

高等微积分笔记

mny

2023 年 10 月 12 日

目录

| | | |
|----------|---------------------|-----------|
| 1 | 微积分简介 | 2 |
| 1.1 | 阿基米德时代 | 2 |
| 1.2 | Newton 时代 | 3 |
| 2 | 集合与映射 | 3 |
| 2.1 | 映射的性质 | 4 |
| 2.2 | 范畴中的映射 | 5 |
| 3 | 实数 | 7 |
| 3.1 | 戴德金分割 | 8 |
| 3.2 | 确界定理 | 9 |
| 3.3 | 确界定理应用 | 11 |
| 4 | 数列极限 | 12 |
| 4.1 | 极限的性质 | 14 |
| 4.2 | 极限的计算方法 | 16 |
| 4.2.1 | 从定义直接计算 | 16 |
| 4.2.2 | 极限的四则运算 | 17 |
| 4.2.3 | 夹逼定理 | 18 |
| 4.2.4 | Stolz 定理 | 21 |
| 4.3 | 单调极限定理 | 21 |
| 4.4 | 柯西收敛准则 | 25 |
| 4.5 | 度量空间 | 27 |
| 4.5.1 | 基本概念 | 27 |

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\text{area}(D)$.

特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\text{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})h(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})h(\xi_i) \quad (1.1)$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x) = x^2$

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} h(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (1.2)$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad (1.3)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.4)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{\text{记为}} x_n \quad (1.5)$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x) = x^k$, ($k \geq 2$) 相应的

$$\text{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k \quad (1.6)$$

更接近哪个数 L ? 对于更一般 h , 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

x 流动到 $x + o$,

$$S(x + o) - S(x) \simeq o \cdot h(x) \quad (1.7)$$

$$\implies h(x) \simeq \frac{S(x + o) - S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) \quad (1.8)$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a) = a^m$, ($m \in \mathbb{Z}_+$)

$$\implies h(x) \simeq \frac{(x + o)^m - x^m}{o} \quad (1.9)$$

使用牛顿二项式公式

$$(x + y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \cdots + C_m^m y^m \quad (1.10)$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xrightarrow{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \quad (1.11)$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a) = \frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b) = \int_0^b h(x) dx$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x) = S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi) d\xi \right)' = h(x) \quad (1.12)$$

和

$$\int_0^b S'(x) dx = S(b) - S(0) \quad (1.13)$$

2 集合与映射

定义 2.1. 设 X, Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据

对于 X 中的每一个元素 x , 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.1)$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 *domain*, Y 为 f 的陪域 *co-domain*.

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A \text{ 使 } y = f(a)\} \quad (2.2)$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X) = \text{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. 原像集. 对 $V \subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} = \bigcup_{y \in V} F_y \quad (2.3)$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c \quad (2.4)$$

显然有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad (2.5)$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, 可定义复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X \quad (2.6)$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.7)$$

证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\text{id}_X: X \rightarrow X$, 定义为 $\text{Id}_X(x) = x$, $\forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f: X \rightarrow Y$ 有

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X \quad (2.8)$$

对于两个集合 X, Y , 存在一个集合

$$\text{Hom}(X, Y) = \{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\} \quad (2.9)$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. 所谓一个范畴 (Category) \mathcal{C} 是指如下一个数据:

- 对象 X, Y, Z^1 , 构成 *object* $\text{Obj}(\mathcal{C})$
- 对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 称 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 \mathcal{C} 中的一个态射 (*morphism*), 记 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.10)$$

- 态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.11)$$

记为

$$(f, g) \rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.12)$$

- 态射复合是结合的, 即 $\forall X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 设

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), \quad (2.13)$$

有 (结合律)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.14)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \quad (2.15)$$

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 指定态射

$$\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \quad (2.16)$$

满足, 对 $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, 有

$$f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_X \circ g = g \quad (2.17)$$

例 2.1. 范畴 Set , 其中的对象是集合 X, Y , 此时

- 态射 \longleftrightarrow 映射

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y) = \{ \text{映射 } f: X \rightarrow Y \} \quad (2.18)$$

¹在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合 \longleftrightarrow 映射复合
- $\text{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 向量空间 $Vect$: 对象是线性空间, 态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 Top : 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中). 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x', \text{ 有 } f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ 使 } f(x) = y$.
- 双射 \iff 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{ 映射 } g: Y \rightarrow X, \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \quad (\text{只在集合当中适用}) \quad (2.19)$$

一般的范畴中:

$$\iff \forall \text{ 集合 } W, \forall \text{ 映射 } g_1, g_2: W \rightarrow X, \text{ 若 } f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{ 则有 } g_1 = g_2 \quad (2.20)$$

- 满射

$$\iff \forall \text{ 集合 } Z, \forall \text{ 映射 } h_1, h_2: Y \rightarrow Z. \text{ 若有 } h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{ 则有 } h_1 = h_2 \quad (2.21)$$

定理 2.1. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是双射 $\iff \exists \text{ 映射 } g: Y \rightarrow X \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \text{ 且 } f \circ g = \text{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

“ \implies ”:

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g .

