高等微积分笔记

mny

2023 年 10 月 17 日

目录

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\operatorname{area}(D)$.

特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\operatorname{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})\, h(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\operatorname{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i)\, h(\xi) \tag{1.1}$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} h(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 && (1.2)\\
= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) && (1.3)\\
= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) && (1.4)\\
= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xlongequal{\text{记为}} x_n && (1.5)
\end{aligned}$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x) = x^k, \quad (k \geq 2)$ 相应的

$$\operatorname{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k \tag{1.6}$$

更接近哪个数 L? 对于更一般 h, 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

x 流动到 $x+o$,

$$S(x+o)-S(x)\simeq o\cdot h(x) \tag{1.7}$$

$$\implies h(x)\simeq \frac{S(x+o)-S(x)}{o} \quad \text{(流数法)} \tag{1.8}$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a)=a^m, \quad (m\in\mathbb{Z}_+)$

$$\implies h(x)\simeq \frac{(x+o)^m-x^m}{o} \tag{1.9}$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1}y + \cdots + C_m^m y^m \tag{1.10}$$

带入, 得到

$$h(x)\simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a)=\frac{1}{k+1}a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b)=\int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x)=S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)' = h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x = S(b)-S(0) \tag{1.13}$$

2 集合与映射

定义 2.1. *设 X,Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据*

对于 X 中的每一个元素 x, 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f\colon X\to Y \tag{2.1}$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 *domain*, Y 为 f 的陪域 *co-domain*.

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A) = \{y \in Y | \exists a \in A 使 y = f(a)\} \tag{2.2}$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X) = \mathrm{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. 原像集. 对 $V \subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\} = \bigcup_{y \in V} F_y \tag{2.3}$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c) = \left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

显然有

$$f^{-1}\left(A \cup B\right) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \tag{2.5}$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, 可定义复合映射 $g \circ f\colon X \to Z$,

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in X \tag{2.6}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.7}$$

  证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X \to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X \tag{2.8}$$

对于两个集合 X, Y, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \left\{从\ X\ 到\ Y\ 的映射\right\} \tag{2.9}$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. 所谓一个范畴 *(Category)* $\mathcal{C}$ 是指如下一个数据:

- 对象 X,Y,Z[1], 构成 *object* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

- 对任何 $X,Y\in\mathcal{C}$, 指定一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 *(morphism)*, 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为

$$f\colon X\to Y \tag{2.10}$$

- 态射可复合, 即 $\forall X,Y,Z\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.11}$$

记为

$$(f,g)\to g\circ f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.12}$$

- 态射复合是结合的, 即 $\forall X,Y,Z,W\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 设

$$f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ h\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W), \tag{2.13}$$

有 *(结合律)*

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \tag{2.14}$$

$$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h}W \tag{2.15}$$

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象 $X\in\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定态射

$$\mathrm{id}_X\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \tag{2.16}$$

满足, 对 $\forall f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\forall g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, 有

$$f\circ\mathrm{id}_X=f,\ \mathrm{id}_X\circ g=g \tag{2.17}$$

例 2.1. 范畴 *Set,* 其中的对象是集合 X,Y, 此时

- 态射 $\longleftrightarrow$ 映射

$$\mathrm{Hom}_{Set}(X,Y)=\left\{\text{映射} f\colon X\to Y\right\} \tag{2.18}$$

[1]在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合 $\longleftrightarrow$ 映射复合
- $\mathrm{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 矢量空间 *Vect:* 对象是线性空间, 态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 *Top:* 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中)**.** 称映射 $f\colon x \to y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x'$, 有 $f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y,\ \exists x \in X$ 使 $f(x) = y$.
- 双射 $\iff$ 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f\colon X \to Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{映射} g\colon Y \to X, \text{使} g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{(只在集合当中适用)} \tag{2.19}$$

一般的范畴中:

$$\iff \forall \text{集合} W, \forall \text{映射} g_1, g_2\colon W \to X, \text{若} f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{则有} g_1 = g_2 \tag{2.20}$$

- 满射

$$\iff \forall \text{集合} Z, \forall \text{映射} h_1, h_2\colon Y \to Z. \text{若有} h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{则有} h_1 = h_2 \tag{2.21}$$

定理 2.1. 映射 $f\colon X \to Y$ 是双射 $\iff \exists$映射$g\colon Y \to X$使$g \circ f = \mathrm{id}_X$ 且$f \circ g = \mathrm{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

“$\Longrightarrow$”:
由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.
由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.
于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g.
“$\Longleftarrow$”:
设 $\exists g\colon Y \to X$ 使

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,\ \ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.22}$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \tag{2.23}$$

即

$$x = x' \tag{2.24}$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y,\ f[g(y)] = f \circ g(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y \tag{2.25}$$

所以 $y \in \operatorname{Im} f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \tag{2.26}$$

使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ 且 } f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.27}$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 $\exists$同构态射$f\colon X \to Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2\colon Y \to X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1. \tag{2.28}$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$.

