高等微积分笔记

mny

2023 年 9 月 18 日

目录

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x,y) | a \le x \le b, \quad 0 \le y \le h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\operatorname{area}(D)$.
特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\operatorname{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})\, h(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\operatorname{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i)\, h(\xi) \tag{1.1}$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x)=x^2$

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(D) &\simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} h\left(\xi_i=x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2=\frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 &(1.2)\\ &=\frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) &(1.3)\\ &=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) &(1.4)\\ &=\frac{b^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \xlongequal{\text{记为}} x_n &(1.5)\end{aligned}$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x)=x^k, \quad (k \geq 2)$ 相应的

$$\operatorname{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k \tag{1.6}$$

更接近哪个数 L? 对于更一般 h, 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?
x 流动到 $x+o$,

$$S(x+o)-S(x) \simeq o \cdot h(x) \tag{1.7}$$

$$\Longrightarrow h(x) \simeq \frac{S(x+o)-S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) \tag{1.8}$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a)=a^m, \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$

$$\Longrightarrow h(x) \simeq \frac{(x+o)^m-x^m}{o} \tag{1.9}$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m=x^m+C_m^1 x^{m-1} y+\cdots+C_m^m y^m \tag{1.10}$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1}+C_m^2 x^{m-2} o \cdots+C_m^m o^{m-1} \xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a)=\frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b)=\int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x)=S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)'=h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x=S(b)-S(0) \tag{1.13}$$

2 集合与映射

定义 2.1. *设 X,Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据*

对于 X 中的每一个元素 x, 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f\colon X\to Y \tag{2.1}$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 domain, Y 为 f 的陪域 co-domain.

$$\forall A\subseteq X,\quad f(A)=\{y\in Y|\exists a\in A 使 y=f(a)\} \tag{2.2}$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X)=\mathrm{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. *原像集. 对 $V\subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集*

$$f^{-1}(V)=\{x\in X|f(x)\in V\} \tag{2.3}$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c)=\left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to Z$, 可定义复合映射 $g\circ f\colon X\to Z$,

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right),\quad \forall x\in X \tag{2.5}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to Z,\ h\colon Z\to W$, 则

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \tag{2.6}$$

证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X\to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x)=x,\quad \forall x\in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X\to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y\circ f=f=f\circ\mathrm{id}_X \tag{2.7}$$

对于两个集合 X,Y, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X,Y)=\big\{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\big\} \tag{2.8}$$