

高等微积分笔记

mny

2023 年 9 月 21 日

目录

1	微积分简介	1
1.1	阿基米德时代	1
1.2	Newton 时代	2
2	集合与映射	3
2.1	映射的性质	3
2.2	范畴中的映射	4
3	实数	7
3.1	戴德金分割	7
3.2	确界定理	8

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\text{area}(D)$.

特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\text{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})h(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i) h(\xi) \quad (1.1)$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x) = x^2$

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} h(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (1.2)$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad (1.3)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.4)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{\text{记为}} x_n \quad (1.5)$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x) = x^k$, ($k \geq 2$) 相应的

$$\text{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k \quad (1.6)$$

更接近哪个数 L ? 对于更一般 h , 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

x 流动到 $x + o$,

$$S(x + o) - S(x) \simeq o \cdot h(x) \quad (1.7)$$

$$\implies h(x) \simeq \frac{S(x + o) - S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) \quad (1.8)$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a) = a^m$, ($m \in \mathbb{Z}_+$)

$$\implies h(x) \simeq \frac{(x + o)^m - x^m}{o} \quad (1.9)$$

使用牛顿二项式公式

$$(x + y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \cdots + C_m^m y^m \quad (1.10)$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xrightarrow{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \quad (1.11)$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a) = \frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b) = \int_0^b h(x) dx$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x) = S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi) d\xi \right)' = h(x) \quad (1.12)$$

和

$$\int_0^b S'(x) dx = S(b) - S(0) \quad (1.13)$$

2 集合与映射

定义 2.1. 设 X, Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据

对于 X 中的每一个元素 x , 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.1)$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 *domain*, Y 为 f 的陪域 *co-domain*.

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A) = \{y \in Y | \exists a \in A \text{ 使 } y = f(a)\} \quad (2.2)$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X) = \text{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. 原像集. 对 $V \subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} = \bigcup_{y \in V} F_y \quad (2.3)$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c \quad (2.4)$$

显然有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad (2.5)$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, 可定义复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X \quad (2.6)$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.7)$$

证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\text{id}_X: X \rightarrow X$, 定义为 $\text{Id}_X(x) = x$, $\forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f: X \rightarrow Y$ 有

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X \quad (2.8)$$

对于两个集合 X, Y , 存在一个集合

$$\text{Hom}(X, Y) = \{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\} \quad (2.9)$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. 所谓一个范畴 (Category) \mathcal{C} 是指如下一个数据:

- 对象 X, Y, Z^1 , 构成 *object* $\text{Obj}(\mathcal{C})$
- 对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 称 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 \mathcal{C} 中的一个态射 (*morphism*), 记 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.10)$$

- 态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.11)$$

记为

$$(f, g) \rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.12)$$

- 态射复合是结合的, 即 $\forall X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 设

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), \quad (2.13)$$

有 (结合律)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.14)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \quad (2.15)$$

¹在线性代数里面它们是线性空间

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 指定态射

$$\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \quad (2.16)$$

满足, 对 $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, 有

$$f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_X \circ g = g \quad (2.17)$$

例 2.1. 范畴 Set , 其中的对象是集合 X, Y , 此时

- 态射 \longleftrightarrow 映射

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y) = \{\text{映射 } f: X \rightarrow Y\} \quad (2.18)$$

- 态射复合 \longleftrightarrow 映射复合

- $\text{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 向量空间 Vect : 对象是线性空间, 态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 Top : 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中). 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x', \text{ 有 } f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ 使 } f(x) = y$.
- 双射 \iff 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{映射 } g: Y \rightarrow X, \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \quad (\text{只在集合当中适用}) \quad (2.19)$$

一般的范畴中:

$$\iff \forall \text{集合 } W, \forall \text{映射 } g_1, g_2: W \rightarrow X, \text{ 若 } f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{ 则有 } g_1 = g_2 \quad (2.20)$$

- 满射

$$\iff \forall \text{集合 } Z, \forall \text{映射 } h_1, h_2: Y \rightarrow Z. \text{ 若有 } h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{ 则有 } h_1 = h_2 \quad (2.21)$$

定理 2.1. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是双射 $\iff \exists \text{映射 } g: Y \rightarrow X \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \text{ 且 } f \circ g = \text{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

“ \implies ”:

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g .

“ \impliedby ”:

设 $\exists g: Y \rightarrow X$ 使

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.22)$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \quad (2.23)$$

即

$$x = x' \quad (2.24)$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y, \quad f[g(y)] = f \circ g(y) = \text{id}_Y(y) = y \quad (2.25)$$

所以 $y \in \text{Im } f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 \mathcal{C} 中, 称态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad (2.26)$$

使得

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{且} \quad f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.27)$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 \exists 同构态射 $f: X \rightarrow Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2: Y \rightarrow X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1. \quad (2.28)$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \dots$

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \quad (3.1)$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s, t) | s \in S, t \in T\} \quad (3.2)$$

引入了乘法.

加法在 \mathbb{N} 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 \mathbb{Z} . 但 \mathbb{Z} 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+$), 将 \mathbb{Z} 扩充为 \mathbb{Q} ².

命题 3.1. $\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2 = 2$ 的正数).

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n 无公因子. 则 $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

$m^2 = 2n^2$ 说明 m 是偶数, 代回发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 \mathbb{Q} 需要进一步扩充.

命题 3.2. x 是有理数 $\iff x$ 是有限或无限循环小数.³

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. 所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A, B) , 满足:

- A, B 是 \mathbb{Q} 的非空子集.
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $\forall x \in A, \forall y \in B$, 有 $x < y$
- 集合 B 无最小元素.

²这些“逆”都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x) dx = \{ \text{所有 } F(x) | F' = f \}. \quad (3.3)$$

³小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

称两个戴德金分割 $(A, B) = (A', B') \iff A = A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D = \{\text{所有戴德金分割}\} \quad (3.4)$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a, B_a), \text{ 其中 } A_a = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq a\} \quad (3.5)$$

- 序.

定义 $(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$

- 和.

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', \mathbb{Q} - (A + A')) \quad (3.6)$$

- 称一个戴德金实数 (A, B) 为一个戴德金有理数 $\iff A$ 有最大元素.

以上定义好实数集 \mathbb{R} , 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E \in \mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x \in E, x \leq a$, 记为 $a = \max E$

最小元素: $a = \min E \iff a \in E$ 且 $\forall x \in E$ 有 $x \geq a$

定义 3.4. 称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.

称 d 为 E 的一个下界, 如果 $\forall x \in E$ 有 $x \geq d$. (任意数都是空集的上界, 每个数也都是空集的下界.)

最小的上界为上确界.