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \tag{3.1}$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s,t) | s \in S, t \in T\} \tag{3.2}$$

引入了乘法.

加法在 $\mathbb{N}$ 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 $\mathbb{Z}$. 但 $\mathbb{Z}$ 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+)$, 将 $\mathbb{Z}$ 扩充为 $\mathbb{Q}$ [2] .

[2]这些 “逆” 都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\text{所有}F(x) | F' = f\}. \tag{3.3}$$

命题 3.1. $\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2=2$ 的正数).

证明. 假设 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, m,n 无公因子. 则 $2=\frac{m^2}{n^2}$.

$m^2=2n^2$ 说明 m 是偶数, 代回发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 $\mathbb{Q}$ 需要进一步扩充.

命题 3.2. x 是有理数 $\iff$ x 是有限或无限循环小数.[3]

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义. 1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. 所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A,B), 满足:

- A,B 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集.
- $A\cap B=\varnothing,\ A\cup B=\mathbb{Q}$
- $\forall x\in A,\forall y\in B,$ 有 $x<y$
- 集合 A 无最大元素.

称两个戴德金分割 $(A,B)=(A',B')\iff A=A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D=\{\text{所有戴德金分割}\} \tag{3.4}$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a,B_a),\ \text{其中}A_a=\{x\in\mathbb{Q}|x\le a\} \tag{3.5}$$

- 序.

  定义 $(A,B)\le(A',B')\iff A\subseteq A'$

- 和.

$$(A,B)+(A',B')=(A+A',\mathbb{Q}/(A+A')) \tag{3.6}$$

- 称一个戴德金实数 (A,B) 为一个戴德金有理数 $\iff$ A 有最大元素.

以上定义好实数集 $\mathbb{R}$, 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

[3] 小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

3.2 确界定理

定义 3.3. *设非空集合 $E \in \mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x \in E, x \leq a$, 记为 $a = \max E$*

最小元素: $a = \min E \iff a \in E$且$\forall x \in E$有$x \geq a$

定义 3.4. *上界和下界.*

称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x \in E$有$x \leq c$.

称 d 为 E 的一个下界, 如果 $\forall x \in E$有$x \geq d$.

定义 3.5. *确界.*

称 c 是 E 的上确界 (supremum), 记作 $c = \sup E$, 如果 c 是 E 的最小的上界.

$\iff c = \min\{E \text{ 的上界}\}$

称 d 是 E 的下确界 (infimum), 记作 $d = \inf E$, 如果 d 是 E 的最大的下界.

$\iff d = \max\{E \text{ 的下界}\}$

命题 3.3. *任意非空实数集 F, $\min F, \max F$ 非必存在.*

例 3.1. *$F = (0, 1)$, 则 $\min F, \max F$ 皆不存在.*

证明. 因为

$$\forall a \in F \implies \frac{a}{2} \in F \implies a\text{不是最小元素}, \tag{3.7}$$

$$\forall b \in F \implies \frac{b+1}{2} \in F \implies b\text{不是最大元素}. \tag{3.8}$$

□

这样, 从字面上有

- 若 E 无上界, 则 E 无上确界.
- 若 E 有上界, $\{E$ 上界$\}$ 非空, **是否有最小元素需要证明**.

定理 3.1 (确界定理)**.** *有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.*

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E = \{x_\alpha = \text{戴德金分割 } (A_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in \text{指标集 } \Lambda\} \tag{3.9}$$

已知 E 有上界 $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B})$, $(\tilde{A} \subsetneqq \mathbb{Q})$.

由 $\forall\alpha,\ \tilde{c} \geq x_\alpha$, 根据定义有

$$\forall\alpha,\ \tilde{A} \supseteq A_\alpha \implies \tilde{A} \supseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \xlongequal{\text{定义为}} \{y|\exists\alpha \in \Lambda\text{使}y \in A_\alpha\} \tag{3.10}$$

令 $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ (A 必是 $\mathbb{Q}$ 的非空真子集).

考虑 $(A, B = \mathbb{Q}/A)$, 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

$$\forall x \in A,\ \exists\alpha\text{使}x \in A_\alpha \tag{3.11}$$

  而且

$$B = \left(\bigcup A_\alpha\right)^C = \bigcap A_\alpha^C = \bigcap_\alpha B_\alpha \implies \forall y \in B, \forall\alpha,\ y \in B_\alpha \tag{3.12}$$

  即我们可以找到一个 α,

$$x \in A_\alpha, y \in B_\alpha \implies x < y. \tag{3.13}$$

- 定义中的第四条: 要证 A 中无最大元, 采用反证法.

