MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 1 - Année 2022-2023

1 Test statistique pour la détection d'une maladie bovine

— un laboratoire propose un test de dépistage de la maladie de la vache folle.
— La notice précise la qualité du test : si le test est appliqué sur une vache malade, le test est positif dans 99.8% des cas. Si le test est appliqué sur une vache saine, le test est négatif dans 99.6% des cas.
— On sait d'autre part qu'il y a une vache malade sur 100 000.

Peut-on avoir confiance dans ce test ? Pour cela, on cherche la réponse à la question : si le test est positif, quelle est la probabilité que la vache soit malade ?

2 Quantification robuste des incertitudes

1. On dispose d'une règle équilibrée de longueur 2L, centrée en $x = 0$, ainsi que d'un kilogramme de sable. Comment disposer le sable sur la règle afin d'avoir le maximum de sable sur son bord droit, à une distance supérieure à t de son centre ?
2. Soit X une v.a. positive ($X \geq 0$) et de PDF p_X. La seule information sur cette PDF est la fait que la moyenne de X soit égale à m. Calculer alors :

$$\max_{p_X,\ \mathbb{E}[X]=m} \mathbb{P}(X \geq t).$$

On distinguera les cas $t \leq m$ et $t \geq m$.

3 Positionnement par mesures sonores

En mars 1918, Paris est frappée par des projectiles qui semblent venir de nulle part. Le canon responsable de cette attaque est un des plus puissants et des plus mystérieux canons de l'époque, capable d'attendre des cibles à plus de 100km. Après la surprise, on s'organise pour mettre en place des méthodes de localisation de ce canon. Et pour de telles distances, c'est par le son qu'il est le plus sÃ»r et le plus efficace de repérer ce canon.

On assimile le monde au plan $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$, tel que tout point $\boldsymbol{p}$ du plan s'écrit $= p_x\boldsymbol{e}_x + p_y\boldsymbol{e}_y$, ou plus simplement $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y)$. On note alors :
— $\boldsymbol{s} = (s_x, s_y)$ la position **inconnue** du canon,
— $\tau > 0$ l'instant auquel le canon tire son projectile
— $\{\boldsymbol{z}_n = (z_x, z_y),\ 1 \leq n \leq N\}$ les positions de N observateurs, dont la mission est de localiser le canon,
— v la vitesse du son.

Les observateurs sont positionnés sur un cercle de rayon $R = 1000m$, centré en $\boldsymbol{O} = (0,0)$. Chaque observateur lance son chronomètre à $t = 0$, et on note t_n le temps auquel l'observateur $\boldsymbol{z}_n$ arrête son chronomètre car il a entendu le coup de canon.

1. Justifier le fait que la position du canon et le temps τ soient solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{s}\|^2 = (v(t_1 - \tau))^2, \\ \vdots \\ \|\boldsymbol{z}_N - \boldsymbol{s}\|^2 = (v(t_N - \tau))^2. \end{cases} \tag{1}$$

2. En déduire que le vecteur $\boldsymbol{u} = (s_x, s_y, \tau)$ est solution du système linéaire suivant :

$$[m]\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}. \tag{2}$$

Déterminer la matrice $[m]$ et le vecteur $\boldsymbol{f}$.

3. Sans incertitudes sur les données du problème, indiquer le nombre minimal d'observateurs pour que le système défini par l'Eq. (**??**) admette une unique solution (on pourra effectuer un dessin pour justifier ce nombre).

4*. Lister les potentielles sources d'incertitudes pouvant affecter cette localisation, en les classant, selon vous et en expliquant pourquoi, des plus influentes aux moins influentes. Décrire ensuite succintement comment en déduire la position moyenne du canon.