MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 5 - Année 2022-2023

1 Estimateur du maximum de vraisemblance

On suppose disposer de N réalisations iid de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, que l'on nomme $X_1, \ldots, X_N$.

1. Calculer la vraisemblance de $X_1, \ldots, X_N$ sachant μ et σ, que l'on note $\pi[\mathbb{X}|\mu, \sigma]$.

2. Montrer que :

$$\log(\pi[\mathbb{X}|\mu, \sigma]) \propto -L(\mu, \sigma) = -N \log(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{N} (X_n - \mu)^2.$$

3. En déduire les estimateurs du maximum de vraisemblance de μ et σ.

4. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ est biaisé.

2 Principe du maximum d'entropie

On rappelle que l'entropie statistique $S(X)$ d'une variable aléatoire X de densité f_X définie sur $K \subset \mathbb{R}$ s'écrit :

$$S(X) = -\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \log(f_X)(x) dx.$$

On admet que la loi maximisant l'entropie sous les contraintes $\int_{\mathbb{R}} g_m(x) f_X(x) dx = h_m,\ 1 \leq m \leq M$ s'écrit sous la forme :

$$f_X(x) = \exp\left(-\lambda_0 + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m g_m(x)\right).$$

1. On suppose que l'on connaît uniquement la moyenne μ et la variance σ^2 de X. Montrer comment cela se traduit en terme de notations g_m, f_m.

2. En déduire que f_X peut s'écrire sous la forme :

$$f_X(x) = \exp\left(-\widehat{\lambda}_0 - \widehat{\lambda}_1 x - \widehat{\lambda}_2 x^2\right).$$

3. En déduire cette fois :

$$f_X(x) = c_0 \exp\left(-\frac{(x - c_1)^2}{2c_2}\right),$$

où c_0, c_1 et c_2 doivent être exprimées en fonction de $\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$.

4. En déduire l'expression de f_X.

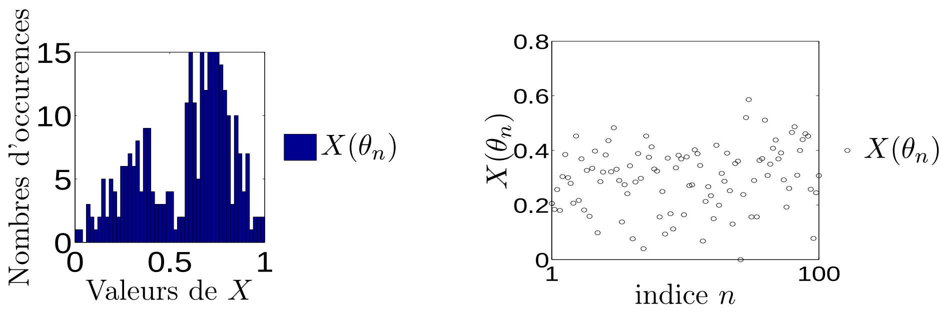

FIGURE 1 – Information disponible pour la caractérisation de a loi de X.

3 Identification d'une loi bimodale

On dispose de $N = 100$ réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X, nommées $\{X(\theta_n),\ 1 \le n \le N\}$, représentées sur la figure 1. A partir de l'histogramme fourni, il semble naturel de décrire la PDF f_X de X sous forme hiérarchique : (1) une loi (marginale) pour L et (2) une loi (conditionnelle) pour X, dépendant de la valeur de L. Plus précisément :

— L suit une loi de Bernoulli :

$$\mathbb{P}(L = \ell) = \begin{cases} p \text{ si } \ell = 1, \\ 1 - p \text{ si } \ell = 2, \end{cases}$$

— $X|L$ suit une loi gaussienne dont les paramètres dépendent de la valeur de L :

$$\begin{cases} f_{X|L}(x|L=1) = \dfrac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\gamma_1 (x - \mu_1)^2 /2\right) = \mathcal{N}(x\ ;\ \mu_1, \gamma_1), \\ f_{X|L}(x|L=2) = \dfrac{\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\gamma_2 (x - \mu_2)^2 /2\right) = \mathcal{N}(x\ ;\ \mu_2, \gamma_2), \end{cases}$$

On nomme alors $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \gamma_1, \mu_2, \gamma_2, p)$ le vecteur regroupant les paramètres à déterminer pour caractériser f_X. On note alors $f_{X|\boldsymbol{\theta}}$ l'approximation paramétrique de f_X.

1. Calculer la PDF $f_{X|\boldsymbol{\theta}}$ de $X|\boldsymbol{\theta}$ en fonction de $(\mu_1, \gamma_1, \mu_2, \gamma_2, p)$.

2. En supposant que μ_1, μ_2, p soient connues et que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, quelle condition doit vérifier γ pour que l'on puisse distinguer les deux modes de $f_{X|\boldsymbol{\theta}}$?

3. Calculer la vraisemblance $\pi[\mathbb{X}|\boldsymbol{\theta}]$ de $\boldsymbol{\theta}$ sachant les observations $\mathbb{X} = \{X(\theta_1), \ldots, X(\theta_N)\}$.

4. On suppose que le vecteur des paramètres est également aléatoire, de distribution *a priori* $\pi_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = \pi_{M_1}(\mu_1)\pi_{G_1}(\gamma_1)\pi_{M_2}(\mu_2)\pi_{G_2}(\gamma_2)\pi_P(p)$, où :

— π_{M_1} et π_{M_2} sont des gaussiennes de moyennes μ_0 et de variance $1/\gamma_0$,

$$\pi_{M_i}(\mu_i) \propto \exp(-\gamma_0(\mu_i - \mu_0)^2/2), \quad i \in \{1, 2\}\,.$$

— π_{G_1} et π_{G_2} sont des lois gamma de paramètres α_0 et β_0,

$$\pi_{G_i}(\gamma_i) \propto \gamma_i^{\alpha_0 - 1} \exp(-\beta_0\gamma_i) 1_{\mathbb{R}^+}(\gamma_i), \quad i \in \{1, 2\}\,.$$

En déduire la distribution a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$, $\pi[\boldsymbol{\theta}|\mathbb{X}]$, à une constante près.

5. Dans le cas où $p = 1$, montrer que $\pi[\boldsymbol{\theta}|\mathbb{X}]$ est proportionnelle à :

$$\gamma_1^{N/2+\alpha_0-1} 1_{\mathbb{R}^+}(\gamma_1) \exp\left\{-\gamma_0(\mu_1-\mu_0)^2/2 - \beta_0\gamma_1 - \gamma_1\left(\sum_{n=1}^{N}(X(\theta_n)-\widehat{\mu})^2 + N(\widehat{\mu}-\mu_1)^2\right)/2\right\},$$

où $\widehat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X(\theta_n)$.

6. En déduire que les lois a posteriori conditionnelles de $\mu_1|\gamma_1$ et de $\gamma_1|\mu_1$ restent des lois gaussienne et gamma respectivement, de paramètres à définir.

7. En déduire que quand $N \to +\infty$, les lois conditionnées de μ_1 et γ_1 sont de plus en plus piquées autour de $\widehat{\mu}$ et $1/\widehat{\gamma} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X(\theta_n)-\widehat{\mu})^2$.