“ \impliedby ”:

设 $\exists g: Y \rightarrow X$ 使

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.22)$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \quad (2.23)$$

即

$$x = x' \quad (2.24)$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y, f[g(y)] = f \circ g(y) = \text{id}_Y(y) = y \quad (2.25)$$

所以 $y \in \text{Im } f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 \mathcal{C} 中, 称态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad (2.26)$$

使得

$$g \circ f = \text{id}_X \text{ 且 } f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.27)$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 \exists 同构态射 $f: X \rightarrow Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2: Y \rightarrow X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1. \quad (2.28)$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \dots$

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \quad (3.1)$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s, t) | s \in S, t \in T\} \quad (3.2)$$

引入了乘法.

加法在 \mathbb{N} 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 \mathbb{Z} . 但 \mathbb{Z} 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+$), 将 \mathbb{Z} 扩充为 \mathbb{Q} ².

²这些“逆”都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x) dx = \{ \text{所有 } F(x) | F' = f \}. \quad (3.3)$$

命题 3.1. $\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2 = 2$ 的正数).

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n 无公因子. 则 $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

$m^2 = 2n^2$ 说明 m 是偶数, 代入发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 \mathbb{Q} 需要进一步扩充.

命题 3.2. x 是有理数 $\iff x$ 是有限或无限循环小数.³

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. 所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A, B) , 满足:

- A, B 是 \mathbb{Q} 的非空子集.
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $\forall x \in A, \forall y \in B$, 有 $x < y$
- 集合 A 无最大元素.

称两个戴德金分割 $(A, B) = (A', B') \iff A = A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D = \{\text{所有戴德金分割}\} \quad (3.4)$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a, B_a), \text{ 其中 } A_a = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq a\} \quad (3.5)$$

- 序.

定义 $(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$

- 和.

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', \mathbb{Q} / (A + A')) \quad (3.6)$$

- 称一个戴德金实数 (A, B) 为一个戴德金有理数 $\iff A$ 有最大元素.

以上定义好实数集 \mathbb{R} , 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

³小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E \in \mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x \in E, x \leq a$, 记为 $a = \max E$

最小元素: $a = \min E \iff a \in E$ 且 $\forall x \in E$ 有 $x \geq a$

定义 3.4. 上界和下界.

称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.

称 d 为 E 的一个下界, 如果 $\forall x \in E$ 有 $x \geq d$.

定义 3.5. 确界.

称 c 是 E 的上确界 (*supremum*), 记作 $c = \sup E$, 如果 c 是 E 的最小的上界.

$\iff c = \min\{E \text{ 的上界}\}$

称 d 是 E 的下确界 (*infimum*), 记作 $d = \inf E$, 如果 d 是 E 的最大的下界.

$\iff d = \max\{E \text{ 的下界}\}$

命题 3.3. 任意非空实数集 F , $\min F, \max F$ 未必存在.

例 3.1. $F = (0, 1)$, 则 $\min F, \max F$ 皆不存在.

证明. 因为

$$\forall a \in F \implies \frac{a}{2} \in F \implies a \text{ 不是最小元素}, \quad (3.7)$$

$$\forall b \in F \implies \frac{b+1}{2} \in F \implies b \text{ 不是最大元素}. \quad (3.8)$$

□

这样, 从字面上有

- 若 E 无上界, 则 E 无上确界.
- 若 E 有上界, $\{E \text{ 上界}\}$ 非空, 是否有最小元素需要证明.

定理 3.1 (确界定理). 有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E = \{x_\alpha = \text{戴德金分割 } (A_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in \text{指标集 } \Lambda\} \quad (3.9)$$

已知 E 有上界 $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B})$, $(\tilde{A} \subsetneq \mathbb{Q})$.

由 $\forall \alpha, \tilde{c} \geq x_\alpha$, 根据定义有

$$\forall \alpha, \tilde{A} \supseteq A_\alpha \implies \tilde{A} \supseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \xrightarrow{\text{定义为}} \{y | \exists \alpha \in \Lambda \text{ 使 } y \in A_\alpha\} \quad (3.10)$$

令 $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ (A 必是 \mathbb{Q} 的非空真子集).

