高等微积分笔记

mny

2023 年 9 月 29 日

目录

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x, y)|a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\operatorname{area}(D)$.

特例: $a=0$, 剖分 $D=\bigcup D_i$, 分点 $x_i=\frac{ib}{n}$

- 算 $\operatorname{area}(D_i)\simeq(x_i-x_{i-1})\,h(\xi_i),\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$
- 求和
$$\operatorname{area}(D)\simeq\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}-x_i)\,h(\xi) \tag{1.1}$$
- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x)=x^2$

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(D)&\simeq\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}h\left(\xi_i=x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 &(1.2)\\ &=\frac{b^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) &(1.3)\\ &=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) &(1.4)\\ &=\frac{b^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\xlongequal{\text{记为}}x_n &(1.5)\end{aligned}$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x)=x^k,\quad(k\geq 2)$ *相应的*

$$\operatorname{area}(D)\simeq\frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}i^k \tag{1.6}$$

更接近哪个数 L? 对于更一般 h, 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?
x 流动到 $x+o$,

$$S(x+o)-S(x)\simeq o\cdot h(x) \tag{1.7}$$
$$\Longrightarrow\ h(x)\simeq\frac{S(x+o)-S(x)}{o}\quad\text{(流数法)} \tag{1.8}$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a) = a^m, \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$

$$\implies h(x) \simeq \frac{(x+o)^m - x^m}{o} \tag{1.9}$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \cdots + C_m^m y^m \tag{1.10}$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a) = \frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b) = \int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x) = S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)' = h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x = S(b) - S(0) \tag{1.13}$$

2 集合与映射

定义 2.1. *设 X, Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据*

对于 X 中的每一个元素 x, 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f\colon X \to Y \tag{2.1}$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 domain, Y 为 f 的陪域 co-domain.

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A) = \{y \in Y | \exists a \in A 使 y = f(a)\} \tag{2.2}$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X) = \mathrm{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. *原像集. 对 $V \subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集*

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} = \bigcup_{y \in V} F_y \tag{2.3}$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c) = \left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

显然有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \tag{2.5}$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, 可定义复合映射 $g \circ f\colon X \to Z$,

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in X \tag{2.6}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.7}$$

  证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X \to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X \tag{2.8}$$

对于两个集合 X, Y, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \left\{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\right\} \tag{2.9}$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. *所谓一个范畴 (Category) $\mathcal{C}$ 是指如下一个数据:*

- *对象 X, Y, Z[1], 构成 object $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*
- *对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 (morphism), 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为*

$$f\colon X \to Y \tag{2.10}$$

- *态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \tag{2.11}$$

  记为

$$(f, g) \to g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \tag{2.12}$$

[1] 在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合是结合的, 即 $\forall X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 设

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), \tag{2.13}$$

有 *(结合律)*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.14}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \tag{2.15}$$

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定态射

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \tag{2.16}$$

满足, 对 $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, 有

$$f \circ \mathrm{id}_X = f,\ \mathrm{id}_X \circ g = g \tag{2.17}$$

例 2.1. 范畴 *Set*, 其中的对象是集合 X, Y, 此时

- 态射 $\longleftrightarrow$ 映射

$$\mathrm{Hom}_{Set}(X,Y) = \left\{\text{映射} f \colon X \to Y\right\} \tag{2.18}$$

- 态射复合 $\longleftrightarrow$ 映射复合
- $\mathrm{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 矢量空间 *Vect:* 对象是线性空间, 态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 *Top:* 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中)**.** 称映射 $f \colon x \to y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x'$, 有 $f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{使} f(x) = y$.
- 双射 $\iff$ 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f \colon X \to Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{映射} g \colon Y \to X, \text{使} g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{(只在集合当中适用)} \tag{2.19}$$

一般的范畴中*:*

$$\iff \forall \text{集合} W, \forall \text{映射} g_1, g_2 \colon W \to X, \text{若} f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{则有} g_1 = g_2 \tag{2.20}$$

- 满射

$$\iff \forall\text{集合}Z,\forall\text{映射}h_1,h_2\colon Y\to Z.\text{若有}h_1\circ f=h_2\circ f,\text{则有}h_1=h_2 \tag{2.21}$$

定理 2.1. 映射 $f\colon X\to Y$ 是双射 $\iff \exists$映射$g\colon Y\to X$使$g\circ f=\mathrm{id}_X$ 且$f\circ g=\mathrm{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

"$\Longrightarrow$":

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y\in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\})=\{g(y)\}$, 得到映射 g.