  若 A 中有最大元, 记为 z, 则

$$z \in A = \bigcup_\alpha A_\alpha \implies \exists\alpha\text{使}z \in A_\alpha. \tag{3.14}$$

  由于 z 是 A 最大元, 并且 $A_\alpha \subseteq A$, z 也是 A_α 最大元, 矛盾.

这样 $y = (A, B) = (\bigcup_\alpha A, \bigcup_\alpha B)$ 是一个戴德金实数, **我们可以断言** $y = \sup E$, 分为两部分内容:

- y 是 E 上界 $\iff y \geq x_\alpha \iff A \supseteq A_\alpha$, $\forall\alpha$ 显然成立.
- $y \leq E$ 的任何上界 $z \xlongequal{\text{记为}} (A_0, B_0)$, 由 z 是上界可知,

$$\forall\alpha,\ A_0 \supseteq A_\alpha \implies A \supseteq \bigcup_\alpha A_\alpha = A \implies z > y. \tag{3.15}$$

□

命题 3.4 (判断上确界)**.** *$C = \sup E$ 等价于下列两点同时成立:*

1. *$\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.*
2. *$\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in E$ 使 $x \geq c - \varepsilon$.*

定义 3.6. 称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界. $\iff \exists k>0$使$\forall x\in E$有$|x|\le k$

例 3.2. 设 E 是有界的非空实数集, 则

$$\sup\{x-y|x,y\in E\}=\sup E-\inf E. \tag{3.16}$$

证明. 记 $F=\{x-y|x,y\in E\}$, 可知 F 非空有界.

由确界定理知, $\sup F,\sup E,\inf E$ 皆存在, 有

- $\sup E-\inf E$ 是 F 的上界, 因为 $\forall x,y\in E$, 有 $x\le\sup E, y\ge\inf E$, 所以

$$x-y\le\sup E-\inf E. \tag{3.17}$$

  说明 $\sup E-\inf E$ 不小于 F 的任何成员, 是上界.

- 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\sup E-\frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 上界, $\inf E+\frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 下界.

$$\exists x,y\in E,\ x-y>\sup E-\inf E-\varepsilon \tag{3.18}$$

  说明 $\forall\varepsilon>0,\ \sup E-\inf E-\varepsilon$ 不是 F 上界.

所以 $\sup E-\inf E=\sup F$. □

3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

命题 3.5. $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\in\mathbb{Z}$使$x<n$.

证明. 反证法. 假设结论不对, 则 $x\ge n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$, 即 x 是 $\mathbb{Z}$ 的一个上界. 这说明 $\mathbb{Z}$ 非空且有上界.

由确界定理知, $\sup\mathbb{Z}$ 存在, 记 $M\equiv\sup\mathbb{Z}$, 那么

$$n+1\in\mathbb{Z}\implies n+1\le M\implies n\le M-1. \tag{3.19}$$

这与 $M=\sup\mathbb{Z}$ 矛盾. □

命题 3.6. 任何两个实数 $a<b$ 之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数 $\frac{m}{n}\in(a,b)$

对于 $x=\frac{1}{b-a}$, 由命题3.5结论可知,

$$\exists n\in\mathbb{Z},\ n>\frac{1}{b-a}. \tag{3.20}$$

对于 $y = nb$, 由命题3.5的结论可知, $m_1 \in \mathbb{Z},\ m_1 > y$, 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \tag{3.21}$$

对于 $z = -na$, 由命题3.5的结论可知, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m > -na$, 记 $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$, 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \tag{3.22}$$

这样总能找到整数 m_0, m_1 使 $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$. 于是在 m_0 和 m_1 之间总有一个 m 满足 $a < \frac{m}{n} < b$. □

4 数列极限

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑 n 越来越大的时候, x_n 是否趋近于某个值 L. 我们需要定义越来越接近这个概念.

定义 4.1. *所谓一个无穷序列, 是指一个映射 $x\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, 记为*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \tag{4.1}$$

称 x_n 为其第 n 项.

定义 4.2. *称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限 (limit), (记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$) 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\forall n > N$ 总有 $|x_n - L| < \varepsilon$.*

也称当 $n \to \infty$ 时, x_n 趋于 L.

这种定义称为 $\varepsilon - N$ 语言.

