pts) : Dans le cas a), quelle est la solution générale de l'équation (2) ? Discuter sa monotonie.

Question 5 (3 pts) : Dans le cas b), quelle est la solution générale de l'équation (2) ? Donner une condition liant a, ν et h qui assure sa monotonie. Que se passe-t-il lorsque ce critère n'est pas vérifié ? Quel est l'inconvénient de ce schéma pour les systèmes dominés par la convection (rapport $\frac{a}{\nu}$ "grand") ?

Question 6 (1,5 pts) : Pour remédier à ce problème, on utilise parfois dans le cas b) une méthode appelée "viscosité artificielle" en remplaçant ν par $\nu' > \nu$ dans le schéma numérique. Comment doit on choisir ν' en fonction de a, ν et h pour obtenir les mêmes résultats que dans le cas a) ?

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}$, pour $f(u) = \frac{u^2}{2}$ on considère l'équation d'inconnue u :

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, \tag{3}$$

munie de la condition initiale

$$u(x, t = 0) = u_0(x). \tag{4}$$

Il s'agit de déterminer la solution faible entropique de cette équation dans les deux cas proposés aux Questions 1 et 2.

Question 1 (6 pts) : On considère la donnée suivante :

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{si} & x < 0 \\ x - 2 & \text{si} & 0 \leq x \end{array} \right. .$$

a) Déterminer les équations des droites caractéristiques et les tracer dans le demi-plan (x,t) (pour $t \geq 0$).
b) Montrer que pour $t \geq 0$, le demi-plan (x,t) (pour $t \geq 0$) comporte deux parties séparées par une ligne de choc d'équation $\sigma(t) = 3 + t - 3\sqrt{1+t}$ à gauche de laquelle la solution est $u(x,t) = 1$ et à droite de laquelle la solution est $u(x,t) = \frac{x-2}{1+t}$.
c) À quel instant t_1 la vitesse du choc est elle nulle ?
d) À quel instant t_2 le choc repasse-t-il par sa position initiale ?
e) Montrer que la vitesse du choc tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.
f) Tracer la solution en $t = t_1$, $t = t_2$ et en $t = 8$.

Les caractéristiques ont pour équation

$$x(t) = \xi + a(u_0(\xi))t$$

soit, pour Burgers et en prenant en compte l'expression de $u_0(\xi)$ en fonction de ξ

$$\left\{ \begin{array}{lll} x(t) = \xi + t & \text{si} & \xi < 0 \\ x(t) = \xi + (\xi - 2)t & \text{si} & 0 \leq \xi \end{array} \right. .$$

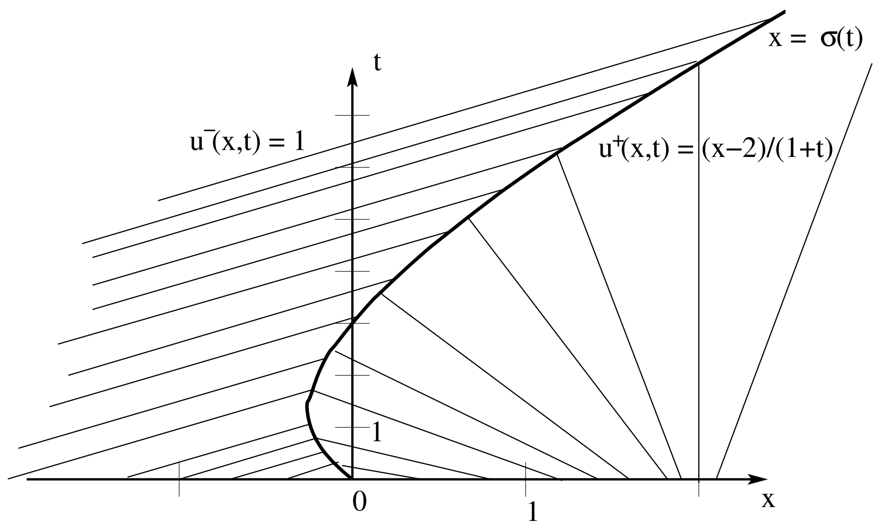

FIGURE 1 – Caractéristiques et ligne de choc pour la Question 1.

En traçant ces caractéristiques (voir figure 1), on s'aperçoit qu'elles se coupent ; il y a donc un choc, ce qui est confirmé par le fait qu'il y a une discontinuité à $t = 0$ en $x = 0$ au travers de laquelle u_0 est décroissante.