"$\Longleftarrow$":

设 $\exists g\colon Y\to X$ 使

$$g\circ f=\mathrm{id}_X,\ \ f\circ g=\mathrm{id}_Y \tag{2.22}$$

证 f 单: 若 $f(x)=f(x')$, 则

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=g[f(x')]=g\circ f(x') \tag{2.23}$$

即

$$x=x' \tag{2.24}$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y\in Y,\ \ f[g(y)]=f\circ g(y)=\mathrm{id}_Y(y)=y \tag{2.25}$$

所以 $y\in\operatorname{Im}f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 称态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \tag{2.26}$$

使得

$$g\circ f=\mathrm{id}_X\ \text{ 且 }\ f\circ g=\mathrm{id}_Y \tag{2.27}$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 $\exists$同构态射$f\colon X\to Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1,g_2\colon Y\to X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2=(g_1\circ f)\circ g_2=g_1\circ(f\circ g_2)=g_1\circ\mathrm{id}_Y=g_1. \tag{2.28}$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0,1,2,3,\ldots$.

由于要做不交并,

$$|S\cup T| = |S| + |T| \tag{3.1}$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S\times T = \{(s,t)|s\in S, t\in T\} \tag{3.2}$$

引入了乘法.

加法在 $\mathbb{N}$ 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 $\mathbb{Z}$. 但 $\mathbb{Z}$ 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, $(m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}_+)$, 将 $\mathbb{Z}$ 扩充为 $\mathbb{Q}$ [2] .

命题 3.1. *$\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2=2$ 的正数).*

证明. 假设 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, m,n 无公因子. 则 $2=\frac{m^2}{n^2}$.

$m^2=2n^2$ 说明 m 是偶数, 代回发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 $\mathbb{Q}$ 需要进一步扩充.

命题 3.2. *x 是有理数 $\iff$ x 是有限或无限循环小数.*[3]

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. *所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A,B), 满足:*

- *A,B 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集.*
- *$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\mathbb{Q}$*
- *$\forall x\in A, \forall y\in B$, 有$x<y$*
- *集合 A 无最大元素.*

---

[2]这些 "逆" 都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\text{所有}F(x)|F'=f\}. \tag{3.3}$$

[3]小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

称两个戴德金分割 $(A,B)=(A',B') \iff A=A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D=\{\text{所有戴德金分割}\} \tag{3.4}$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a,B_a),\ \text{其中}A_a=\{x\in\mathbb{Q}|x\le a\} \tag{3.5}$$

- 序.

  定义 $(A,B)\le(A',B') \iff A\subseteq A'$

- 和.

$$(A,B)+(A',B')=(A+A',\mathbb{Q}/(A+A')) \tag{3.6}$$

- 称一个戴德金实数 (A,B) 为一个戴德金有理数 $\iff$ A 有最大元素.

以上定义好实数集 $\mathbb{R}$, 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E\in\mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x\in E, x\le a$, 记为 $a=\max E$

最小元素: $a=\min E \iff a\in E$且$\forall x\in E$有$x\ge a$

定义 3.4. 上界和下界.

称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x\in E$有$x\le c$.

称 d 为 E 的一个下界, 如果 $\forall x\in E$有$x\ge d$.

定义 3.5. 确界.

称 c 是 E 的上确界 *(supremum)*, 记作 $c=\sup E$, 如果 c 是 E 的最小的上界.

$\iff c=\min\{E\text{ 的上界}\}$

称 d 是 E 的下确界 *(infimum)*, 记作 $d=\inf E$, 如果 d 是 E 的最大的下界.

$\iff d=\max\{E\text{ 的下界}\}$

命题 3.3. 任意非空实数集 F, $\min F, \max F$ 非必存在.

例 3.1. $F=(0,1)$, 则 $\min F, \max F$ 皆不存在.

