

# 高等微积分笔记

mny

2023 年 9 月 28 日

## 目录

<b>1</b>	<b>微积分简介</b>	<b>1</b>
1.1	阿基米德时代 . . . . .	1
1.2	Newton 时代 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>集合与映射</b>	<b>3</b>
2.1	映射的性质 . . . . .	4
2.2	范畴中的映射 . . . . .	4
<b>3</b>	<b>实数</b>	<b>7</b>
3.1	戴德金分割 . . . . .	7
3.2	确界定理 . . . . .	8
3.3	确界定理应用 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>极限理论</b>	<b>11</b>
4.1	极限的性质 . . . . .	13
4.2	极限的计算方法 . . . . .	15
4.2.1	从定义直接计算 . . . . .	15
4.2.2	极限的四则运算 . . . . .	16

## 1 微积分简介

### 1.1 阿基米德时代

问题: 设  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h(x)\}$  求曲边梯形  $D$  的面积  $\text{area}(D)$ .

特例:  $a = 0$ , 剖分  $D = \bigcup D_i$ , 分点  $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算  $\text{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})h(\xi_i)$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i) h(\xi) \quad (1.1)$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1.  $h(x) = x^2$

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} h(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (1.2)$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad (1.3)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.4)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \stackrel{\text{记为}}{=} x_n \quad (1.5)$$

研究: 当  $n$  越大时,  $x_n$  最终会靠近哪个常值  $L$

例 1.2.  $h(x) = x^k$ , ( $k \geq 2$ ) 相应的

$$\text{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k \quad (1.6)$$

更接近哪个数  $L$ ? 对于更一般  $h$ , 以上计算更加复杂.

## 1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数  $S(a)$ , 如何求高度?

$x$  流动到  $x + o$ ,

$$S(x + o) - S(x) \simeq o \cdot h(x) \quad (1.7)$$

$$\implies h(x) \simeq \frac{S(x + o) - S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) \quad (1.8)$$

相信当  $o$  越接近零, 此近似越好.

例 1.3.  $S(a) = a^m$ ,  $(m \in \mathbb{Z}_+)$

$$\implies h(x) \simeq \frac{(x+o)^m - x^m}{o} \quad (1.9)$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \cdots + C_m^m y^m \quad (1.10)$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xrightarrow{\text{令 } o \text{ 等于零}} mx^{m-1} \quad (1.11)$$

由此可知, 例1.2 答案为  $S(a) = \frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分  $S(b) = \int_0^b h(x) dx$
- 从面积函数得到高度函数称作求导  $h(x) = S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left( \int_0^x h(\xi) d\xi \right)' = h(x) \quad (1.12)$$

和

$$\int_0^b S'(x) dx = S(b) - S(0) \quad (1.13)$$

## 2 集合与映射

定义 2.1. 设  $X, Y$  是集合, 所谓  $X$  到  $Y$  的一个映射是指如下的数据

对于  $X$  中的每一个元素  $x$ , 指定  $Y$  中唯一的元素 (记为  $f(x)$ ) 与之对应. 记此映射为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.1)$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称  $X$  为  $f$  的定义域 *domain*,  $Y$  为  $f$  的陪域 *co-domain*.

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A) = \{y \in Y | \exists a \in A \text{ 使 } y = f(a)\} \quad (2.2)$$

称之为  $A$  在  $f$  下的像集. 特别的, 称  $f(X) = \text{Im}(f)$  为  $f$  的值域或像集.

定义 2.2. 原像集. 对  $V \subseteq Y$ , 定义在  $f$  下的原像集

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} = \bigcup_{y \in V} F_y \quad (2.3)$$

对于  $V$  的补集  $V^c$  显然有,

$$f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c \quad (2.4)$$

显然有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad (2.5)$$

## 2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ , 可定义复合映射  $g \circ f: X \rightarrow Z$ ,

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X \quad (2.6)$$

- 映射的复合满足结合律. 设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$ , 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.7)$$

证明是直接的.