考虑 $(A, B = \mathbb{Q}/A)$, 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

$$\forall x \in A, \exists \alpha \text{ 使 } x \in A_\alpha \quad (3.11)$$

而且

$$B = \left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha \right)^C = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^C = \bigcap_{\alpha} B_\alpha \implies \forall y \in B, \forall \alpha, y \in B_\alpha \quad (3.12)$$

即我们可以找到一个 α ,

$$x \in A_\alpha, y \in B_\alpha \implies x < y. \quad (3.13)$$

- 定义中的第四条: 要证 A 中无最大元, 采用反证法.

若 A 中有最大元, 记为 z , 则

$$z \in A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \implies \exists \alpha \text{ 使 } z \in A_\alpha. \quad (3.14)$$

由于 z 是 A 最大元, 并且 $A_\alpha \subseteq A$, z 也是 A_α 最大元, 矛盾.

这样 $y = (A, B) = (\bigcup_{\alpha} A_\alpha, \bigcup_{\alpha} B_\alpha)$ 是一个戴德金实数, 我们可以断言 $y = \sup E$, 分为两部分内容:

- y 是 E 上界 $\iff y \geq x_\alpha \iff A \supseteq A_\alpha, \forall \alpha$ 显然成立.
- $y \leq E$ 的任何上界 $z \xrightarrow{\text{记为}} (A_0, B_0)$, 由 z 是上界可知,

$$\forall \alpha, A_0 \supseteq A_\alpha \implies A \supseteq \bigcup_{\alpha} A_\alpha = A \implies z > y. \quad (3.15)$$

□

命题 3.4 (判断上确界). $C = \sup E$ 等价于下列两点同时成立:

1. $\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E$ 使 $x \geq c - \varepsilon$.

定义 3.6. 称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界. $\iff \exists k > 0$ 使 $\forall x \in E$ 有 $|x| \leq k$

例 3.2. 设 E 是有界的非空实数集, 则

$$\sup\{x - y | x, y \in E\} = \sup E - \inf E. \quad (3.16)$$

证明. 记 $F = \{x - y | x, y \in E\}$, 可知 F 非空有界.

由确界定理知, $\sup F, \sup E, \inf E$ 皆存在, 有

- $\sup E - \inf E$ 是 F 的上界, 因为 $\forall x, y \in E$, 有 $x \leq \sup E, y \geq \inf E$, 所以

$$x - y \leq \sup E - \inf E. \quad (3.17)$$

说明 $\sup E - \inf E$ 不小于 F 的任何成员, 是上界.

- 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\sup E - \frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 上界, $\inf E + \frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 下界.

$$\exists x, y \in E, x - y > \sup E - \inf E - \varepsilon \quad (3.18)$$

说明 $\forall \varepsilon > 0$, $\sup E - \inf E - \varepsilon$ 不是 F 上界.

所以 $\sup E - \inf E = \sup F$. □

3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

命题 3.5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}$ 使 $x < n$.

证明. 反证法. 假设结论不对, 则 $x \geq n, \forall n \in \mathbb{Z}$, 即 x 是 \mathbb{Z} 的一个上界. 这说明 \mathbb{Z} 非空且有上界.

由确界定理知, $\sup \mathbb{Z}$ 存在, 记 $M \equiv \sup \mathbb{Z}$, 那么

$$n + 1 \in \mathbb{Z} \implies n + 1 \leq M \implies n \leq M - 1. \quad (3.19)$$

这与 $M = \sup \mathbb{Z}$ 矛盾. □

命题 3.6. 任何两个实数 $a < b$ 之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数 $\frac{m}{n} \in (a, b)$

对于 $x = \frac{1}{b-a}$, 由命题3.5结论可知,

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n > \frac{1}{b-a}. \quad (3.20)$$

对于 $y = nb$, 由命题3.5的结论可知, $m_1 \in \mathbb{Z}$, $m_1 > y$, 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \quad (3.21)$$

对于 $z = -na$, 由命题3.5的结论可知, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $m > -na$, 记 $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$, 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \quad (3.22)$$

这样总能找到整数 m_0, m_1 使 $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$. 于是在 m_0 和 m_1 之间总有一个 m 满足 $a < \frac{m}{n} < b$. \square

4 数列极限

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑 n 越来越大的时候, x_n 是否趋近于某个值 L . 我们需要定义越来越接近这个概念.

定义 4.1. 所谓一个无穷序列, 是指一个映射 $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, 记为

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \quad (4.1)$$

称 x_n 为其第 n 项.

定义 4.2. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限 (*limit*), (记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$) 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\forall n > N$ 总有 $|x_n - L| < \varepsilon$.

也称当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 趋于 L .

这种定义称为 $\varepsilon - N$ 语言.