证明. 因为

$$\forall a\in F \implies \frac{a}{2}\in F \implies a\text{不是最小元素}, \tag{3.7}$$

$$\forall b\in F \implies \frac{b+1}{2}\in F \implies b\text{不是最大元素}. \tag{3.8}$$

□

这样, 从字面上有

- 若 E 无上界, 则 E 无上确界.
- 若 E 有上界, $\{E \text{ 上界}\}$ 非空, **是否有最小元素需要证明**.

定理 3.1 (确界定理)**.** *有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.*

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E=\{x_\alpha=\text{戴德金分割 }(A_\alpha,B_\alpha)|\alpha\in\text{指标集 }\Lambda\} \tag{3.9}$$

已知 E 有上界 $\tilde{c}=(\tilde{A},\tilde{B})$, $(\tilde{A}\subsetneqq\mathbb{Q})$.

由 $\forall\alpha,\ \tilde{c}\geq x_\alpha$, 根据定义有

$$\forall\alpha,\ \tilde{A}\supseteq A_\alpha \implies \tilde{A}\supseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha \xlongequal{\text{定义为}} \{y|\exists\alpha\in\Lambda\text{使}y\in A_\alpha\} \tag{3.10}$$

令 $A=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ (A 必是 $\mathbb{Q}$ 的非空真子集).

考虑 $(A,B=\mathbb{Q}/A)$, 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

  $$\forall x\in A,\ \exists\alpha\text{使}x\in A_\alpha \tag{3.11}$$

  而且

  $$B=\left(\bigcup A_\alpha\right)^C=\bigcap A_\alpha^C=\bigcap_\alpha B_\alpha \implies \forall y\in B,\forall\alpha,\ y\in B_\alpha \tag{3.12}$$

  即我们可以找到一个 α,

  $$x\in A_\alpha,y\in B_\alpha \implies x<y. \tag{3.13}$$

- 定义中的第四条: 要证 A 中无最大元, 采用反证法.

  若 A 中有最大元, 记为 z, 则

  $$z\in A=\bigcup_\alpha A_\alpha \implies \exists\alpha\text{使}z\in A_\alpha. \tag{3.14}$$

  由于 z 是 A 最大元, 并且 $A_\alpha\subseteq A$, z 也是 A_α 最大元, 矛盾.

这样 $y = (A, B) = (\bigcup_\alpha A, \bigcup_\alpha B)$ 是一个戴德金实数, **我们可以断言** $y = \sup E$, 分为两部分内容:

- y 是 E 上界 $\iff y \geq x_\alpha \iff A \supseteq A_\alpha$, $\forall\alpha$ 显然成立.
- $y \leq E$ 的任何上界 $z \xlongequal{\text{记为}} (A_0, B_0)$, 由 z 是上界可知,

$$\forall\alpha,\ A_0 \supseteq A_\alpha \implies A \supseteq \bigcup_\alpha A_\alpha = A \implies z > y. \tag{3.15}$$

□

命题 3.4 (判断上确界)**.** *$C = \sup E$ 等价于下列两点同时成立:*

1. *$\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.*
2. *$\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in E$ 使 $x \geq c - \varepsilon$.*

定义 3.6. *称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界. $\iff \exists k > 0$使$\forall x \in E$有$|x| \leq k$*

例 3.2. 设 E 是有界的非空实数集, 则

$$\sup\{x - y | x, y \in E\} = \sup E - \inf E. \tag{3.16}$$

证明. 记 $F = \{x - y | x, y \in E\}$, 可知 F 非空有界.

由确界定理知, $\sup F, \sup E, \inf E$ 皆存在, 有

- $\sup E - \inf E$ 是 F 的上界, 因为 $\forall x, y \in E$, 有 $x \leq \sup E, y \geq \inf E$, 所以

$$x - y \leq \sup E - \inf E. \tag{3.17}$$

说明 $\sup E - \inf E$ 不小于 F 的任何成员, 是上界.

- 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\sup E - \frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 上界, $\inf E + \frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 下界.

$$\exists x, y \in E,\ x - y > \sup E - \inf E - \varepsilon \tag{3.18}$$

说明 $\forall\varepsilon > 0,\ \sup E - \inf E - \varepsilon$ 不是 F 上界.

所以 $\sup E - \inf E = \sup F$. □

3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

命题 3.5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z}$使$x < n$.