- 对于集合  $X$  有一个恒同映射,  $\text{id}_X: X \rightarrow X$ , 定义为  $\text{Id}_X(x) = x$ ,  $\forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即  $\forall f: X \rightarrow Y$  有

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X \quad (2.8)$$

对于两个集合  $X, Y$ , 存在一个集合

$$\text{Hom}(X, Y) = \{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\} \quad (2.9)$$

## 2.2 范畴中的映射

定义 2.3. 所谓一个范畴 (Category)  $\mathcal{C}$  是指如下一个数据:

- 对象  $X, Y, Z^1$ , 构成 *object*  $\text{Obj}(\mathcal{C})$
- 对任何  $X, Y \in \mathcal{C}$ , 指定一个集合  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , 称  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$  中的任意元素为范畴  $\mathcal{C}$  中的一个态射 (*morphism*), 记  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$  中的元素为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.10)$$

- 态射可复合, 即  $\forall X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 指定出映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.11)$$

记为

$$(f, g) \rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.12)$$

---

<sup>1</sup>在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合是结合的, 即  $\forall X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 设

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), \quad (2.13)$$

有 (结合律)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.14)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \quad (2.15)$$

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 指定态射

$$\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \quad (2.16)$$

满足, 对  $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ , 有

$$f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_X \circ g = g \quad (2.17)$$

**例 2.1.** 范畴  $\text{Set}$ , 其中的对象是集合  $X, Y$ , 此时

- 态射  $\longleftrightarrow$  映射

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y) = \{\text{映射 } f: X \rightarrow Y\} \quad (2.18)$$

- 态射复合  $\longleftrightarrow$  映射复合

- $\text{id}_X =$  恒同映射

**例 2.2.** 向量空间  $\text{Vect}$ : 对象是线性空间, 态射是线性映射.

**例 2.3.** 拓扑空间  $\text{Top}$ : 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

**定义 2.4** (集合论中). 称映射  $f: x \rightarrow y$  是

- 单射  $\iff \forall x \neq x', \text{ 有 } f(x) \neq f(x')$ .
- 满射  $\iff \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ 使 } f(x) = y$ .
- 双射  $\iff$  既单又满.

**定义 2.5.** 称映射  $f: X \rightarrow Y$  是

- 单射

$$\iff \exists \text{ 映射 } g: Y \rightarrow X, \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \quad (\text{只在集合当中适用}) \quad (2.19)$$

一般的范畴中:

$$\iff \forall \text{ 集合 } W, \forall \text{ 映射 } g_1, g_2: W \rightarrow X, \text{ 若 } f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{ 则有 } g_1 = g_2 \quad (2.20)$$

• 满射

$$\iff \forall \text{集合 } Z, \forall \text{映射 } h_1, h_2: Y \rightarrow Z. \text{ 若有 } h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{ 则有 } h_1 = h_2 \quad (2.21)$$

**定理 2.1.** 映射  $f: X \rightarrow Y$  是双射  $\iff \exists$  映射  $g: Y \rightarrow X$  使  $g \circ f = \text{id}_X$  且  $f \circ g = \text{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

“ $\implies$ ”:

由  $f$  满知  $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ .

由  $f$  单知  $f^{-1}(\{y\})$  至多一个元素.

于是  $\forall y \in Y$  有  $f^{-1}(\{y\})$  是单元集. 记  $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$ , 得到映射  $g$ .

“ $\impliedby$ ”:

设  $\exists g: Y \rightarrow X$  使

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.22)$$

证  $f$  单: 若  $f(x) = f(x')$ , 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \quad (2.23)$$

即

$$x = x' \quad (2.24)$$

矛盾, 故  $f$  单.

证  $f$  满:

$$\forall y \in Y, \quad f[g(y)] = f \circ g(y) = \text{id}_Y(y) = y \quad (2.25)$$

所以  $y \in \text{Im } f$ , 故  $f$  满.

□

**定义 2.6.** 在范畴  $\mathcal{C}$  中, 称态射  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  为一个同构, 如果

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad (2.26)$$

使得

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{且} \quad f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.27)$$

称对象  $X$  与对象  $Y$  同构, 如果  $\exists$  同构态射  $f: X \rightarrow Y$ .

**命题 2.1.** 满足(2.27)的  $g$  至多一个.

证明. 若  $g_1, g_2: Y \rightarrow X$  都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1. \quad (2.28)$$

□

### 3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数  $0, 1, 2, 3, \dots$

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \quad (3.1)$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s, t) | s \in S, t \in T\} \quad (3.2)$$

引入了乘法.