Pour trouver l'équation $x = \sigma(t)$ de cette ligne de choc, on applique la relation de Rankine-Hugoniot

$$\sigma'(t) = \frac{u^- + u^+}{2}.$$

Il faut déterminer ce que vaut la vitesse immédiatement à gauche du choc et immédiatement à droite ; c'est-à-dire $u^-(\sigma(t), t)$ et $u^+(\sigma(t), t)$. Déterminons u^- et u^+ :

• à gauche de la discontinuité, un point (x, t) quelconque se trouve sur une caractéristique de pied $\xi \leq 0$ et donc $u(x, t) = u_0(\xi) = 1$

• à droite de la discontinuité, un point (x, t) quelconque se trouve sur une caractéristique de pied $\xi = \frac{x+2t}{1+t}$ et on aura alors $u(x, t) = \xi - 2 = \frac{x+2t}{1+t} - 2 = \frac{x-2}{1+t}$.

Et donc $u^+(\sigma(t), t)) = \frac{\sigma(t)-2}{1+t}$. L'équation de la ligne de choc est donc

$$\sigma'(t) = \frac{1 + \frac{\sigma(t)-2}{1+t}}{2} = \frac{\sigma(t) + t - 1}{2(1+t)}, \text{ avec } \sigma(0) = 0.$$

On vérifie alors que la formule proposée est solution de cette équation ; en effet pour $\sigma(t) = 3 + t - 3\sqrt{1+t}$, on a bien $\sigma(0) = 0$ et

$$\sigma'(t) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{1+t}}$$

tandis que
$$\frac{\sigma(t)+t-1}{2(1+t)} = \frac{2+2t-3\sqrt{1+t}}{2(1+t)} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{1+t}}.$$
La vitesse du choc est nulle lorsque $\sigma'(t) = 0$, soit
$$1 - \frac{3}{2\sqrt{1+t_1}} = 0 \implies \sqrt{1+t_1} = \frac{3}{2} \implies t_1 = \frac{5}{4}.$$
La position initiale du choc est $x = 0$, on résout donc $\sigma(t_2) = 0$ soit $t_2 = 3$.

Par ailleurs la vitesse du choc est
$$\sigma'(t) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{1+t}}$$
qui tend bien vers 1 lorsque t tend vers l'infini.

En $t = t_1 = \frac{5}{4}$ la solution est
$$u(x,t_1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \sigma(\frac{5}{4}) = -\frac{1}{4} \\ \frac{x-2}{1+t_1} = \frac{4}{9}(x-2) & \text{si} \quad -\frac{1}{4} \le x \end{cases}.$$
En $t = t_2 = 3$ la solution est
$$u(x,t_2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \sigma(3) = 0 \\ \frac{x-2}{1+t_2} = \frac{1}{4}(x-2) & \text{si} \quad 0 \le x \end{cases}.$$
En $t = 8$ la solution est
$$u(x,t=8) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < \sigma(8) = 2 \\ \frac{x-2}{1+8} = \frac{1}{9}(x-2) & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}.$$

Question 2 (4 pts) : On considère la donnée suivante :
$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}.$$
a) Montrer que jusqu'à un temps critique t^* que l'on calculera, la partie du plan (x,t) correspondant à $t^* > t > 0$) comporte quatre parties dans lesquelles on précisera ce que vaut la solution.
b) Tracer la solution au temps $t = t^*$.
c) Décrire qualitativement l'évolution de la solution pour $t > t^*$.

La solution initiale est discontinue croissante en $x = 0$, il y a donc une détente issue de ce point. Par ailleurs, la solution initiale est discontinue décroissante en $x = 1$, il y a donc un choc issu de ce point.

Calculons les équations des caractéristiques $x(t) = \xi + u_0(\xi)t$
$$\begin{cases} x = \xi & \text{si} \quad \xi < 0 \\ x = \xi + t & \text{si} \quad 0 \le \xi < 1 \\ x = \xi & \text{si} \quad 1 \le \xi \end{cases}$$

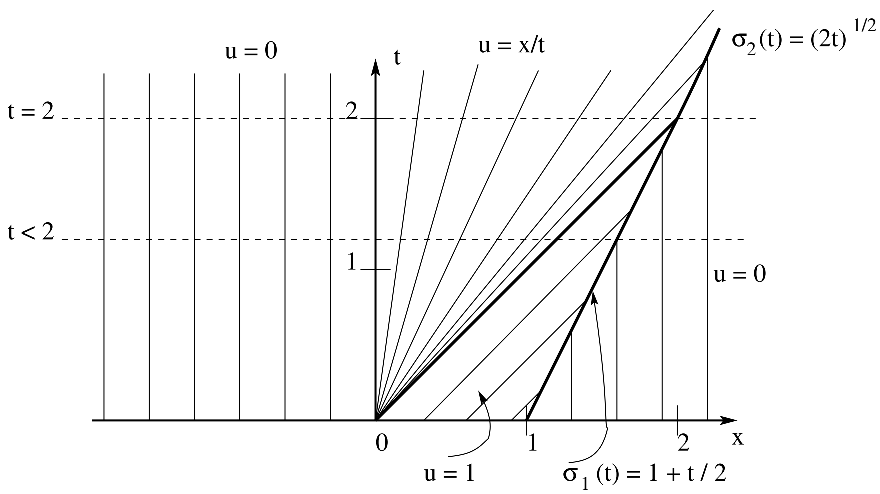

FIGURE 2 – Caractéristiques, détente et lignes de choc pour la Question 2.

auxquelles on peut ajouter les droites

$$x = ct \text{ avec } 0 \leq c \leq 1$$

qui sont les caractéristiques liées à la détente. Dans cette zone du plan, la solution vaut $u(x,t) = \frac{x}{t}$.