证明. 反证法. 假设结论不对, 则 $x \geq n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, 即 x 是 $\mathbb{Z}$ 的一个上界. 这说明 $\mathbb{Z}$ 非空且有上界.

由确界定理知, $\sup \mathbb{Z}$ 存在, 记 $M \equiv \sup \mathbb{Z}$, 那么

$$n+1 \in \mathbb{Z} \implies n+1 \leq M \implies n \leq M-1. \tag{3.19}$$

这与 $M = \sup \mathbb{Z}$ 矛盾. □

命题 3.6. 任何两个实数 $a < b$ 之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数 $\frac{m}{n} \in (a,b)$

对于 $x = \frac{1}{b-a}$, 由命题3.5结论可知,

$$\exists n \in \mathbb{Z},\ n > \frac{1}{b-a}. \tag{3.20}$$

对于 $y = nb$, 由命题3.5的结论可知, $m_1 \in \mathbb{Z},\ m_1 > y$, 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \tag{3.21}$$

对于 $z = -na$, 由命题3.5的结论可知, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m > -na$, 记 $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$, 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \tag{3.22}$$

这样总能找到整数 m_0, m_1 使 $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$. 于是在 m_0 和 m_1 之间总有一个 m 满足 $a < \frac{m}{n} < b$. □

4 极限理论

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑 n 越来越大的时候, x_n 是否趋近于某个值 L. 我们需要定义越来越接近这个概念.

定义 4.1. 所谓一个无穷序列, 是指一个映射 $x\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, 记为

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \tag{4.1}$$

称 x_n 为其第 n 项.

定义 4.2. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限 *(limit)*, *(*记为 $\lim_{n\to\infty} x_n = L$*)* 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\forall n > N$ 总有 $|x_n - L| < \varepsilon$.

也称当 $n \to \infty$ 时, x_n 趋于 L.

这种定义称为 $\varepsilon - N$ 语言.

"$\{x_n\}$ 以 L 为极限" 可以表示为

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N 有 |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

"$\{x_n\}$ 不以 L 为极限" 可以表示为

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \leq N 使 |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.3}$$

定义 4.3. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的, 如果 $\exists$ 实数 L, 使 $\{x_n\}$ 以 L 为极限. 否则, 称 $\{x_n\}$ 发散.

"$\{x_n\}$ 收敛" 可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, 有 |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

"$\{x_n\}$ 发散" 可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N 使 |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.5}$$

例 4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 取正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

□

例 4.2. 设 $a > 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$.

解 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 为此, $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \dfrac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则对 $\forall n \geq N$ 都有

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + N\varepsilon > a. \tag{4.7}$$

从而

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}. \tag{4.8}$$

可以得到

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon, \tag{4.9}$$

验证了

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{4.10}$$

总结 $\forall a>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

例 4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明. $\forall\varepsilon>0$ 取 N 使 $\dfrac{N-1}{2}\varepsilon^2>1$, 则对于 $\forall n\geq N$ 有

$$(1+\varepsilon)^n=1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2+\cdots\geq C_n^2\varepsilon^2. \tag{4.11}$$

$$\geq\frac{(n+1)n}{2}\varepsilon^2 \tag{4.12}$$

$$\geq\frac{N+1}{2}\varepsilon^2 n>1\cdot n \tag{4.13}$$

从而 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 得到

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon. \tag{4.14}$$

□

4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 则 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\geq N$ 有 $a_n<b_n$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A<B=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 取 $\varepsilon=\frac{B-A}{2}>0$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 定义知

$$\exists N_1\in\mathbb{Z}_+\forall n\geq N_1\text{有}|a_n-A|<\varepsilon. \tag{4.15}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 定义知

$$\exists N_2\in\mathbb{Z}_+\forall n\geq N_2\text{有}|b_n-B|<\varepsilon. \tag{4.16}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n\geq N$ 有

$$a_n<A+\varepsilon=B-\varepsilon<b_n. \tag{4.17}$$

□

推论 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明. 取 $q<r<1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<\lim_{n\to\infty}r. \tag{4.18}$$

由命题4.1可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$.

