线代笔记

mny

2023 年 9 月 25 日

目录

1 线性空间

线性空间 $\mathbb{R}^m$, m 是一个自然数.

$m = 1$ 时, 是实数. 有两个代数运算 $+$ 和 $*$, 有两个特殊元素 0 和 1.

1.1 实数中运算的性质

+ 满足的性质:

- 交换的, $a + b = b + a$
- 对于任意一个 a, 存在 b, 使得 $a + b = 0$, $b = -a$
  $\Longrightarrow$ 减法运算 $a - b = a + (-b)$

- 加法满足结合律 $a+(b+c)=(a+b)+c$

$*$ 满足的性质:

- 交换的 $a*b=b*a$
- 对于一个非 0 元素 a, 存在一个元素 b, 使得 $a*b=1$, $b=a^{-1}$
- 结合律 $a*(b*c)=(a*b)*c$

$+$ 和 $*$ 满足分配律: $a*(b+c)=a*b+a*c$

定义 1.1. $\mathbb{R}^m$ 中的元素为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, 其中 $a_1,\ldots a_m$ 为任意实数.

$\mathbb{R}^m$ 中的元素 $v=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 称为列向量. 有时一个元素表示为 $\begin{bmatrix} a_1, a_2, \cdots, a_m \end{bmatrix}$, 称作行向量.

$\mathbb{R}^m$ 上定义两个运算 $+$ 和 $*$(用列向量来表示)

定义 1.2. $+$ 加法: 任意两个列向量 a, b 得到一个新的列向量.

$$v+w=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

例 1.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

定义 1.3. $*$ 数乘: 任意一个实数 c, 以及一个列向量 v, 得到一个新的列向量 cv

$$cv=c\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_m \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

1.2 $(\mathbb{R}^m, +, *)$ 为一个线性空间

两种运算满足:

- 交换律 $v + w = w + v$
- 结合律 $c_1(c_2 v) = (c_1 c_2) v$
- 分配律 $c(v + w) = cv + cw$
- 通过加法可以定义减法运算 $v - w = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_m - b_m \end{bmatrix}$.
- 给定一组 $\mathbb{R}^m$ 中的向量, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$, 和一组实数 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可以构成新的向量

  $$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n \tag{1.3}$$

  这个新的向称为 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 的线性组合.

1.3 矩阵

定义 1.4. $m \times n$ 矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

a_{ij} 为实数

从线性空间的角度, 矩阵可以有下列的理解:

- 从矩阵列的角度, $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n \end{bmatrix}$
- 从矩阵行的角度, $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vdots \\ \vec{v}_m \end{bmatrix}$

固定 m 和 n, 矩阵空间上可以定义两个自然的运算

定义 1.5. 矩阵加法:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad (A+B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{1.5}$$

定义 1.6. 数乘, 任意一个实数 c, 一个矩阵 A, 得到

$$(cA)_{ij} = (ca_{ij}) \tag{1.6}$$

定义 1.7. 矩阵乘法.

定义: 矩阵乘法是把一个 $m \times n$ 矩阵乘上一个 $n \times k$ 矩阵, 得到一个 $m \times k$ 矩阵.

运算规则:

$$(C)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i_2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \tag{1.7}$$

矩阵乘法的性质:

- 结合律:

  $$(AB)\,C = A\,(BC) \tag{1.8}$$

  证明. 设 $A : m \times n, B : n \times k, C : k \times l$, 根据定义

  $$[(AB)C]_{ij} = \sum_{u=1}^{k} (AB)_{iu} C_{uj} = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n} a_{iv}b_{vu}c_{vj} \tag{1.9}$$

  同样

  $$[A(BC)]_{ij} = \sum_{v=1}^{n} A_{iv}(BC)_{vj} = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n} a_{iv}b_{vu}c_{vj} \tag{1.10}$$

  □

- 分配律:

  $$A\,(B+C) = AB + AC \tag{1.11}$$

  $$(A+B)\,C = AC + AB \tag{1.12}$$

- **矩阵乘法不满足交换律**

  $$AB \overset{\text{不一定}}{\neq} BA \tag{1.13}$$

  不论交换有没有定义, 都不一定相等.

