高等微积分笔记

mny

2023 年 9 月 22 日

目录

1 微积分简介 **1**
1.1 阿基米德时代 1
1.2 Newton 时代 2

2 集合与映射 **3**
2.1 映射的性质 3
2.2 范畴中的映射 4

3 实数 **7**
3.1 戴德金分割 7
3.2 确界定理 8

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\quad 0\leq y\leq h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\operatorname{area}(D)$.
特例: $a=0$, 剖分 $D=\bigcup D_i$, 分点 $x_i=\frac{ib}{n}$

- 算 $\operatorname{area}(D_i)\simeq(x_i-x_{i-1})\,h(\xi_i),\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$
- 求和
$$\operatorname{area}(D)\simeq\sum_{i=1}^{n}(x_{i-1}-x_i)\,h(\xi) \tag{1.1}$$
- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x)=x^2$

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(D) &\simeq \sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}h(\xi_i=x_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 && (1.2)\\
&=\frac{b^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) && (1.3)\\
&=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) && (1.4)\\
&=\frac{b^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\xlongequal{\text{记为}}x_n && (1.5)
\end{aligned}$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x)=x^k,\quad (k\geq 2)$ 相应的

$$\operatorname{area}(D)\simeq\frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n}i^k \tag{1.6}$$

更接近哪个数 L? 对于更一般 h, 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

x 流动到 $x+o$,

$$S(x+o)-S(x)\simeq o\cdot h(x) \tag{1.7}$$

$$\Longrightarrow\ h(x)\simeq\frac{S(x+o)-S(x)}{o}\quad(\text{流数法}) \tag{1.8}$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a)=a^m,\quad (m\in\mathbb{Z}_+)$

$$\Longrightarrow\ h(x)\simeq\frac{(x+o)^m-x^m}{o} \tag{1.9}$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m=x^m+C_m^1x^{m-1}y+\cdots+C_m^my^m \tag{1.10}$$

带入, 得到

$$h(x)\simeq C_m^1x^{m-1}+C_m^2x^{m-2}o\cdots+C_m^mo^{m-1}\xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}}mx^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a)=\frac{1}{k+1}a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b)=\int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x)=S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)'=h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x=S(b)-S(0) \tag{1.13}$$

2 集合与映射

定义 2.1. *设 X,Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据*

对于 X 中的每一个元素 x, 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f\colon X\to Y \tag{2.1}$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 domain, Y 为 f 的陪域 co-domain.

$$\forall A\subseteq X,\quad f(A)=\{y\in Y|\exists a\in A使y=f(a)\} \tag{2.2}$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X)=\mathrm{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. *原像集. 对 $V\subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集*

$$f^{-1}(V)=\{x\in X|f(x)\in V\}=\bigcup_{y\in V}F_y \tag{2.3}$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c)=\left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

显然有

$$f^{-1}\left(A\cup B\right)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B) \tag{2.5}$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to Z$, 可定义复合映射 $g\circ f\colon X\to Z$,

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right),\quad \forall x\in X \tag{2.6}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z,\ h\colon Z \to W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.7}$$

  证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X \to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X \tag{2.8}$$

对于两个集合 X, Y, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \big\{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\big\} \tag{2.9}$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. *所谓一个范畴 (Category) $\mathcal{C}$ 是指如下一个数据:*

- *对象 X, Y, Z[1], 构成 object* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- *对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 (morphism), 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为*

$$f\colon X \to Y \tag{2.10}$$

- *态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.11}$$

  记为

$$(f,g) \to g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.12}$$

- *态射复合是结合的, 即 $\forall X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 设*

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), \tag{2.13}$$

  有 (结合律)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.14}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \tag{2.15}$$

[1] 在线性代数里面它们是线性空间

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定态射
$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \tag{2.16}$$
满足, 对 $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, 有
$$f \circ \mathrm{id}_X = f,\ \mathrm{id}_X \circ g = g \tag{2.17}$$

