

# 第一次作业

mny

2023 年 9 月 20 日

## 1 Path Integral without $\int dp$

标准的路径积分

$$\begin{aligned} \langle x_N | U(t_N, t_0) | x_0 \rangle &= \left( \prod_{n=1}^{N-1} \int \frac{dp_{n+\frac{1}{2}} dx_n}{2\pi\hbar} \right) \int \frac{dp_{\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp \left( \frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ p_{n+\frac{1}{2}} (x_{n+1} - x_n) - \delta t \frac{H(p_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+1}, t_{n+\frac{1}{2}}) + H(\dots, x_n, \dots)}{2} \right] \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中动量的部分是高斯型的, 我们把它写出来

$$\prod_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{dp_{n+\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \left[ p_{n+\frac{1}{2}} \delta x_n - \delta t \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{V(x_{n+1}) + V(x_n)}{2} \right) \right] \right) \right]. \quad (1.2)$$

应用高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (1.3)$$

对应到这里,

$$\begin{cases} a = \frac{i\delta t}{\hbar} \frac{1}{2m} \\ b = \frac{i\delta x_n}{\hbar} \end{cases} \quad (1.4)$$

于是(1.2)的结果为

$$\prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{i\delta t}} e^{\frac{i(\delta x_n)^2 m}{2\hbar\delta t}} e^{-\frac{i}{\hbar} \delta t \frac{V(x_{n+1}) + V(x_n)}{2}} \quad (1.5)$$

路径积分去掉动量之后的结果为

$$\langle x_N | U(t_N, t_0) | x_0 \rangle = \left( \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \right) \left( \prod_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\delta t}} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{\delta x_n}{\delta t} \right)^2 - \frac{V(x_{n+1}) + V(x_n)}{2} \right]} \right) \quad (1.6)$$

也可以写成紧致形式

$$\langle x_N | U(t_N, t_0) | x_0 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \delta t}} \prod_{n=1}^{N-1} \left( dx_n \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \delta t}} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int dt L} \quad (1.7)$$