矩阵乘法的几种理解:

- $C = AB$, C_{ij} 为把 A 的第 i 行和 B 的第 j 列乘起来.
- 从矩阵 A 的列向量的角度看
$$A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n \end{bmatrix} \tag{1.14}$$
那么 C 的第 j 列为 A 的列向量的线性组合, 组合系数为 B 的第 j 列,
$$b_{1j}\vec{v}_1 + b_{2j}\vec{v}_2 + \cdots + b_{nj}\vec{v}_n \tag{1.15}$$
- 从矩阵 B 的行向量来看
$$B = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_m \end{bmatrix} \tag{1.16}$$
矩阵 C 的第 i 行为 B 的行向量的线性组合, 组合系数为矩阵 A 的第 i 行.
$$a_{i1}\vec{w}_1 + a_{i2}\vec{w}_2 + \cdots + a_{in}\vec{w}_n \tag{1.17}$$

几种特殊矩阵:

- 方阵: 行和列数目一致, $n \times n$
- 零矩阵: 元素都为 0
- n 阶单位矩阵:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$
对角线全为 1
- 上三角矩阵:
$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

- 下三角矩阵:

$$\begin{bmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

1.4 矩阵的乘法的应用

对于 $n \times n$ 的方阵 A, 可以利用矩阵的乘法来定义它的逆矩阵 A^{-1}

定义 1.8. A^{-1} 称为 A 的逆矩阵, 如果 A^{-1} 满足

$$A^{-1}A = I_{n\times n}, 且 AA^{-1} = I_{n\times n}. \tag{1.21}$$

命题 1.1.

$$I_{n\times n}A = AI_{n\times n} = A \tag{1.22}$$

证明. 根据乘法的定义, 不难证明. □

1.4.1 逆矩阵的一些性质

命题 1.2. 一个矩阵的逆矩阵不一定存在

例 1.2. 非平凡的例子 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

证明. 假设存在 $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 那么 A^{-1} 满足

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

左侧

$$= \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_{2\times 2} \tag{1.24}$$

□

命题 1.3. 如果逆矩阵存在, 它是唯一的.

证明. 假设 A 有两个逆矩阵 B, C, 则

$$AB = BA = AC = CA = I_{n\times n} \tag{1.25}$$

所以

$$B = B(AC) = (BA)C = C. \tag{1.26}$$

□

命题 1.4. 若一个矩阵存在左逆 L, 满足 $LA = I_{n\times n}$, 那么矩阵 A 的逆矩阵存在, 且等于 L.[1]

命题 1.5. 如果 A 的逆为 A^{-1}, B 的逆为 B^{-1}, 则

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{1.27}$$

证明.

$$\begin{aligned}&(AB)B^{-1}A^{-1}\\&=A(BB^{-1})A^{-1}\\&=AA^{-1}\\&=I_{n\times n}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

证明也可以推广到一般情况. □

命题 1.6. 2×2 矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的逆矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

命题 1.7. 对角矩阵 $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ 的逆为

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

这意味着 D^{-1} 存在当且仅当对角元素都不为零!

[1]将在后面证明.

1.4.2 线性组合的矩阵乘法表示

线性组合

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n, \tag{1.31}$$

引入两个矩阵

$$A = \begin{bmatrix}\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

其中 A 为 $m \times n$ 矩阵, X 为 $n \times 1$ 矩阵. 线性组合的矩阵表示为 AX.

1.4.3 矩阵方程

方程为 $AX = b$. 这个方程的解的性质取决于 A 中的向量 $\begin{bmatrix}\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\end{bmatrix}$ 和向量 b 的关系.

我们把这个方程写成分量的形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{1.33}$$

采用高斯 (Gauss) 消元法. 引入三种变换, 这些变换都不改变方程的解.

- 把某一个方程乘上一个系数 a.
- 消元: 第 i 个方程 $+ a \times$ 第 j 个方程.
- 换行: 把第 i 行和第 j 行交换.

这三种称为矩阵的初等变换.

把第 2 个方程到第 m 个方程中的 x_1 消掉. 把第 i 个方程变为

$$\text{方程}(i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \times \text{方程}(1) \tag{1.34}$$

于是方程的增广矩阵变为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & a'_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a'_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{1.35}$$

1.4.4 矩阵的初等变换

下面我们要将初等变换用矩阵乘法来实现.

- 倍乘变换: 矩阵 A 的第 i 行乘上 c, 其他行不变, $S_i(c)A = A'$. $S_i(c)$ 为将单位矩阵的第 i 个元素换为 c.

$$S_i(c) = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

  $S_i^{-1}(c)$ 是可逆的

$$S_i^{-1}(c) = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

- 消元变换: 把第 i 行换成 第 i 行 $+ a \times$ 第 j 行. 它的形式为

$$E_{ij}(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & a & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

  其中的 a 位于 $E_{ij}(a)$ 的第 i 行第 j 列, 对角线元素都为 1.

