MACS - Quantification des incertitudes pour la simulation

TD 3 - Année 2022-2023

1 Analyse du copule de Farlie-Gumbel-Morgenstern

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 telles que pour $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$:

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = x_1 x_2 (1 + \theta(1 - x_1)(1 - x_2)). \tag{1}$$

1. Trouver les CDFs de X_1 et X_2, ainsi que la fonction de copule $C(x_1, x_2; \theta)$.

2. Calculer la PDF de $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$.

3. En déduire les marginales f_{X_1} et f_{X_2}. Vérifier la cohérence avec les résultats précédents.

4. Chercher le mode de $\boldsymbol{X}$.

5. Calculer la moyenne et la covariance de $\boldsymbol{X}$.

6. Interpréter la valeur de θ.

2 Influence de la corrélation sur la fiabilité d'une poutre encastrée

Soient X_1 et X_2 deux efforts corrélés ($E[X_1] = E[X_2] = m$, $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \sigma$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \rho\sigma^2$) s'exerÃ§ant sur une poutre simplement appuyée.

On admet que la valeur maximale du moment, $M_{\max}$ dans la poutre, est donné par :

$$M^{\max}(X_1, X_2) = \max_x M(x) = \max\left(\frac{2X_1 + X_2}{3}a, \frac{2X_2 + X_1}{3}a\right),$$

et on suppose que la poutre casse lorsque $M^{\max}(X_1, X_2) \geq M_r$.

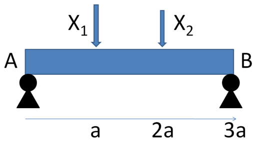
1. Donner l'expression de la probabilité de défaillance $P_f = \mathbb{P}(M^{\max}(X_1, X_2) \geq M_r)$.

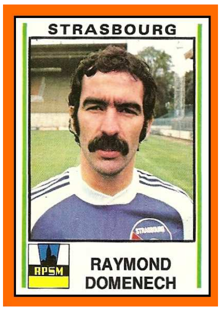
2. Calculer les variables aléatoires centrées et non-corrélées Z_1 et Z_2 associées à X_1 et X_2.

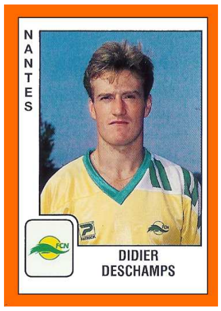
3. Exprimer le moment de flexion $M^{\max}(X_1, X_2)$ en fonction de Z_1 et Z_2.

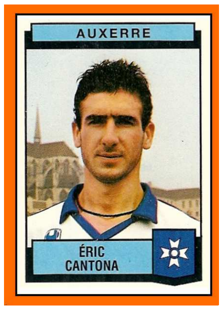
4. Récrire P_f en fonction de la loi de (Z_1, Z_2).

5. Représenter graphiquement la zone de défaillance, et justifier l'inégalité suivante :









$$P_f \leq 2 \int_{\beta(\rho)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{u^2}{2} du,$$

avec $\beta(\rho)$ la distance minimale entre la zone de défaillance et le point $(z_1 = 0, z_2 = 0)$ à calculer.

6. Comparer la résistance de la poutre pour les valeurs de ρ égales à 0, -1 et 1.

3 Collection de figurines

N figurines différentes sont disposées de manière équirépartie dans des paquets de céréales (on suppose le nombre de paquets très grand si bien que les probabilités d'obtenir une figurine ne changent pas dans le temps). On cherche à évaluer le nombre moyen de paquets de céréales que l'on doit acheter pour avoir 99% de chances d'obtenir toutes les figurines.

Pour cela, on définit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ le processus aléatoire à temps discret tel que X_n correspond au nombre (aléatoire) de figures différentes que l'on a obtenu en achetant n paquets.

1. Evaluer $\mathbb{P}(X_{n+1} = p)$ en fonction de la valeur de X_n, pour $p \geq 1$.

2. On définit par ailleurs $\boldsymbol{P}_n$ le vecteur tel que :

$$\boldsymbol{P}_n = \left(\mathbb{P}(X_n = 1), \ldots, \mathbb{P}(X_n = N)\right).$$

Exprimer alors $\boldsymbol{P}_{n+1}$ en fonction de $\boldsymbol{P}_n$.

3. En déduire la valeur de $\boldsymbol{P}_n$ pour tout $n \geq 1$.

4. Expliquer comment en déduire le nombre moyen de paquets à acheter pour avoir 99% de chances d'avoir toutes les figurines.

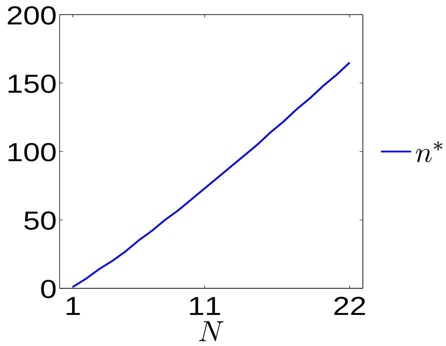


FIGURE 1 – Evolution de $\mathbb{P}(X_{n^*} = N) = 0.99$ en fonction de N.

5. Sur la figure 1 est tracée l'évolution de $\mathbb{P}(X_{n^*} = N) = 0.99$ en fonction de N. Commenter cette évolution en fonction de N.