MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 2 - Année 2022-2023

1 Mise à la puissance et distribution associée

Soit X une variable uniformément distribuée sur $[0,1]$. Calculer et représenter sur un même graphique les PDF de X^k pour $k = 1, 2, 3, 4$.

2 Jeu statistique

On considère l'expérience aléatoire suivante :

— On tire une valeur, $X(\theta)$, d'une variable aléatoire X uniformément distribuée sur $[0,1]$.

— On écrit alors cette valeur sur le verso, et son carré, $X(\theta)^2$, sur le recto d'une même feuille.

— Seule une des faces (choisie de manière purement aléatoire) de cette feuille est ensuite rendue visible. On nomme alors Y cette valeur visible.

Deux choix sont alors proposés : soit accepter le montant observé, soit préférer le montant inscrit de l'autre côté de la feuille. Comment définir une stratégie pour maximiser son gain ? En particulier, que faire face aux valeurs $\{0.1 \ ; \ 0.24 \ ; \ 0.29 \ ; \ 0.35 \ ; \ 0.5 \ ; \ 0.75\}$?

3 Loi d'un échantillon trié

Soit X une variable aléatoire de PDF f_X et de CDF F_X. Soient $X_1, \ldots, X_N$ N copies indépendantes et de mêmes lois que X. On note alors $Y_1, \ldots, Y_N$ les variables aléatoires associées au réarrangement par ordre croissant de $X_1, \ldots, X_N$:

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_N.$$

1. Calculer la loi de $Y_1 = \min_{1 \leq n \leq N} Y_n$ en fonction de f_X et F_X.

2. Calculer de même les lois de $Y_2, \ldots, Y_N$.

3. Calculer ces lois lorsque X est la loi uniforme.

4 Analyse du processus sinus

On définit ϕ une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$, et $\{X(t), \ t \in \mathbb{R}\}$ le processus aléatoire associé, tel que pour tout t :

$$X(t) = \sin(\omega t + \phi).$$

1. Calculer la moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ de ce processus.

2. Calculer la fonction d'autocorrélation, $R(t,t') = \mathbb{E}\left[X(t)X(t')\right]$ de ce processus.

3. Que peut-on dire sur la stationnarité de X ?

4. Pour t fixé, calculer la distribution de $X(t)$. (Pour cela, on passera par la fonction de répartition $F_{X(t)}(x) = \mathbb{P}(X(t) \leq x)$).

5. Que peut-on dire sur le caractère gaussien de ce processus X ?