"$\{x_n\}$ 以 L 为极限" 可以表示为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{使得} \forall n \geq N \text{有} |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

"$\{x_n\}$ 不以 L 为极限" 可以表示为

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{使} |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.3}$$

定义 4.3. *称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的, 如果 $\exists$ 实数 L, 使 $\{x_n\}$ 以 L 为极限. 否则, 称 $\{x_n\}$ 发散.*

"$\{x_n\}$ 收敛" 可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, \text{有} |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

"$\{x_n\}$ 发散" 可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{使} |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.5}$$

例 4.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

证明. $\forall\varepsilon>0$, 取正整数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\forall n\geq N$ 有

$$|x_n-0|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon. \tag{4.6}$$

□

例 4.2. 设 $a>1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}$.

解 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$. 为此, $\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则对 $\forall n\geq N$ 都有

$$(1+\varepsilon)^n\geq 1+n\varepsilon\geq 1+N\varepsilon>a. \tag{4.7}$$

从而

$$1+\varepsilon>\sqrt[n]{a}. \tag{4.8}$$

可以得到

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon, \tag{4.9}$$

验证了

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1. \tag{4.10}$$

总结 $\forall a>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

例 4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明. $\forall\varepsilon>0$ 取 N 使 $\dfrac{N-1}{2}\varepsilon^2>1$, 则对于 $\forall n\geq N$ 有

$$(1+\varepsilon)^n=1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2+\cdots\geq C_n^2\varepsilon^2. \tag{4.11}$$

$$\geq\frac{(n+1)n}{2}\varepsilon^2 \tag{4.12}$$

$$\geq\frac{N+1}{2}\varepsilon^2 n>1\cdot n \tag{4.13}$$

从而 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 得到

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon. \tag{4.14}$$

□

4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式)**.** 设 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, 则 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $a_n < b_n$.

证明. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A < B = \lim_{n\to\infty} b_n$, 取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$.

由 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 定义知

$$\exists N_1 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_1 有 |a_n - A| < \varepsilon. \tag{4.15}$$

由 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ 定义知

$$\exists N_2 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_2 有 |b_n - B| < \varepsilon. \tag{4.16}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$a_n < A + \varepsilon = B - \varepsilon < b_n. \tag{4.17}$$

□

推论 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明. 取 $q < r < 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lim_{n\to\infty} r. \tag{4.18}$$

由命题4.1可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$.

从而, $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \tag{4.19}$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \tag{4.20}$$

由于 $\frac{1}{r} > 1$, 记 $\frac{1}{r} = 1 + c, (c > 0)$. 这样, 取 $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$, 对于 $\forall n \geq N_0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \tag{4.21}$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \tag{4.22}$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \tag{4.23}$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1\text{或}r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

推论 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 且 $a < B$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A < B = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{4.25}$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in Z_+, \forall n \geq N\text{满足}a_n > a_n, \tag{4.26}$$

矛盾! □

推论 收敛的数列一定有界.

定义 4.4. *称数列有上界, 若 $\exists M$使$\forall n, a_n \leq M$. 称数列有下界, 若 $\exists K$使$\forall n, a_n \geq K$.*

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L < L+1 = \lim\limits_{n\to\infty} L+1$, 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N\text{有}x_n < L+1. \tag{4.27}$$

所以

$$x_n \leq \max\{x_1, \cdots, x_N, L+1\}. \tag{4.28}$$

故有上界, 下界同理. □

推论 (极限不等式) 设 $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N_0$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明. 反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 由命题4.1可知, $\exists n \geq N$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注意! $\leq$ 可过渡给极限式, 但 $<$ 不一定能.

例 4.4. $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4.2 极限的计算方法

4.2.1 从定义直接计算

例 4.5. 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n}=0,\quad \text{当}q>1\text{时}. \tag{4.29}$$

证法一

证明. 记 $x_n=\frac{n^k}{q^n}$, 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k\,q^n}{q^{n+1}n^k}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\cdots\frac{n+1}{n}}_{k\text{个}}\cdot\frac{1}{q}\right)\\&=\frac{1}{q}<1\end{aligned}\tag{4.30}$$

由命题4.1知 $\lim x_n=0$. □

证法二 (从定义验证)

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\geq\max\left\{2k,\frac{(k+1)!2^k}{a^{k-1}\varepsilon}\right\}$. $\forall n\geq N$ 有 (记 $q=1+a,\ a>0$)

$$\begin{aligned}\frac{n^k}{q^n}&=\frac{n^k}{(1+a)^n}\leq\frac{n^k}{C_n^{k+1}a^{k+1}}\\&=\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)a^{k+1}}\\&=\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{n-k}\\&<\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}2\cdot2\cdots2\\&=\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{n}\leq\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{N}<\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.31}$$

□

4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设 $\lim a_n = A,\ \lim b_n = B$, 则

$$\lim(a_n + b_n) = A + B \tag{4.32}$$

$$\lim(a_n - b_n) = A - B \tag{4.33}$$

$$\lim a_n b_n = AB \tag{4.34}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad \text{(分母不为零)} \tag{4.35}$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{4.36}$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \tag{4.37}$$

- 由 $\{b_n\}$ 收敛知其有界, 即 $\exists M$ 使 $|b_n| \leq M, \forall n$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 知 $\exists N_1 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_1$ 有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 知 $\exists N_2 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_2$ 有 $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$.