例 2.1. 范畴 *Set*, 其中的对象是集合 X, Y, 此时

- 态射 $\longleftrightarrow$ 映射
$$\mathrm{Hom}_{Set}(X,Y) = \left\{\text{映射} f \colon X \to Y\right\} \tag{2.18}$$
- 态射复合 $\longleftrightarrow$ 映射复合
- $\mathrm{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 矢量空间 *Vect:* 对象是线性空间, 态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 *Top:* 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中)**.** 称映射 $f \colon x \to y$ 是

- 单射 $\iff$ $\forall x \neq x'$, 有 $f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff$ $\forall y \in Y$, $\exists x \in X \text{使} f(x) = y$.
- 双射 $\iff$ 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f \colon X \to Y$ 是

- 单射
$$\iff \exists \text{映射} g \colon Y \to X, \text{使} g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{(只在集合当中适用)} \tag{2.19}$$
一般的范畴中:
$$\iff \forall \text{集合} W, \forall \text{映射} g_1, g_2 \colon W \to X, \text{若} f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{则有} g_1 = g_2 \tag{2.20}$$
- 满射
$$\iff \forall \text{集合} Z, \forall \text{映射} h_1, h_2 \colon Y \to Z. \text{若有} h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{则有} h_1 = h_2 \tag{2.21}$$

定理 2.1. 映射 $f \colon X \to Y$ 是双射 $\iff \exists \text{映射} g \colon Y \to X \text{使} g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ 且} f \circ g = \mathrm{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

"$\Longrightarrow$":

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g.

"$\Longleftarrow$":

设 $\exists g\colon Y \to X$ 使

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,\ \ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.22}$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \tag{2.23}$$

即

$$x = x' \tag{2.24}$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y,\ \ f[g(y)] = f \circ g(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y \tag{2.25}$$

所以 $y \in \operatorname{Im} f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \tag{2.26}$$

使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \ \text{ 且 } \ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.27}$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 $\exists$同构态射$f\colon X \to Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2\colon Y \to X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1. \tag{2.28}$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$.

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \tag{3.1}$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s,t) | s \in S, t \in T\} \tag{3.2}$$

引入了乘法.

加法在 $\mathbb{N}$ 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 $\mathbb{Z}$. 但 $\mathbb{Z}$ 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+)$, 将 $\mathbb{Z}$ 扩充为 $\mathbb{Q}$ [2] .

命题 3.1. *$\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2 = 2$ 的正数).*

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n 无公因子. 则 $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

$m^2 = 2n^2$ 说明 m 是偶数, 代回发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 $\mathbb{Q}$ 需要进一步扩充.

命题 3.2. *x 是有理数 $\iff$ x 是有限或无限循环小数.*[3]

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. *所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A, B), 满足:*

- *A, B 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集.*
- *$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{Q}$*
- *$\forall x \in A, \forall y \in B$, 有 $x < y$*
- *集合 B 无最小元素.*

---

[2] 这些 "逆" 都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\text{所有} F(x) | F' = f\}. \tag{3.3}$$

[3] 小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

称两个戴德金分割 $(A,B)=(A',B') \iff A=A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D=\{\text{所有戴德金分割}\} \tag{3.4}$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a,B_a),\ \text{其中}A_a=\{x\in\mathbb{Q}|x\le a\} \tag{3.5}$$

- 序.

  定义 $(A,B)\le(A',B') \iff A\subseteq A'$

- 和.

$$(A,B)+(A',B')=(A+A',\mathbb{Q}-(A+A')) \tag{3.6}$$

- 称一个戴德金实数 (A,B) 为一个戴德金有理数 $\iff$ A 有最大元素.

以上定义好实数集 $\mathbb{R}$, 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E\in\mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x\in E, x\le a$, 记为 $a=\max E$

最小元素: $a=\min E \iff a\in E\text{且}\forall x\in E\text{有}x\ge a$

定义 3.4. 称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x\in E\text{有}x\le c$.

称 d 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x\in E\text{有}x\le d$. (任意数都是空集的上界, 每个数也都是空集的下界.)

最小的上界为上确界.