  $E_{ij}(a)$ 是可逆的

$$E_{ij}^{-1}(a) = E_{ij}(-a) \tag{1.39}$$

- 换行变换: 把第 i 行和第 j 行交换. 用一个矩阵 $P_{ij} =$ (交换单位矩阵的 i, j 列) 来表示. 它是可逆的,

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}. \tag{1.40}$$

1.4.5 初等变换的应用

LU 分解 把方矩阵分解成下列形式

$$A = LU, \tag{1.41}$$

L 为下三角矩阵, U 为上三角矩阵. 方法: 通过初等变换, 把方矩阵变成一个上三角矩阵 (如果这个过程不涉及到换行的话) 那么有

$$E_1E_2\cdots E_nA=U \iff A=E_n^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}U \tag{1.42}$$

由于 $E_1,\cdots,E_n$ 都是下三角矩阵, 它们的乘积也是下三角矩阵.

例 1.3. 对矩阵 A 做 LU 分解.

$$A=\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\-3&5&1&0\\6&-4&0&-5\\-9&5&-5&12\end{bmatrix} \tag{1.43}$$

做操作

$$\begin{aligned}A&\xrightarrow{E_{41}(3)E_{31}(-2)E_{21}(1)}\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\0&-2&-1&2\\0&10&4&-9\\0&-16&-11&18\end{bmatrix}\\&\xrightarrow{E_{42}(-8)E_{32}(5)}\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\0&-2&-1&2\\0&0&-1&1\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\\&\xrightarrow{E_{43}(-3)}\begin{bmatrix}3&-7&-2&2\\0&-2&-1&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.44}$$

用矩阵乘法写起来

$$E_{42}(-3)E_{42}(-8)E_{32}(5)E_{41}(3)E_{31}(-2)E_{21}(1)A=U \tag{1.45}$$

即

$$L=E_{21}(-1)E_{31}(2)E_{41}(-3)E_{32}(-5)E_{42}(8)E_{43}(3) \tag{1.46}$$

计算可得

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\2&-5&1&0\\-3&8&3&1\end{bmatrix}. \tag{1.47}$$

如果 U 的对角线都不为零, 那么

$$U = DU', \quad (U'\text{对角线都为 } 1) \tag{1.48}$$

用初等变换求逆 (Gauss-Jordan) 原理: 先找到一组初等变换来使得矩阵 A 变为单位矩阵,

$$(E_p \cdots E_1)A = I. \tag{1.49}$$

A 的逆可以这样求解:

$$AB = I \tag{1.50}$$

在两边同时做行变换.

$$(E_p \cdots E_1)AB = (E_p \cdots E_1)I \tag{1.51}$$

即

$$B = IB = (E_p \cdots E_1)I \tag{1.52}$$

在实际操作时, 考虑增广矩阵 $[A|I]$, 做初等变换, 变为 $[I|A^{-1}]$

例 1.4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

做初等变换

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{E_{12}(\frac{2}{3})E_{23}(\frac{3}{4})E_{32}(\frac{2}{3})E_{21}(\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{S_3(\frac{3}{4})S_2(\frac{2}{3})S_1(\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{1.54}$$

最终的增广矩阵右侧就是 A 的逆,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \tag{1.55}$$

行约化阶梯形及一般线性方程组的一般解

行约化阶梯形式

- 如果第 i 行都是零, 那么对于 $j>i$ 行都是零.
- 如果第 i 行不都是零, 那么第一个非零元素为 1, 称为主元.
- 如果第 $(i+1)$ 行不都是零, 那么这一行的主元在第 i 行的主元右边.
- 主元上方的元素都为零.

找到一个矩阵行约化阶梯形的方法

- 找到第一个不为零的列, 然后, 如果需要的话, 做换行操作, 使得这一列的第一个元素不为零. 之后消元操作, 把下方的元素都变为零.

$$A \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & B & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \tag{1.56}$$

- 对子矩阵 B 做同样的操作.
- 把主元上方的元素变为零.

例 1.5. *行约化阶梯形式:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

行约化阶梯形式的一些名词

- 主元列: 如果该列有一个主元, 该列只有一个非零元素.
- 自由列: 没有主元之列.
- 主元变量, 自由变量:

  对于一个方程

$$Rx = x_1Y_1 + x_2Y_2 + \cdots + x_nY_n, \tag{1.58}$$

如果 Y_i 为自由列, 则 x_i 为自由变量. 如果 Y_i 为主元列, 则 x_i 为主元变量.

对于例1.5, 约化后的方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \tag{1.59}$$

其中的 x_1, x_2 为主元变量, x_3, x_4 为自由变量.