“ $\{x_n\}$ 以 L 为极限” 可以表示为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{ 使得 } \forall n \geq N \text{ 有 } |x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

“ $\{x_n\}$ 不以 L 为极限” 可以表示为

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \leq N \text{ 使 } |x_n - L| \geq \varepsilon. \quad (4.3)$$

定义 4.3. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的, 如果 \exists 实数 L , 使 $\{x_n\}$ 以 L 为极限. 否则, 称 $\{x_n\}$ 发散.

“ $\{x_n\}$ 收敛” 可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, \text{ 有 } |x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

“ $\{x_n\}$ 发散” 可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{ 使 } |x_n - L| \geq \varepsilon. \quad (4.5)$$

例 4.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 取正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (4.6)$$

□

例 4.2. 设 $a > 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$.

解 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 为此, $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则对 $\forall n \geq N$ 都有

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + N\varepsilon > a. \quad (4.7)$$

从而

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}. \quad (4.8)$$

可以得到

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon, \quad (4.9)$$

验证了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (4.10)$$

总结 $\forall a > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

例 4.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$ 取 N 使 $\frac{N-1}{2}\varepsilon^2 > 1$, 则对于 $\forall n \geq N$ 有

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + C_n^1 \varepsilon + C_n^2 \varepsilon^2 + \cdots \geq C_n^2 \varepsilon^2. \quad (4.11)$$

$$\geq \frac{(n+1)n}{2} \varepsilon^2 \quad (4.12)$$

$$\geq \frac{N+1}{2} \varepsilon^2 n > 1 \cdot n \quad (4.13)$$

从而 $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, 得到

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon. \quad (4.14)$$

□

4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式). 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 则 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $a_n < b_n$.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 定义知

$$\exists N_1 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_1 \text{ 有 } |a_n - A| < \varepsilon. \quad (4.15)$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 定义知

$$\exists N_2 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_2 \text{ 有 } |b_n - B| < \varepsilon. \quad (4.16)$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$a_n < A + \varepsilon = B - \varepsilon < b_n. \quad (4.17)$$

□

推论 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证明. 取 $q < r < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} r. \quad (4.18)$$

由命题4.1可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$.

从而, $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \quad (4.19)$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \quad (4.20)$$

由于 $\frac{1}{r} > 1$, 记 $\frac{1}{r} = 1 + c, (c > 0)$. 这样, 取 $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$, 对于 $\forall n \geq N_0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \quad (4.21)$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \quad (4.22)$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \quad (4.23)$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1 \text{ 或 } r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

推论 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 且 $a < B$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (4.25)$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 满足 } a_n > a, \quad (4.26)$$

矛盾! □

推论 收敛的数列一定有界.

定义 4.4. 称数列有上界, 若 $\exists M$ 使 $\forall n, a_n \leq M$. 称数列有下界, 若 $\exists K$ 使 $\forall n, a_n \geq K$.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L < L + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} L + 1$, 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } x_n < L + 1. \quad (4.27)$$

所以

$$x_n \leq \max \{x_1, \dots, x_N, L + 1\}. \quad (4.28)$$

故有上界, 下界同理. □

推论 (极限不等式) 设 $a_n \leq b_n, \forall n \geq N_0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证明. 反证法. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 由命题4.1可知, $\exists n \geq N$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注意! \leq 可过渡给极限式, 但 $<$ 不一定能.

例 4.4. $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

4.2 极限的计算方法

4.2.1 从定义直接计算

例 4.5. 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \text{当 } q > 1 \text{ 时.} \quad (4.29)$$

证法一

证明. 记 $x_n = \frac{n^k}{q^n}$, 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k q^n}{q^{n+1} n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{k \text{ 个}} \cdot \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} < 1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

由命题4.1知 $\lim x_n = 0$. □

证法二 (从定义验证)

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq \max \left\{ 2k, \frac{(k+1)! 2^k}{a^{k+1} \varepsilon} \right\}$. $\forall n \geq N$ 有 (记 $q = 1 + a$, $a > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{n^k}{q^n} &= \frac{n^k}{(1+a)^n} \leq \frac{n^k}{C_n^{k+1} a^{k+1}} \\ &= \frac{n^k (k+1)!}{n(n-1) \cdots (n-k) a^{k+1}} \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \frac{1}{n} \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{n-k} \\ &< \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \frac{1}{n} 2 \cdot 2 \cdots 2 \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} 2^k \frac{1}{n} \leq \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} 2^k \frac{1}{N} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.31)$$

□

4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设 $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, 则

$$\lim(a_n + b_n) = A + B \quad (4.32)$$

$$\lim(a_n - b_n) = A - B \quad (4.33)$$

$$\lim a_n b_n = AB \quad (4.34)$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (\text{分母不为零}) \quad (4.35)$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (4.36)$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \quad (4.37)$$

- 由 $\{b_n\}$ 收敛知其有界, 即 $\exists M$ 使 $|b_n| \leq M, \forall n$.
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 知 $\exists N_1 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_1$ 有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 知 $\exists N_2 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_2$ 有 $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$.

