第一次作业

mny

2023 年 9 月 20 日

1 Path Integral without $\int \mathrm{d}p$

标准的路径积分

$$
\begin{aligned}
\langle x_N | \, U(t_N, t_0) \, | x_0 \rangle &= \left(\prod_{n=1}^{N-1} \int \frac{\mathrm{d}p_{n+\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x_n}{2\pi\hbar} \right) \int \frac{\mathrm{d}p_{\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \\
\times \exp &\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_{n+\frac{1}{2}} (x_{n+1} - x_n) - \delta t \frac{H(p_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+1}, t_{n+\frac{1}{2}}) + H(\cdots, x_n, \cdots)}{2} \right] \right),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

其中动量的部分是高斯型的, 我们把它写出来

$$
\prod_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\mathrm{d}p_{n+\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left[p_{n+\frac{1}{2}} \delta x_n - \delta t \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{V(x_{n+1} + V(x_n))}{2} \right) \right] \right) \right]. \tag{1.2}
$$

应用高斯积分公式

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}. \tag{1.3}
$$

对应到这里,

$$
\begin{cases} a = \frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar} \frac{1}{2m} \\ b = \frac{\mathrm{i}\delta x_n}{\hbar} \end{cases} \tag{1.4}
$$

于是(1.2)的结果为

$$
\prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{\mathrm{i}\delta t}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\delta x_n)^2 m}{2\hbar\delta t}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta t \frac{V(x_{n+1}+V(x_n))}{2}} \tag{1.5}
$$

路径积分去掉动量之后的结果为

$$
\langle x_N | \, U(t_N, t_0) \, | x_0 \rangle = \left(\prod_{n=1}^{N-1} \mathrm{d}x_n \right) \left(\prod_{n=0}^{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\delta t}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\delta x_n}{\delta t} \right)^2 - \frac{V(x_{n+1})+V(x_n)}{2} \right]} \right) \tag{1.6}
$$

也可以写成紧致的形式

$$\langle x_N |\, U(t_N, t_0)\, | x_0 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t}} \prod_{n=1}^{N-1} \left(\mathrm{d}x_n \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t}} \right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t\, L} \tag{1.7}$$

对于相对论性的哈密顿量