DM 3. Location de voitures entre particuliers

On cherche à proposer un service aux propriétaires intéressés pour louer leur voiture à des particuliers, qui leur permette de maximiser leur gain moyen. On note p le prix de location et **x** le vecteur des caractéristiques du véhicule (gamme, marque, ancienneté, note moyenne attribuée par les précédents loueurs...), si bien que la probabilité qu'un client intéressé loue une voiture de caractéristique **x** au prix p s'écrit :

$$f \circ h(\beta, \mathbf{x}, p), \quad h(\beta, \mathbf{x}, p) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 p \quad f(u) = \frac{1}{1+exp(-u)}$$

avec $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ un un vecteur de paramètres inconnus.

Question 1 – .

Tout d'abord, remarquons que si β_2 était strictement positif, alors on pourrait pour n'importe quel vecteur x, augmenter le prix à l'infinie pour avoir une probabilité 1 d'avoir un client intéressé qui achète la voiture. De même, avec β_2=0 l'augmentation du prix n'a aucun impact sur la décision des clients intéressés (ce n'est pas représentatif de la réalité). Donc dans cette modélisation, $\boxed{\text{on a } \beta_2 < 0}$.
Pour ce qui est du choix de la modélisation, on remarque qu'on a un rapport linéaire entre les variables de "qualités" et la variable de prix, ce qui traduit un comportement rationnel d'un point de vue de l'acheteur quand il regardera le prix. Malheureusement ce modèle ne prendra pas bien en compte les acheteurs avares, ou ceux qui ne regarderons pas le prix (le modèle se concentre sur une population normale). Si on veut cibler l'une des deux clientèle non considérer avec ce modèle, on peut rajouter un exponentiel qui viendrait mettre du poids exponentiellement croissant sur la variable prix (ce qui me semble plus propice à la mentalité humaine vis à vis du prix).

Question 2 – .

Soit $\beta \in \mathbb{R}^{n+2}$, où n est la longueur du vecteur **x**.
La probabilité qu'un client intéressé loue une voiture de caractéristique **x** au prix $p \in \mathbb{R}_+$ ne dépend que de x.On peut alors calculer le cout moyen sachant qu'un client intéréssé va acheter le modele avec une probabilité $f_\beta(x)$:

$$pf_\beta(x) = \frac{p}{1 + exp(-(\beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 p))}$$

On a alors pour β donné, un gain moyen de $\boxed{g(x,p) = \dfrac{p}{1 + exp(-(\beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 p))}}$.

Question 3 – .

Calcul de $\frac{\partial f}{\partial u}$:
Soit u $\in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) = \frac{-exp(-u)}{(1 + exp(-u))^2}$$

Calcul de $\frac{\partial g}{\partial p}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial p}(x,p) &= \frac{(1+exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p)+\beta_2 p.exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p))}{(1+exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p)))^2}\\ &= \frac{1+(1+\beta_2 p)exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p))}{(1+exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p)))^2}\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\frac{\partial g}{\partial p}(x,p) = \frac{1+(1+\beta_2 p)exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p))}{(1+exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x+\beta_2 p)))^2}}$.

Question 4 – .

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial p}(p^*) = 0 &\iff \frac{1+(1+\beta_2 p^*)exp(-(\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 p^*))}{\left(1+exp(-(\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 p^*))\right)^2} = 0\\ &\iff (1+\beta_2 p^*)exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x-1+(1+\beta_2 p^*))) = -1 \qquad \text{On a } \times \text{ par le dénominateur non nul}\\ &\iff -(1+\beta_2 p^*)exp(-(\beta_0+\beta_1\cdot x-1))exp(-(1+\beta_2 p^*)) = +1 \qquad \text{on } \times -1 \text{ pour avoir xexp(x)=c}\\ &\iff -(1+\beta_2 p^*)exp(-(1+\beta_2 p^*)) = exp((\beta_0+\beta_1\cdot x-1))\\ &\iff -(1+\beta_2 p^*)exp(-(1+\beta_2 p^*)) = exp((\beta_0+\beta_1\cdot x-1))\end{aligned}$$

On a alors en introduisant la fonction W de Lambert (aussi appelé fonction Oméga) qui est la réciproque de la fonction $f(w) = we^w$:

$$\begin{aligned}&\iff W(-((1+\beta_2 p^*)exp(-(1+\beta_2 p^*)))) = W(exp((\beta_0+\beta_1\cdot x-1)))\\ &\iff -(1+\beta_2 p^*) = W(exp((\beta_0+\beta_1\cdot x-1)))\\ &\iff p^* = -\frac{W(exp(\beta_0+\beta_1\cdot x-1))+1}{\beta_2}\end{aligned}$$

Remarque : On aurait aussi pu calculer la dériver seconde par apport à p et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
On a donc une unique valeur pour $\boxed{p^* = -\frac{W(exp(\beta_0+\beta_1\cdot x-1))+1}{\beta_2}}$ qui ne dépend que de β et de **x**.

Question 5 – .
Rappelons que $g(x,p)$ prédit le gain moyen que va se faire le propriétaire selon la valeur fixé pour **x** et p. Mais alors, d'après la question 4, on sait que g admet un maximum en $p^* = \frac{W(exp(\beta_0+\beta_1\cdot x-1))+1}{\beta_2}$.
Donc pour avoir $\boxed{\text{un gain moyen maximal}}$ (et donc un maximum de profit), le propriétaire devra fixer la valeur de p à p^*.

Question 6 – .

— Si on connaît déjà β : comme $exp(\beta_0+\beta_1\cdot x-1)$ est positif pour n'importe quel choix de β_0,β_1 et x, on peut utiliser le développement par série de Taylor de $W_0(x)$ en 0 pour estimer p^* en fonction des valeurs de β et x.

— Si on cherche d'abord à estimer β pour ensuite calculer le prix p^* optimal, on peut échantillonner les décisions des clients sur la location de voiture à x fixé mais en changeant le prix, on pourra alors faire une $\boxed{\text{régression logistique}}$ pour obtenir une loi de classification de la décision par apport au prix. On pourra alors avoir un estimation de β_2 et de $\beta_0 + \beta_1 \cdot x$ qu'on introduira dans la valeur de p^* obtenu à la question 4 (puis faire un Développement par serié de Taylor pour trouver la valeur approchée de p^*)