从而, 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 对 $n \geq N$, 代回(4.37)得

$$|a_n b_n - AB| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |A| \frac{\varepsilon}{2(|A| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.38}$$

这证明了 $\lim a_n b_n = AB$.

商

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{(a_n - A)B + A(B - b_n)}{b_n B}\right| \tag{4.39}$$

$$\leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n||B|}. \tag{4.40}$$

- 由 $B \neq 0$, 不妨设 $B > 0$. 由命题4.1知 $\exists M \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq M$ 有 $b_n > \frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 知 $\exists N_2, \forall n \geq N_2$ 有 $|a_n - A| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}$

- 由 $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ 知 $\exists N_3, \forall n \geq N_3$ 有 $|b_n - B| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

  $\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 对 $\forall n \geq N$ 有 (代回(4.39))

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}}{\frac{B}{2}} + \frac{|A|\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2}B} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4.41}$$

□

推论 有限次四则运算和极限可交换.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\lim_{k\to\infty} x_{i,k} \tag{4.42}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i,k}\right) = \prod_{i[=1]}^{n}\left(\lim_{k\to\infty} x_{i,k}\right) \tag{4.43}$$

证明. 只需 $k-1$ 次使用前述定理. □

注意 无限和/无限积与极限未必可交换.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_{i,k} \neq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lim_{k\to\infty} x_{i,k}\right) \tag{4.44}$$

例 4.6. 对于一个下表这样一个数列 $x_{i,k}$,

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$\cdots$
$i=1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=3$	0	0	$\frac{1}{3}$	
$\vdots$				

纵向求和, 值是 1, 但先取极限 $k\to\infty$ 每一项都变为零, 再纵向求和, 值是 0.

类似地, 有例子表明无限乘积与极限未必可交换.

4.2.3 夹逼定理

定理 4.2. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$ $(\forall n \geq N_0)$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \tag{4.45}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且等于 L.

证明. 对于左右两边的数列极限,

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_1,\ \forall n \geq N_1, 有\ |a_n - L| < \varepsilon \tag{4.46}$$

  从而

$$L - \varepsilon < a_n \tag{4.47}$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_2,\ \forall n \geq N_2, 有\ |c_n - L| < \varepsilon \tag{4.48}$$

  从而

$$c_n < L + \varepsilon \tag{4.49}$$

  结合起来, $\forall n \geq \max\{N_i\}$, 有 $L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$. □

例 4.7. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{n^k} = a_k \tag{4.50}$$

因为

$$\begin{aligned} LHS &= \lim_{n\to\infty} \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k} \right) && (4.51) \\ &= \lim a_k + \lim \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots && (4.52) \\ &= a_k + 0 + \cdots = a_k. && (4.53) \end{aligned}$$

例 4.8.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \cdots + b_0} && (4.54) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{n^k} \frac{n^l}{b_l n^l + \cdots + b_0} n^{k-l} \right) && (4.55) \\ &= \begin{cases} a_k \cdot \frac{1}{b_l} \cdot 0 = 0, & k < l \\ a_k \cdot \frac{1}{b_l} \cdot 1 = 0, & k = l \\ \text{不存在 (由引理)}, & k > l \end{cases} && (4.56) \end{aligned}$$

引理 4.1. 设

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_n = X \neq 0,\\
&\lim_{n\to\infty} y_n = Y \neq 0, \qquad (4.57)\\
&\lim_{n\to\infty} Z_n\text{不存在},
\end{aligned}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n z_n)\text{ 不存在}. \tag{4.58}$$

证明. 反证法, 设 $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n z_n) = L$ 存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left[(x_n y_n z_n)\frac{1}{x_n}\frac{1}{y_n}\right] \tag{4.59}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x_n y_n z_n)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} \tag{4.60}$$

$$= L\cdot X\cdot Y. \tag{4.61}$$

与条件 $\lim_{n\to\infty} z_n$不存在 矛盾! □

例 4.9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是正数, 求

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.62}$$

解 不妨设 $a_1 = \max\{a_i\}$, 有

$$(a_1^n)^{\frac{1}{n}} \le (a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} \le (k a_1^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.63}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n)^{\frac{1}{n}} = a_1,\ \lim_{n\to\infty}(k a_1^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}a_1 = a_1. \tag{4.64}$$