从而, 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 对 $n \geq N$, 代回(4.37)得

$$|a_n b_n - AB| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |A| \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.38)$$

这证明了 $\lim a_n b_n = AB$.

商

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} \right| = \left| \frac{(a_n - A)B + A(B - b_n)}{b_n B} \right| \quad (4.39)$$

$$\leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| |B|}. \quad (4.40)$$

- 由 $B \neq 0$, 不妨设 $B > 0$. 由命题4.1知 $\exists M \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq M$ 有 $b_n > \frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 知 $\exists N_2, \forall n \geq N_2$ 有 $|a_n - A| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{B}{2}$

- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 知 $\exists N_3, \forall n \geq N_3$ 有 $|b_n - B| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

$\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 对 $\forall n \geq N$ 有 (代回(4.39))

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2} \frac{B}{2}}{\frac{B}{2}} + \frac{|A| \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2} B} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4.41)$$

□

推论 有限次四则运算和极限可交换.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{i,k} = \sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} \quad (4.42)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n x_{i,k} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} \right) \quad (4.43)$$

证明. 只需 $k-1$ 次使用前述定理.

□

注意 无限和/无限积与极限未必可交换.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,k} \neq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} \right) \quad (4.44)$$

例 4.6. 对于一个下表这样一个数列 $x_{i,k}$,

| | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | \dots |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------|
| $i=1$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | |
| $i=2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | |
| $i=3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | |
| \vdots | | | | |

纵向求和, 值是 1, 但先取极限 $k \rightarrow \infty$ 每一项都变为零, 再纵向求和, 值是 0.

类似地, 有例子表明无限乘积与极限未必可交换.

4.2.3 夹逼定理

定理 4.2. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($\forall n \geq N_0$), 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \quad (4.45)$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在且等于 L .

证明. 对于左右两边的数列极限,

- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, \text{有 } |a_n - L| < \varepsilon \quad (4.46)$$

从而

$$L - \varepsilon < a_n \quad (4.47)$$

- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2, \text{有 } |c_n - L| < \varepsilon \quad (4.48)$$

从而

$$c_n < L + \varepsilon \quad (4.49)$$

结合起来, $\forall n \geq \max\{N_i\}$, 有 $L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$. □

例 4.7. 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{n^k} = a_k \quad (4.50)$$

因为

$$LHS = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k} \right) \quad (4.51)$$

$$= \lim a_k + \lim \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots \quad (4.52)$$

$$= a_k + 0 + \cdots = a_k. \quad (4.53)$$

例 4.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \cdots + b_0} \quad (4.54)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{n^k} \frac{n^l}{b_l n^l + \cdots + b_0} n^{k-l} \right) \quad (4.55)$$

$$= \begin{cases} a_k \cdot \frac{1}{b_l} \cdot 0 = 0, & k < l \\ a_k \cdot \frac{1}{b_l} \cdot 1 = 0, & k = l \\ \text{不存在 (由引理),} & k > l \end{cases} \quad (4.56)$$

引理 4.1. 设

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= X \neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= Y \neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n &\text{不存在},\end{aligned}\tag{4.57}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n) \text{ 不存在. }\tag{4.58}$$

证明. 反证法, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n) = L$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(x_n y_n z_n) \frac{1}{x_n} \frac{1}{y_n} \right] \tag{4.59}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} \tag{4.60}$$

$$= L \cdot X \cdot Y. \tag{4.61}$$

与条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 不存在 矛盾! □

例 4.9. 设 a_1, a_2, \dots, a_k 是正数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.62}$$

解 不妨设 $a_1 = \max\{a_i\}$, 有

$$(a_1^n)^{\frac{1}{n}} \leq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} \leq (ka_1^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.63}$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n)^{\frac{1}{n}} = a_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_1^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} a_1 = a_1. \tag{4.64}$$

使用夹逼定理得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_i\} \tag{4.65}$$

例 4.10. 进一步,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^{-n}, a_2^{-n}, \dots, a_k^{-n})^{-\frac{1}{n}} \tag{4.66}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_1} \right)^n + \dots + \left(\frac{1}{a_n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}} \tag{4.67}$$

$$= \frac{1}{\max\left\{ \frac{1}{a_i} \right\}} = \frac{1}{1/\min\{a_i\}} \tag{4.68}$$

$$= \min\{a_i\}. \tag{4.69}$$

4.2.4 计算极限的一个有用方法: Stolz theorem

定义 4.5. 称 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 如果对 $\forall k > 0$,

$$\exists n \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } x_n > k. \quad (4.70)$$

定理 4.3 (Stolz Theorem). 设 $\{b_n\}$ 严格单调递增且无上界 (或等价地说 $\lim b_n = +\infty$).