Le choc a pour équation $x = \sigma_1(t)$ avec, initialement $\sigma_1'(t) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$. Comme le choc est issu du point $(x = 1, t = 0)$, son équation est $\sigma_1(t) = 1 + \frac{t}{2}$.

On distingue donc effectivement quatre zones dans le plan (x,t) sur la figure 2 lorsque l'on trace les caractéristiques, ainsi que la ligne de choc, tant que la droite d'équation $x = t$ et la ligne de choc n'ont pas interagi, c'est-à-dire tant que $t < t^* = 2$. La solution vaut alors (voir courbe bleue sur la figure 3)

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq t \\ 1 & \text{si} \quad t \leq x < 1 + \frac{t}{2} \\ 0 & \text{si} \quad 1 + \frac{t}{2} \leq x \end{cases} .$$

En $t = t^* = 2$, il reste uniquement trois zones (voir courbe rouge sur la figure 3)

$$u(x, t = 2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases} .$$

Au-delà de t^*, il va rester trois zones ; une zone dans laquelle $u = 0$, une zone dans laquelle $u(x,t) = \frac{x}{t}$, et un troisième zone dans laquelle $u = 0$. La limite entre les deux premières zones est en $x = 0$, donc il y a une transition continue des valeurs de la solution entre ces deux zones. En revanche, il y a une

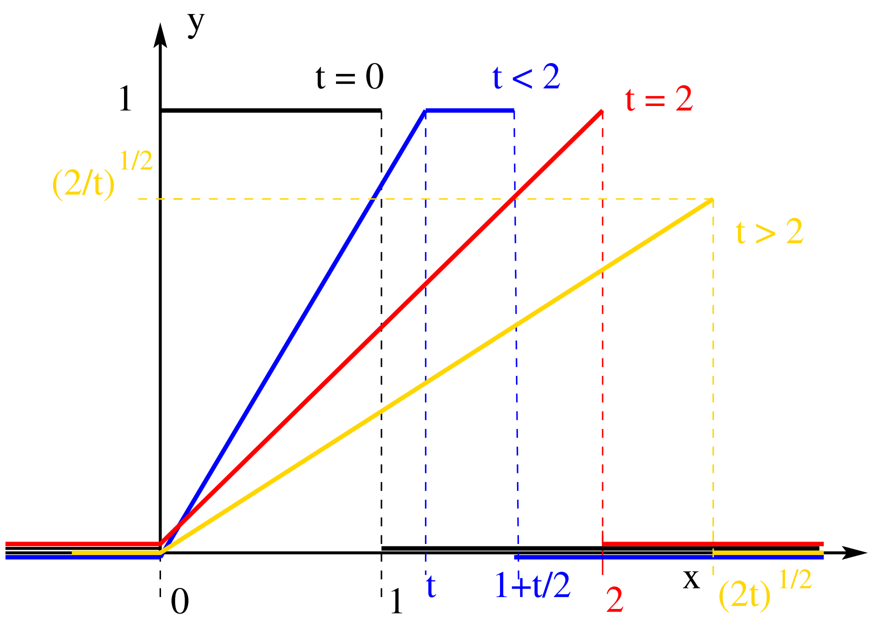

FIGURE 3 – Solution pour la Question 2 en différents instants $t = 0$ (en noir), $0 < t = \frac{6}{5} < 2$ (en bleu), $t = 2$ (en rouge), $t = \frac{25}{8} > 2$ (en jaune).

discontinuité décroissante entre la deuxième et la troisième zone, on aura donc un choc $x = \sigma_2(t)$, dont on peut trouver l'équation

$$\sigma_2'(t) = \frac{1}{2}[(u^-(\sigma_2(t), t)) + (u^+(\sigma_2(t), t))]$$

Or, $(u^-(\sigma_2(t), t)) = \frac{\sigma_2(t)}{t}$ et $(u^+(\sigma_2(t), t)) = 0$. Donc

$$\sigma_2'(t) = \frac{\sigma_2(t)}{2t}$$

Soit, sachant que $\sigma_2(t = 2) = 2$:

$$\sigma_2(t) = \sqrt{2t}.$$

La solution vaut alors (voir courbe jaune sur la figure 3)

$$u(x, t > 2) = \left\{ \begin{array}{ccr} 0 & \text{si} & x < 0 \\ \frac{x}{t} & \text{si} & 0 \leq x < \sigma_2(t) = \sqrt{2t} \\ 0 & \text{si} & \sqrt{2t} \leq x \end{array} \right. .$$