使用夹逼定理得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_i\} \tag{4.65}$$

例 4.10. 进一步,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^{-n}, a_2^{-n}, \cdots, a_k^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{4.66}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_1}\right)^n+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \tag{4.67}$$

$$=\frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a_i}\right\}} = \frac{1}{1/\min\{a_i\}} \tag{4.68}$$

$$=\min\{a_i\}. \tag{4.69}$$

4.2.4 计算极限的一个有用方法: Stolz theorem

定义 4.5. 称 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 如果对 $\forall k > 0$,

$$\exists n \in \mathbb{Z}_+,\ \forall n \geq N 有 x_n > k. \tag{4.70}$$

定理 4.3 (Stolz Theorem)**.** *设 $\{b_n\}$ 严格单调递增且无上界 (或等价地说 $\lim b_n = +\infty$).*

设 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \tag{4.71}$$

证明 Stolz 定理. 由 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$ 的定义可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+,\ \forall n \geq N$ 有

$$L - \varepsilon < \frac{a_{i+1}-a_i}{b_{i+1}-b_i} < L + \varepsilon \implies (L-\varepsilon)(b_{i+1}-b_i) < a_{i+1}-a_i < (L+\varepsilon)(b_{i+1}-b_i) \tag{4.72}$$

我们可以对上式对 i 从 N 到 $n-1$ 求和, 得到

$$(L-\varepsilon)(b_n - b_N) < a_n - a_N < (L+\varepsilon)(b_n - b_N) \tag{4.73}$$

$$\overset{除以 b_n}{\implies} (L-\varepsilon)\left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) + \frac{a_N}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (L+\varepsilon)\left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) + \frac{a_N}{b_n}. \tag{4.74}$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_N}{b_n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_N}{b_n} = 0 \tag{4.75}$$

由于命题4.1“充分大指标的项保持极限不等式”, 可知 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall n > N_0$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < 2\varepsilon. \tag{4.76}$$

□

4.3 单调极限定理 (Weierstrass 定理)(Monotone Converge Theorem)

定理 4.4 (单调极限定理)**.** *有上界且递增的数列一定收敛; 有下界且递降的数列一定收敛.*

证明. 设 $\{x_i\}$ 递增且有上界, 考虑单步点集

$$X = \{x_n | n \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{4.77}$$

可知 X 非空且有上界, 由确界定理知, $\sup X$ 存在, 记为 L.

由 $\sup X = L$ 的定义知,

$$\forall \varepsilon > 0,\ L - \varepsilon 不是\ X\ 上界, \tag{4.78}$$

即 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $x_N > L - \varepsilon$, 从而对于 $\forall n \geq N$ 都有

$$L - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq L, \tag{4.79}$$

即

$$|x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.80}$$

这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. □

定理 4.5 (Euler)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *存在 (记为* e*).*

证明. 记 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- $\{x_n\}$ 有上界,
$$\begin{aligned} x_n \leq & 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ < & 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\times n} < 3 \end{aligned} \tag{4.81}$$

- $\{x_n\}$ 递增,
$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ 个}}\cdot 1} \leq \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}. \tag{4.82}$$
所以我们得到了
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{4.83}$$
由单调极限定理可知, 极限存在, 称为自然常熟 e.

□

命题 4.2. 令 $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mathrm{e}$

证明. 注意到 $\{y_n\}$ 递增且有上界, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 记为 Y.

由上例可知,

$$x_n \leq y_n \ (\forall n) \implies \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n = Y. \tag{4.84}$$

最后来证 $Y \le e$. 我们固定一个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 对于 $\forall n \ge k$, 有

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &\ge 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \cdots + C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{n}{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.85}$$

利用极限不等式可知,

$$\begin{aligned} e = \lim_{n\to\infty} x_n &\ge \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k. \end{aligned} \tag{4.86}$$

之后再取极限可知

$$\mathrm{e} \ge \lim_{k\to\infty} y_k = Y. \tag{4.87}$$

□

定理 4.6. e 不是有理数.

证明. 我们需要使用一个引理.