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \quad (4.71)$$

证明 Stolz 定理. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ 的定义可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N$ 有

$$L - \varepsilon < \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} < L + \varepsilon \implies (L - \varepsilon)(b_{i+1} - b_i) < a_{i+1} - a_i < (L + \varepsilon)(b_{i+1} - b_i) \quad (4.72)$$

我们可以对上式对 i 从 N 到 $n-1$ 求和, 得到

$$(L - \varepsilon)(b_n - b_N) < a_n - a_N < (L + \varepsilon)(b_n - b_N) \quad (4.73)$$

$$\xrightarrow{\text{除以 } b_n} (L - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) + \frac{a_N}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (L + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) + \frac{a_N}{b_n}. \quad (4.74)$$

同时注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_N}{b_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_N}{b_n} = 0 \quad (4.75)$$

由于命题4.1“充分大指标的项保持极限不等式”, 可知 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall n > N_0$ 都有

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < 2\varepsilon. \quad (4.76)$$

□

4.3 单调极限定理 (Weierstrass 定理)(Monotone Converge Theorem)

定理 4.4 (单调极限定理). 有上界且递增的数列一定收敛; 有下界且递减的数列一定收敛.

证明. 设 $\{x_i\}$ 递增且有上界, 考虑单步点集

$$X = \{x_n | n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad (4.77)$$

可知 X 非空且有上界, 由确界定理知, $\sup X$ 存在, 记为 L .

由 $\sup X = L$ 的定义知,

$$\forall \varepsilon > 0, L - \varepsilon \text{ 不是 } X \text{ 上界}, \quad (4.78)$$

即 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $x_N > L - \varepsilon$, 从而对于 $\forall n \geq N$ 都有

$$L - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq L, \quad (4.79)$$

即

$$|x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.80)$$

这表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$. □

定理 4.5 (Euler). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在 (记为 e).

证明. 记 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- $\{x_n\}$ 有上界,

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} < 3 \end{aligned} \quad (4.81)$$

- $\{x_n\}$ 递增,

$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{n \uparrow} \cdot 1} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}. \quad (4.82)$$

所以我们得到了

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \quad (4.83)$$

由单调极限定理可知, 极限存在, 称为自然常熟 e .

□

命题 4.2. 令 $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$

证明. 注意到 $\{y_n\}$ 递增且有上界, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 记为 Y .

由上例可知,

$$x_n \leq y_n \quad (\forall n) \implies e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y. \quad (4.84)$$

最后来证 $Y \leq e$. 我们固定一个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 对于 $\forall n \geq k$, 有

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\geq 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \cdots + C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \binom{n}{1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

利用极限不等式可知,

$$\begin{aligned} e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} \frac{n}{n} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k. \end{aligned} \quad (4.86)$$

之后再取极限可知

$$e \geq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = Y. \quad (4.87)$$

□

定理 4.6. e 不是有理数.

证明. 我们需要使用一个引理.

引理 4.2. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$0 < e - y_n < \frac{2}{(n+1)!}. \quad (4.88)$$

证明. 一方面, $\forall m \geq n+1$, 有

$$y_m \geq y_{n+1}. \quad (4.89)$$

由极限不等式可知 $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m \geq y_{n+1}$, 从而

$$e \geq y_{n+1} > y_n \quad (4.90)$$

另一方面, $\forall m > n + 3$, 有

$$y_m - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \quad (4.91)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \right] \quad (4.92)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \quad (4.93)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{2}{n+2} \right) \quad (4.94)$$

$$\leq \frac{2}{(n+1)!}. \quad (4.95)$$

所以

$$e - y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m - y_n) < \frac{2}{(n+1)!}. \quad (4.96)$$

□

对于定理4.6的证明, 我们采用反证法.

设 $e \in \mathbb{Q}$, $e = \frac{A}{B}$, 其中 $A, B \in \mathbb{Z}_+$. 由引理,

$$0 < e - y_2 < \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \quad (4.97)$$

这表明 $e \notin \mathbb{Z} \implies B \geq 2$.

再次使用引理, 有

$$0 < e - y_B < \frac{2}{(B+1)!}, \quad (4.98)$$

而

$$e - y_B = \frac{A}{B} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{B!} \right) \xrightarrow{\text{通分}} \frac{\text{整数}C}{B!}. \quad (4.99)$$

代回(4.98)可知

$$0 < \frac{C}{B!} < \frac{2}{(B+1)!} = \frac{1}{B!} - \frac{2}{B+1} < \frac{1}{B!}, \quad (4.100)$$

这表明

$$0 < C < 1. \quad (4.101)$$

与 $C \in \mathbb{Z}$ 矛盾!