加法在  $\mathbb{N}$  上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为  $\mathbb{Z}$ . 但  $\mathbb{Z}$  上乘法未必有逆, 形式化引入分数  $\frac{m}{n}$ , ( $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+$ ), 将  $\mathbb{Z}$  扩充为  $\mathbb{Q}$ <sup>2</sup>.

**命题 3.1.**  $\sqrt{2}$  不是有理数 (定义  $\sqrt{2}$  是满足  $x^2 = 2$  的正数).

证明. 假设  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ,  $m, n$  无公因子. 则  $2 = \frac{m^2}{n^2}$ .

$m^2 = 2n^2$  说明  $m$  是偶数, 代回发现  $n$  是偶数. □

这表明有理数集  $\mathbb{Q}$  需要进一步扩充.

**命题 3.2.**  $x$  是有理数  $\iff x$  是有限或无限循环小数.<sup>3</sup>

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

#### 3.1 戴德金分割

**定义 3.1.** 所谓戴德金分隔是指一个有序对  $(A, B)$ , 满足:

- $A, B$  是  $\mathbb{Q}$  的非空子集.
- $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $\forall x \in A, \forall y \in B$ , 有  $x < y$
- 集合  $A$  无最大元素.

---

<sup>2</sup>这些“逆”都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x) dx = \{ \text{所有 } F(x) | F' = f \}. \quad (3.3)$$

<sup>3</sup>小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

称两个戴德金分割  $(A, B) = (A', B') \iff A = A'$ .

**定义 3.2.** 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D = \{\text{所有戴德金分割}\} \quad (3.4)$$

- 每个有理数  $a$  确定一个戴德金分割

$$(A_a, B_a), \text{ 其中 } A_a = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq a\} \quad (3.5)$$

- 序.

定义  $(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$

- 和.

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', \mathbb{Q}/(A + A')) \quad (3.6)$$

- 称一个戴德金实数  $(A, B)$  为一个戴德金有理数  $\iff A$  有最大元素.

以上定义好实数集  $\mathbb{R}$ , 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

### 3.2 确界定理

**定义 3.3.** 设非空集合  $E \in \mathbb{R}$ , 称  $E$  的元素  $a$  为  $E$  的最大元素, 如果  $\forall x \in E, x \leq a$ , 记为  $a = \max E$

最小元素:  $a = \min E \iff a \in E$  且  $\forall x \in E$  有  $x \geq a$

**定义 3.4.** 上界和下界.

称  $c$  为  $E$  的一个上界, 如果  $\forall x \in E$  有  $x \leq c$ .

称  $d$  为  $E$  的一个下界, 如果  $\forall x \in E$  有  $x \geq d$ .

**定义 3.5.** 确界.

称  $c$  是  $E$  的上确界 (*supremum*), 记作  $c = \sup E$ , 如果  $c$  是  $E$  的最小的上界.

$\iff c = \min\{E \text{ 的上界}\}$

称  $d$  是  $E$  的下确界 (*infimum*), 记作  $d = \inf E$ , 如果  $d$  是  $E$  的最大的下界.

$\iff d = \max\{E \text{ 的下界}\}$

**命题 3.3.** 任意非空实数集  $F$ ,  $\min F, \max F$  未必存在.

**例 3.1.**  $F = (0, 1)$ , 则  $\min F, \max F$  皆不存在.



证明. 因为

$$\forall a \in F \implies \frac{a}{2} \in F \implies a \text{不是最小元素}, \quad (3.7)$$

$$\forall b \in F \implies \frac{b+1}{2} \in F \implies b \text{不是最大元素}. \quad (3.8)$$

□

这样, 从字面上有

- 若  $E$  无上界, 则  $E$  无上确界.
- 若  $E$  有上界,  $\{E \text{ 上界}\}$  非空, 是否有最小元素需要证明.

**定理 3.1** (确界定理). 有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E = \{x_\alpha = \text{戴德金分割 } (A_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in \text{指标集 } \Lambda\} \quad (3.9)$$

已知  $E$  有上界  $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B})$ ,  $(\tilde{A} \subsetneq \mathbb{Q})$ .