从而, $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \tag{4.19}$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \tag{4.20}$$

由于 $\frac{1}{r} > 1$, 记 $\frac{1}{r} = 1 + c, (c > 0)$. 这样, 取 $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$, 对于 $\forall n \geq N_0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \tag{4.21}$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \tag{4.22}$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \tag{4.23}$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1\text{或}r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

推论 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 且 $a < B$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A < B = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{4.25}$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in Z_+, \forall n \geq N\text{满足}a_n > a_n, \tag{4.26}$$

矛盾! □

推论 收敛的数列一定有界.

定义 4.4. *称数列有上界, 若* $\exists M$*使*$\forall n, a_n \leq M$*. 称数列有下界, 若* $\exists K$*使*$\forall n, a_n \geq K$*.*

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = L < L+1 = \lim_{n\to\infty} L+1$, 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{有} x_n < L+1. \tag{4.27}$$

所以

$$x_n \leq \max\{x_1, \cdots, x_N, L+1\}. \tag{4.28}$$

故有上界, 下界同理. □

推论 (极限不等式) 设 $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N_0$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

证明. 反证法. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$, 由命题4.1可知, $\exists n \geq N$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注意! $\leq$ 可过渡给极限式, 但 $<$ 不一定能.

例 4.4. $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, 但 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

4.2 极限的计算方法

4.2.1 从定义直接计算

例 4.5. 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \text{当} q > 1 \text{时}. \tag{4.29}$$

证法一

证明. 记 $x_n = \frac{n^k}{q^n}$, 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k q^n}{q^{n+1} n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{k\text{个}} \cdot \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} < 1\end{aligned} \tag{4.30}$$

由命题4.1知 $\lim x_n = 0$. □

证法二 (从定义验证)

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\geq\max\left\{2k,\frac{(k+1)!2^k}{a^{k-1}\varepsilon}\right\}$. $\forall n\geq N$ 有 (记 $q=1+a,\ a>0$)

$$\begin{aligned}\frac{n^k}{q^n}=\frac{n^k}{(1+a)^n}&\leq\frac{n^k}{C_n^{k+1}a^{k+1}}\\&=\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)a^{k+1}}\\&=\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{n-k}\\&<\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}2\cdot2\cdots2\\&=\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{n}\leq\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{N}<\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.31}$$

□

4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设 $\lim a_n=A,\ \lim b_n=B$, 则

$$\lim(a_n+b_n)=A+B\tag{4.32}$$

$$\lim(a_n-b_n)=A-B\tag{4.33}$$

$$\lim a_nb_n=AB\tag{4.34}$$

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\quad\text{(分母不为零)}\tag{4.35}$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x+y|\leq|x|+|y|\tag{4.36}$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何 $\varepsilon>0$,

$$|a_nb_n-AB|=|(a_n-A)b_n+A(b_n-B)|\leq|a_n-A|\cdot|b_n|+|A|\cdot|b_n-B|\tag{4.37}$$

- 由 $\{b_n\}$ 收敛知其有界, 即 $\exists M$ 使 $|b_n|\leq M,\forall n$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 知 $\exists N_1\in\mathbb{Z}_1,\forall n\geq N_1$ 有 $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2M}$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 知 $\exists N_2\in\mathbb{Z}_1,\forall n\geq N_2$ 有 $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$.

从而, 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 对 $n\geq N$, 代回(4.37)得

$$|a_nb_n-AB|\leq\frac{\varepsilon}{2M}M+|A|\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.38}$$

这证明了 $\lim a_nb_n=AB$.

商

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{a_nB-b_nA}{b_nB}\right|=\left|\frac{(a_n-A)B+A(B-b_n)}{b_nB}\right| \tag{4.39}$$

$$\leq\frac{|a_n-A|}{|b_n|}+\frac{|A|\cdot|B-b_n|}{|b_n||B|}. \tag{4.40}$$

- 由 $B\neq 0$, 不妨设 $B>0$. 由命题4.1知 $\exists M\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\geq M$ 有 $b_n>\frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ 知 $\exists N_2,\forall n\geq N_2$ 有 $|a_n-A|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty}b_n=B$ 知 $\exists N_3,\forall n\geq N_3$ 有 $|b_n-B|<\varepsilon''=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 对 $\forall n\geq N$ 有 (代回(4.39))

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|\leq\frac{\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}}{\frac{B}{2}}+\frac{|A|\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2}B}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{4.41}$$

□