引理 4.2. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$0 < \mathrm{e} - y_n < \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.88}$$

证明. 一方面, $\forall m \ge n+1$, 有

$$y_m \ge y_{n+1}. \tag{4.89}$$

由极限不等式可知 $\lim\limits_{m\to\infty} y_m \ge y_{n+1}$, 从而

$$\mathrm{e} \ge y_{n+1} > y_n \tag{4.90}$$

另一方面, $\forall m > n+3$, 有

$$\begin{aligned} y_m - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} && (4.91)\\ &\le \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m}\right] && (4.92)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) && (4.93)\\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{2}{n+2}\right) && (4.94)\\ &\le \frac{2}{(n+1)!}. && (4.95) \end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{e} - y_n = \lim_{m\to\infty}(y_m - y_n) < \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.96}$$

□

对于定理4.6的证明, 我们采用反证法.

设 $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{e} = \frac{A}{B}$, 其中 $A, B \in \mathbb{Z}_+$. 由引理,

$$0 < \mathrm{e} - y_2 < \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \tag{4.97}$$

这表明 $\mathrm{e} \notin \mathbb{Z} \implies B \ge 2$.

再次使用引理, 有

$$0 < \mathrm{e} - y_B < \frac{2}{(B+1)!}, \tag{4.98}$$

而

$$\mathrm{e} - y_B = \frac{A}{B} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{B!}\right) \xlongequal{\text{通分}} \frac{\text{整数}C}{B!}. \tag{4.99}$$

代回(4.98)可知

$$0 < \frac{C}{B!} < \frac{2}{(B+1)!} = \frac{1}{B!} - \frac{2}{B+1} < \frac{1}{B!}, \tag{4.100}$$

这表明

$$0 < C < 1. \tag{4.101}$$

与 $C \in \mathbb{Z}$ 矛盾! □

4.4 柯西收敛准则

单调极限定理 (MCT) 的适用范围太小, 只能用于单调数列, 我们需要一般的判据.

要证 $\{x_n\}$ 有极限 L, 我们需要证当 n 无穷大时 $|x_n - L| < \varepsilon$, 但是如果猜不出 L, 往往无用. 我们只能比较大指标的 $|x_n - x_m|$.

定理 4.7 (Cauchy 收敛原理)**.** *实数列 $\{x_n\}$ 收敛, 当且仅当*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{Z}_+,\ \ \forall m, n \text{ 都有} |x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{4.102}$$

定义 4.6. *称 $\{x_n\}$ 为一个 Cauchy 列, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, $\forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

这样, 定理4.7可以表述为 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 序列.

Cauchy 收敛原理的证明. 从充分性和必要性两方面来证明.

先证" $\Longrightarrow$ ":

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\forall m, n > N \text{有} |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.103}$$

从而由三角不等式可得, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

再证" $\Longleftarrow$ ":

首先 $\{x_n\}$ 有界, 因为对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, $\forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别地, 有 $|x_n - x_{N+1}| < 1$. 于是我们得到

$$\min\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\} \le x_n \le \max\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\}. \tag{4.104}$$

这表明 $\{x_n\}$ 有界.

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 集合 $\{x_n : n \ge k\}$ 非空且有界, 有确界定理可知上确界和下确界都存在, 记

$$a_k = \inf\{x_k : k \ge n\} \tag{4.105}$$

$$b_k = \sup\{x_k : k \ge n\} \tag{4.106}$$

注意到 $\{a_k\}$ 递增, $\{b_k\}$ 递减 [4] , 特别地,

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le b_k \le b_{k-1} \le \cdots \le b_1. \tag{4.107}$$

这表明 $\{a_k\}$ 递增且有上界 b_1, $\{b_k\}$ 递减且有下界 a_1. 由 MCT 知这两个数列的极限都存在, 记 $\lim_{k\to\infty} a_k = A$, $\lim_{k\to\infty} b_k = B$. 并且有 $A \le B$.

[4]因为若 $F \subset E$ 则 $\inf F \ge \inf E$, $\sup F \le \sup E$.

由 Cauchy 列的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall m, n \geq k$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

所以, $\forall N \geq k$, ε 是集合 $\{x_m - x_n | \forall m, n \geq N\}$ 的上界, 我们可以得到

$$\varepsilon \geq \sup\{x_m - x_n | \forall m, n \geq N\} = b_N - a_N, \forall N \geq k. \tag{4.108}$$

取极限, 得到极限不等式

$$\varepsilon \geq \lim_{N\to\infty} (b_N - a_N) = B - A. \tag{4.109}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $B - A \leq \varepsilon$, 又因为 $B \geq A$, 我们发现 $A = B \equiv L$.

