线代笔记

mny

2023 年 9 月 18 日

目录

1 线性空间

线性空间 $\mathbb{R}^m$, m 是一个自然数.
$m = 1$ 时, 是实数. 有两个代数运算 $+$ 和 $*$, 有两个特殊元素 0 和 1.

1.1 实数中运算的性质

$+$ 满足的性质:

- 交换的, $a + b = b + a$
- 对于任意一个 a, 存在 b, 使得 $a + b = 0$, $b = -a$
  $\implies$ 减法运算 $a - b = a + (-b)$
- 加法满足结合律 $a + (b + c) = (a + b) + c$

$*$ 满足的性质:

- 交换的 $a * b = b * a$
- 对于一个非 0 元素 a, 存在一个元素 b, 使得 $a * b = 1$, $b = a^{-1}$
- 结合律 $a * (b * c) = (a * b) * c$

$+$ 和 $*$ 满足分配律: $a*(b+c)=a*b+a*c$

定义 1.1. $\mathbb{R}^m$ 中的元素为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, 其中 $a_1,\dots a_m$ 为任意实数.

$\mathbb{R}^m$ 中的元素 $v=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 称为列向量. 有时一个元素表示为 $\begin{bmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_m \end{bmatrix}$, 称作行向量.

$\mathbb{R}^m$ 上定义两个运算 $+$ 和 $*$(用列向量来表示)

定义 1.2. $+$ 加法: 任意两个列向量 a,b 得到一个新的列向量.

$$v+w=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

例 1.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

定义 1.3. $*$ 数乘: 任意一个实数 c, 以及一个列向量 v, 得到一个新的列向量 cv

$$cv=c\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

1.2 $(\mathbb{R}^m,+,*)$ 为一个线性空间

两种运算满足:

- 交换律 $v+w=w+v$
- 结合律 $c_1(c_2v)=(c_1c_2)v$
- 分配律 $c(v+w)=cv+cw$

- 通过加法可以定义减法运算 $v - w = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_m - b_m \end{bmatrix}$.
- 给定一组 $\mathbb{R}^m$ 中的向量, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, 可以构成新的向量

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \quad (x_1, \ldots, x_n \text{为实数}) \tag{1.3}$$

  这个新的向称为 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 的线性组合.

1.3 矩阵

定义 1.4. *$m \times n$ 矩阵,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

a_{ij} 为实数

从线性空间的角度, 矩阵可以有下列的理解:

- 从矩阵列的角度, $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n \end{bmatrix}$
- 从矩阵行的角度, $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_m \end{bmatrix}$

固定 m 和 n, 矩阵空间上可以定义两个自然的运算

定义 1.5. *矩阵加法:*

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad (A + B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{1.5}$$

定义 1.6. *数乘, 任意一个实数 c, 一个矩阵 A, 得到*

$$(cA)_{ij} = (ca_{ij}) \tag{1.6}$$

定义 1.7. 矩阵乘法.

定义: 矩阵乘法是把一个 $m \times n$ 矩阵乘上一个 $n \times k$ 矩阵, 得到一个 $m \times k$ 矩阵.

运算规则:

$$(C)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i_2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \tag{1.7}$$

矩阵乘法的性质:

- 结合律:
$$(AB)\,C = A\,(BC) \tag{1.8}$$
- 分配律:
$$A\,(B + C) = AB + AC \tag{1.9}$$
$$(A + B)\,C = AC + AB \tag{1.10}$$
- **矩阵乘法不满足交换律**
$$AB \overset{\text{不一定}}{\neq} BA \tag{1.11}$$
不论交换有没有定义, 都不一定相等.

矩阵乘法的几种理解:

- $C = AB$, C_{ij} 为把 A 的第 i 行和 B 的第 j 列乘起来.
- 从矩阵 A 的列向量的角度看
$$A = \left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\right] \tag{1.12}$$
那么 C 的第 j 列为 A 的列向量的线性组合, 组合系数为 B 的第 j 列,
$$b_{1j}\vec{v}_1 + b_{2j}\vec{v}_2 + \cdots + b_{nj}\vec{v}_n \tag{1.13}$$
- 从矩阵 B 的行向量来看
$$B = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_m \end{bmatrix} \tag{1.14}$$
矩阵 C 的第 i 行为 B 的行向量的线性组合, 组合系数为矩阵 A 的第 i 行.
$$a_{i1}\vec{w}_1 + a_{i2}\vec{w}_2 + \cdots + a_{in}\vec{w}_n \tag{1.15}$$

几种特殊矩阵:

- 方阵: 行和列数目一致, $n \times n$
- 零矩阵: 元素都为 0
- n 阶单位矩阵:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$
对角线全为 1
- 上三角矩阵:
$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{1.17}$$
- 下三角矩阵:
$$\begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{1.18}$$