由  $\forall \alpha, \tilde{c} \geq x_\alpha$ , 根据定义有

$$\forall \alpha, \tilde{A} \supseteq A_\alpha \implies \tilde{A} \supseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \xrightarrow{\text{定义为}} \{y | \exists \alpha \in \Lambda \text{ 使 } y \in A_\alpha\} \quad (3.10)$$

令  $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$  ( $A$  必是  $\mathbb{Q}$  的非空真子集).

考虑  $(A, B = \mathbb{Q}/A)$ , 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

$$\forall x \in A, \exists \alpha \text{ 使 } x \in A_\alpha \quad (3.11)$$

而且

$$B = \left(\bigcup A_\alpha\right)^C = \bigcap A_\alpha^C = \bigcap B_\alpha \implies \forall y \in B, \forall \alpha, y \in B_\alpha \quad (3.12)$$

即我们可以找到一个  $\alpha$ ,

$$x \in A_\alpha, y \in B_\alpha \implies x < y. \quad (3.13)$$

- 定义中的第四条: 要证  $A$  中无最大元, 采用反证法.

若  $A$  中有最大元, 记为  $z$ , 则

$$z \in A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \implies \exists \alpha \text{ 使 } z \in A_\alpha. \quad (3.14)$$

由于  $z$  是  $A$  最大元, 并且  $A_\alpha \subseteq A$ ,  $z$  也是  $A_\alpha$  最大元, 矛盾.

这样  $y = (A, B) = (\bigcup_{\alpha} A, \bigcup_{\alpha} B)$  是一个戴德金实数, 我们可以断言  $y = \sup E$ , 分为两部分内容:

- $y$  是  $E$  上界  $\iff y \geq x_{\alpha} \iff A \supseteq A_{\alpha}, \forall \alpha$  显然成立.
- $y \leq E$  的任何上界  $z \stackrel{\text{记为}}{=} (A_0, B_0)$ , 由  $z$  是上界可知,

$$\forall \alpha, A_0 \supseteq A_{\alpha} \implies A \supseteq \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = A \implies z > y. \quad (3.15)$$

□

**命题 3.4** (判断上确界).  $C = \sup E$  等价于下列两点同时成立:

1.  $\forall x \in E$  有  $x \leq c$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E$  使  $x \geq c - \varepsilon$ .

**定义 3.6.** 称  $E$  是有界的, 如果  $E$  既有上界又有下界.  $\iff \exists k > 0$  使  $\forall x \in E$  有  $|x| \leq k$

**例 3.2.** 设  $E$  是有界的非空实数集, 则

$$\sup\{x - y | x, y \in E\} = \sup E - \inf E. \quad (3.16)$$

证明. 记  $F = \{x - y | x, y \in E\}$ , 可知  $F$  非空有界.

由确界定理知,  $\sup F, \sup E, \inf E$  皆存在, 有

- $\sup E - \inf E$  是  $F$  的上界, 因为  $\forall x, y \in E$ , 有  $x \leq \sup E, y \geq \inf E$ , 所以

$$x - y \leq \sup E - \inf E. \quad (3.17)$$

说明  $\sup E - \inf E$  不小于  $F$  的任何成员, 是上界.

- 对于  $\forall \varepsilon > 0, \sup E - \frac{\varepsilon}{2}$  不是  $E$  上界,  $\inf E + \frac{\varepsilon}{2}$  不是  $E$  下界.

$$\exists x, y \in E, x - y > \sup E - \inf E - \varepsilon \quad (3.18)$$

说明  $\forall \varepsilon > 0, \sup E - \inf E - \varepsilon$  不是  $F$  上界.

所以  $\sup E - \inf E = \sup F$ .

□

### 3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

**命题 3.5.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}$  使  $x < n$ .

证明. 反证法. 假设结论不对, 则  $x \geq n, \forall n \in \mathbb{Z}$ , 即  $x$  是  $\mathbb{Z}$  的一个上界. 这说明  $\mathbb{Z}$  非空且有上界.