□

4.4 柯西收敛准则

单调极限定理 (MCT) 的适用范围太小, 只能用于单调数列, 我们需要一般的判据.

要证 $\{x_n\}$ 有极限 L , 我们需要证当 n 无穷大时 $|x_n - L| < \varepsilon$, 但是如果猜不出 L , 往往无用. 我们只能比较大指标的 $|x_n - x_m|$.

定理 4.7 (Cauchy 收敛原理). 实数列 $\{x_n\}$ 收敛, 当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n \text{ 都有 } |x_m - x_n| < \varepsilon. \quad (4.102)$$

定义 4.6. 称 $\{x_n\}$ 为一个 *Cauchy* 列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

这样, 定理 4.7 可以表述为 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 *Cauchy* 序列.

Cauchy 收敛原理的证明. 从充分性和必要性两方面来证明.

先证 “ \Rightarrow ”:

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\forall m, n > N \text{ 有 } |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.103)$$

从而由三角不等式可得, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

再证 “ \Leftarrow ”:

首先 $\{x_n\}$ 有界, 因为对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别地, 有 $|x_n - x_{N+1}| < 1$. 于是我们得到

$$\min\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\}. \quad (4.104)$$

这表明 $\{x_n\}$ 有界.

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 集合 $\{x_n : n \geq k\}$ 非空且有界, 有确界定理可知上确界和下确界都存在, 记

$$a_k = \inf\{x_k : k \geq n\} \quad (4.105)$$

$$b_k = \sup\{x_k : k \geq n\} \quad (4.106)$$

注意到 $\{a_k\}$ 递增, $\{b_k\}$ 递减⁴, 特别地,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k \leq b_{k-1} \leq \cdots \leq b_1. \quad (4.107)$$

这表明 $\{a_k\}$ 递增且有上界 b_1 , $\{b_k\}$ 递减且有下界 a_1 . 由 MCT 知这两个数列的极限都存在, 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B$. 并且有 $A \leq B$.

⁴因为若 $F \subset E$ 则 $\inf F \geq \inf E$, $\sup F \leq \sup E$.

由 Cauchy 列的定义可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall m, n \geq k$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
所以, $\forall N \geq k, \varepsilon$ 是集合 $\{x_m - x_n | \forall m, n \geq N\}$ 的上界, 我们可以得到

$$\varepsilon \geq \sup\{x_m - x_n | \forall m, n \geq N\} = b_N - a_N, \forall N \geq k. \quad (4.108)$$

取极限, 得到极限不等式

$$\varepsilon \geq \lim_{N \rightarrow \infty} (b_N - a_N) = B - A. \quad (4.109)$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $B - A \leq \varepsilon$, 又因为 $B \geq A$, 我们发现 $A = B \equiv L$.

最后由于 $a_k \leq x_k \leq b_k, \forall k$, 由夹逼定理可得 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L . \square

从以上证明中可以提炼出上下极限的概念.⁵

定义 4.7. 对于任何实数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 考虑 $b_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ (若 $\{x_k : k \geq n\}$ 有上界, 则可定义 $b_n \in \mathbb{R}$, 若无上界, 则形式化定义 $b_n = +\infty$.)

- 若所有 $b_n = +\infty$, 记 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- 若 $\exists b_n \in \mathbb{R}$, 则所有 $b_n \in \mathbb{R}$, 且 $\{b_n\}$ 递减. 这有两种情况.

1. 若 $\{b_n\}$ 有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 称其值为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup\{x_k : k \geq n\} \right) \in \mathbb{R}. \quad (4.110)$$

2. 若 $\{b_n\}$ 无下界, 约定

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty. \quad (4.111)$$

总结起来, 上下极限的定义为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup(\{x_k : k \geq n\}), \quad (4.112)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf(\{x_k : k \geq n\}). \quad (4.113)$$

命题 4.3. $\{x_n\}$ 收敛等价于上下极限存在且相等.

例 4.11 (来自以后极限收敛的例子). 考虑

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k^2}, \quad (4.114)$$

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

⁵以后幂级数收敛半径 Cauchy-Hadamand 公式涉及上极限.

证明. 用 Cauchy 收敛原理验证, 只要证 x_n 是一个 Cauchy 列.

为此对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 从而 $\forall m > n \geq N$, 有

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin(k\theta)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (4.115)$$

□

4.5 度量空间

4.5.1 基本概念

定义 4.8. 所谓集合 X 上的一个度量, 是指映射

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d((x, y)) \end{aligned} \quad (4.116)$$

需要满足

- 对称性 $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- 正定性 $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$, 且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- 三角不等式 $\forall x, y, z \in X$ 有 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

称 (X, d) 为一个度量空间.

例 4.12. 对于 $X = \mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}. \quad (4.117)$$

多元微积分中使用此度量.

定义 4.9. 称 $\{x_n\}$ 收敛到某点 $L \in X$ (记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$), 若

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n > N \text{ 有 } d(x_n, L) < \varepsilon, \quad (4.118)$$

这等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, L) = 0. \quad (4.119)$$

定义 4.10. 称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为一个 Cauchy 列, 若

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall m, n \geq N \text{ 有 } d(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (4.120)$$

定义 4.11. 称一个度量空间 (X, d) 是完备的 (*complete*), 如果 X 中的任何 *Cauchy* 列都收敛 (到 X 中的某点).

例 4.13. $(\mathbb{R}^n, d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2})$ 是完备的度量空间.

例 4.14. $(\mathbb{Q}, d(x, y) = |x - y|)$ 是不完备的.

理由 取一个有理数序列 $\{x_n \in \mathbb{Q}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$. $\{x_n\}$ 是 *Cauchy* 列, 但 $\{x_n\}$ 在 \mathbb{Q} 中无极限.

4.5.2 实数的另一种定义

我们用 *Cauchy* 列可以给出 \mathbb{R} 的另一个定义.

定义 4.12. 一个实数为 "有理数 *Cauchy* 列的等价类".

定义 4.13. 两个 \mathbb{Q} 中的 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 等价, 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } |x_n - y_n| < \varepsilon. \quad (4.121)$$

定理 4.8 (压缩映射定理). 设 (X, d) 是完备的度量空间, 设 $T: X \rightarrow X$ 是压缩映射 (即 $\exists c \in (0, 1)$ 使 $\forall x, y \in X$ 有 $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$), 则 T 有唯一的不动点.

证明. 任取 $x_0 \in X$, 定义 $x_n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \uparrow T}(x_0) = T(x_{n-1})$.

- 断言 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 *Cauchy* 列. 为此, $\forall m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) \underset{\text{压缩}}{\leq} c^n d(x_0, x_{m-n}) \\ &\underset{\text{三角不等式}}{\leq} c^n (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \\ &= c^n \frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} d(x_0, x_1) \\ &< \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, x_1) < \frac{c^N}{1 - c} d(x_0, x_1) \\ &< \varepsilon \quad (\text{只要 } N \text{ 足够大}) \end{aligned} \quad (4.122)$$

- 由 (X, d) 完备可知, 前述 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_0$, 来证 y_0 是 T 的不动点.

证明. 考虑不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(T(y), x_n) = d(T(y), T(x_{n-1})) \\ &\leq c \cdot d(T(y), x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.123)$$

由夹逼定理知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(y), x_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = T(y). \quad (4.124)$$

结合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y, \quad (4.125)$$

可得

$$T(y) = y. \quad (4.126)$$

□

- T 的不动点唯一.

证明. 设 $T(y) = y$, $T(z) = z$, 则

$$d(y, z) = d(T(y), T(z)) \leq c \cdot d(y, z) \implies y = z. \quad (4.127)$$

□

结合起来, T 有不动点且不动点唯一. □

5 函数极限

定义 5.1. 称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow L$ (记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$), 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta \text{ 时有 } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

这个定义并不要求 $f(x_0)$ 的行为, $f(x_0)$ 甚至可以无定义.

我们引入记号: 开球邻域 $B_r(x_0) = \{x | d(x, x_0) < r\}$, 去心开球邻域 $B_r^*(x_0) = B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$.

定义 5.2. 如果 f 在 x_0 的某个去心邻域有定义, 称当 $x \rightarrow x_0$ 时, f 以 L 为极限 (记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$) 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ 使得 } \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 都有 } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

这个定义使用了 $\varepsilon - \delta$ 语言.

$x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 L 为极限

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta \text{ 有 } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不以 L 为极限

$$\iff \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, \exists |x - x_0| < \delta \text{ 有 } |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

定义 5.3. 左极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0 \text{ 有 } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.3)$$

右极限, 正负无穷极限同理.

命题 5.1. f 在 x_0 处有极限等价于 f 在 x_0 的左右极限存在且相等.

证明. 证明是直接的. □

类似地, 引入符号

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (5.4)$$

我们会想问, 函数极限和序列极限有什么关系?

定理 5.1 (Heine). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 的充要条件为, 对于任何的以 x_0 为极限且项项不等于 x_0 的序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

证明. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

为此用反证法, 假设 f 不以 L 为极限, 即

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, \exists 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 使 } |f(x) - L| \geq \varepsilon. \quad (5.5)$$

(这包含无穷个断言, 因为每一个 δ 给出一个 x .) 这样 $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \delta = \frac{1}{n} \exists x$ (记为 x_n) 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. □