由确界定理知,  $\sup \mathbb{Z}$  存在, 记  $M \equiv \sup \mathbb{Z}$ , 那么

$$n+1 \in \mathbb{Z} \implies n+1 \leq M \implies n \leq M-1. \quad (3.19)$$

这与  $M = \sup \mathbb{Z}$  矛盾. □

**命题 3.6.** 任何两个实数  $a < b$  之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数  $\frac{m}{n} \in (a, b)$

对于  $x = \frac{1}{b-a}$ , 由命题3.5结论可知,

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n > \frac{1}{b-a}. \quad (3.20)$$

对于  $y = nb$ , 由命题3.5的结论可知,  $m_1 \in \mathbb{Z}, m_1 > y$ , 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \quad (3.21)$$

对于  $z = -na$ , 由命题3.5的结论可知,  $\exists m \in \mathbb{Z}, m > -na$ , 记  $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$ , 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \quad (3.22)$$

这样总能找到整数  $m_0, m_1$  使  $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$ . 于是在  $m_0$  和  $m_1$  之间总有一个  $m$  满足  $a < \frac{m}{n} < b$ . □

## 4 极限理论

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑  $n$  越来越大的时候,  $x_n$  是否趋近于某个值  $L$ . 我们需要定义越来越接近这个概念.

**定义 4.1.** 所谓一个无穷序列, 是指一个映射  $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$ , 记为

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \quad (4.1)$$

称  $x_n$  为其第  $n$  项.

**定义 4.2.** 称数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  以  $L$  为极限 (*limit*), (记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ ) 如果对于任何  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $n \in \mathbb{Z}_+$  使得  $\forall n > N$  总有  $|x_n - L| < \varepsilon$ .

也称当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  趋于  $L$ .

这种定义称为  $\varepsilon - N$  语言.

“ $\{x_n\}$  以  $L$  为极限”可以表示为

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N \text{ 有 } |x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

“ $\{x_n\}$  不以  $L$  为极限”可以表示为

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \leq N \text{ 使 } |x_n - L| \geq \varepsilon. \quad (4.3)$$

**定义 4.3.** 称  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  是收敛的, 如果  $\exists$  实数  $L$ , 使  $\{x_n\}$  以  $L$  为极限. 否则, 称  $\{x_n\}$  发散.

“ $\{x_n\}$  收敛”可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, \text{ 有 } |x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

“ $\{x_n\}$  发散”可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{ 使 } |x_n - L| \geq \varepsilon. \quad (4.5)$$

**例 4.1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

证明.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取正整数  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , 则  $\forall n \geq N$  有

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (4.6)$$

□

**例 4.2.** 设  $a > 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$ .

**解** 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ . 为此,  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , 则对  $\forall n \geq N$  都有

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + N\varepsilon > a. \quad (4.7)$$

从而

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}. \quad (4.8)$$

可以得到

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon, \quad (4.9)$$

验证了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (4.10)$$

总结  $\forall a > 0$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

例 4.3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

证明.  $\forall \varepsilon > 0$  取  $N$  使  $\frac{N-1}{2}\varepsilon^2 > 1$ , 则对于  $\forall n \geq N$  有

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + C_n^1 \varepsilon + C_n^2 \varepsilon^2 + \cdots \geq C_n^2 \varepsilon^2. \quad (4.11)$$

$$\geq \frac{(n+1)n}{2} \varepsilon^2 \quad (4.12)$$

$$\geq \frac{N+1}{2} \varepsilon^2 n > 1 \cdot n \quad (4.13)$$

从而  $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ , 得到

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon. \quad (4.14)$$

□

## 4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式). 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 则  $\exists N \in \mathbb{Z}_+$  使  $\forall n \geq N$  有  $a_n < b_n$ .

证明. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 取  $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$ .

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  定义知

$$\exists N_1 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_1 \text{ 有 } |a_n - A| < \varepsilon. \quad (4.15)$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  定义知

$$\exists N_2 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_2 \text{ 有 } |b_n - B| < \varepsilon. \quad (4.16)$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则  $\forall n \geq N$  有

$$a_n < A + \varepsilon = B - \varepsilon < b_n. \quad (4.17)$$

□

推论 设  $\{a_n\}$  是正数列, 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

证明. 取  $q < r < 1$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} r. \quad (4.18)$$

由命题4.1可知,  $\exists N \in \mathbb{Z}_+$  使  $\forall n \geq N$  有  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ .

从而,  $\forall n > N$ , 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \quad (4.19)$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \quad (4.20)$$

由于  $\frac{1}{r} > 1$ , 记  $\frac{1}{r} = 1 + c, (c > 0)$ . 这样, 取  $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$ , 对于  $\forall n \geq N_0$ , 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \quad (4.21)$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \quad (4.22)$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \quad (4.23)$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1 \text{ 或 } r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

**推论** 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设  $\{a_n\}$  既以  $A$  为极限, 又以  $B$  为极限, 且  $a < B$ , 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (4.25)$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 满足 } a_n > a_n, \quad (4.26)$$

矛盾!

□

**推论** 收敛的数列一定有界.

**定义 4.4.** 称数列有上界, 若  $\exists M$  使  $\forall n, a_n \leq M$ . 称数列有下界, 若  $\exists K$  使  $\forall n, a_n \geq K$ .

证明. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L < L + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} L + 1$ , 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } x_n < L + 1. \quad (4.27)$$

所以

$$x_n \leq \max \{x_1, \dots, x_N, L + 1\}. \quad (4.28)$$

故有上界, 下界同理.  $\square$

**推论 (极限不等式)** 设  $a_n \leq b_n, \forall n \geq N_0$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

证明. 反证法. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 由命题4.1可知,  $\exists n \geq N$  有  $a_n > b_n$ , 矛盾!  $\square$

**注意!**  $\leq$  可过渡给极限式, 但  $<$  不一定能.

**例 4.4.**  $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

## 4.2 极限的计算方法

### 4.2.1 从定义直接计算

**例 4.5.** 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \text{当 } q > 1 \text{ 时}. \quad (4.29)$$

**证法一**

证明. 记  $x_n = \frac{n^k}{q^n}$ , 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k q^n}{q^{n+1} n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \dots \frac{n+1}{n}}_{k \text{ 个}} \cdot \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} < 1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

由命题4.1知  $\lim x_n = 0$ .  $\square$

## 证法二 (从定义验证)

证明. 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N \geq \max \left\{ 2k, \frac{(k+1)!2^k}{a^{k+1}\varepsilon} \right\}$ .  $\forall n \geq N$  有 (记  $q = 1 + a$ ,  $a > 0$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{n^k}{q^n} &= \frac{n^k}{(1+a)^n} \leq \frac{n^k}{C_n^{k+1} a^{k+1}} \\
 &= \frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)a^{k+1}} \\
 &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \frac{1}{n} \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{n-k} \\
 &< \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \frac{1}{n} 2 \cdot 2 \cdots 2 \\
 &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} 2^k \frac{1}{n} \leq \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} 2^k \frac{1}{N} < \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

□

## 4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设  $\lim a_n = A$ ,  $\lim b_n = B$ , 则

$$\lim(a_n + b_n) = A + B \tag{4.32}$$

$$\lim(a_n - b_n) = A - B \tag{4.33}$$

$$\lim a_n b_n = AB \tag{4.34}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (\text{分母不为零}) \tag{4.35}$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{4.36}$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何  $\varepsilon > 0$ ,

$$|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \tag{4.37}$$

由  $\{b_n\}$  收敛知其有界, 即  $\exists M$  使  $|b_n| \leq M, \forall n$ .

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  知  $\exists N_1 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_1$  有  $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$ .

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  知  $\exists N_2 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_2$  有  $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ .



从而, 令  $N = \max \{N_1, N_2\}$ , 对  $n \geq N$ , 代回(4.37)得

$$|a_n b_n - AB| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |A| \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.38)$$

这证明了  $\lim a_n b_n = AB$ .

商

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} \right| = \left| \frac{(a_n - A)B + A(B - b_n)}{b_n B} \right| \quad (4.39)$$

$$\leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| |B|}. \quad (4.40)$$

由  $B \neq 0$ , 不妨设  $B > 0$ . 由命题4.1知  $\exists M \in \mathbb{Z}_+$  使  $\forall n \geq M$  有  $b_n > \frac{B}{2}$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  知  $\exists N_2, \forall n \geq N_2$  有  $|a_n - A| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{B}{2}$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  知  $\exists N_3, \forall n \geq N_3$  有  $|b_n - B| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

$\forall \varepsilon > 0$  取  $N = \max \{N_1, N_2, N_3\}$ , 对  $\forall n \geq N$  有 (代回(4.39))

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2} \frac{B}{2}}{\frac{B}{2}} + \frac{|A| \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2} B} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4.41)$$

□