最后由于 $a_k \leq x_k \leq b_k$, $\forall k$, 由夹逼定理可得 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L. □

从以上证明中可以提炼出上下极限的概念.[5]

定义 4.7. *对于任何实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 考虑 $b_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$(若 $\{x_k : k \geq n\}$ 有上界, 则可定义 $b_n \in \mathbb{R}$, 若无上界, 则形式化定义 $b_n = +\infty$.)*

- *若所有 $b_n = +\infty$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = +\infty$.*
- *若 $\exists b_n \in \mathbb{R}$, 则所有 $b_n \in \mathbb{R}$, 且 $\{b_n\}$ 递减. 这有两种情况.*
  1. *若 $\{b_n\}$ 有下界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在, 称其值为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为*
  $$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup\{x_k : k \geq n\}\Big) \in \mathbb{R}. \tag{4.110}$$
  2. *若 $\{b_n\}$ 无下界, 约定*
  $$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = -\infty. \tag{4.111}$$

总结起来, 上下极限的定义为

$$\lim_{n\to\infty} \sup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\{x_k : k \geq n\}\right), \tag{4.112}$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\left(\{x_k : k \geq n\}\right). \tag{4.113}$$

命题 4.3. *$\{x_n\}$ 收敛等价于上下极限存在且相等.*

例 4.11 (来自以后极限收敛的例子)**.** *考虑*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k^2}, \tag{4.114}$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

[5] 以后幂级数收敛半径 Cauchy-Hadamand 公式涉及上极限.

证明. 用 Cauchy 收敛原理验证, 只要证 x_n 是一个 Cauchy 列.

为此对于 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 从而 $\forall m > n \geq N$, 有

$$|x_m - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\sin(k\theta)}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \tag{4.115}$$

□

4.5 度量空间

4.5.1 基本概念

定义 4.8. *所谓集合 X 上的一个度量, 是指映射*

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto d((x,y)) \end{aligned} \tag{4.116}$$

需要满足

- *对称性 $d(x,y) = d(y,x) \ \ \forall x,y \in X$*
- *正定性 $d(x,y) \geq 0 \ \ \forall x,y \in X$, 且 $d(x,y) = 0 \iff x = y$.*
- *三角不等式 $\forall x,y,z \in X$ 有 $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.*

称 (X,d) 为一个度量空间.

例 4.12. 对于 $X = \mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$,

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}. \tag{4.117}$$

多元微积分中使用此度量.

定义 4.9. *称 $\{x_n\}$ 收敛到某点 $L \in X$(记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$), 若*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_+ \ \forall n > N \text{ 有} d(x_n, L) < \varepsilon, \tag{4.118}$$

这等价于

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, L) = 0. \tag{4.119}$$

定义 4.10. *称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个 Cauchy 列, 若*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{Z}_+ \ \forall m,n \geq N \text{ 有} d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{4.120}$$

定义 4.11. *称一个度量空间 (X,d) 是完备的 (complete), 如果 X 中的任何 Cauchy 列都收敛 (到 X 中的某点).*

例 4.13. $\left(\mathbb{R}^n, d(x,y)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}\right)$ 是完备的度量空间.

例 4.14. $(\mathbb{Q}, d(x,y)=|x-y|)$ 是不完备的.
理由 取一个有理数序列 $\{x_n\in\mathbb{Q}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.$\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 但 $\{x_n\}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中无极限.

4.5.2 实数的另一种定义

我们用 Cauchy 列可以给出 $\mathbb{R}$ 的另一个定义.

定义 4.12. *一个实数为"有理数 Cauchy 列的等价类".*

定义 4.13. *两个 $\mathbb{Q}$ 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 于 $\{y_n\}$ 等价, 如果*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{Z}_+,\ \forall n\geq N\ \text{有}|x_n-y_n|<\varepsilon. \tag{4.121}$$

定理 4.8 (压缩映射定理)**.** *设 (X,d) 是完备的度量空间, 设 $T\colon X\to X$ 是压缩映射 (即 $\exists c\in(0,1)$ 使 $\forall x,y\in X$ 有 $d(T(x),T(y))\leq c\cdot d(x,y)$), 则 T 有唯一的不动点.*

证明. 任取 $x_0\in X$, 定义 $x_n=\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T(x_0)}_{n\text{ 个}T}=T(x_{n-1})$.

- 断言 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 Cauchy 列. 为此, $\forall m>n$,

$$\begin{aligned}d(x_n,x_m)=d(T^nx_0,T^mx_0)&\underset{\text{压缩}}{\leq}c^nd(x_0,x_{m-n})\\&\underset{\text{三角不等式}}{\leq}c^n\left(d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+\cdots+d(x_{m-n-1},x_{m-n})\right)\\&=c^n\frac{1-c^{m-n}}{1-c}d(x_0,x_1)\\&<\frac{c^n}{1-c}d(x_0,x_1)<\frac{c^N}{1-c}d(x_0,x_1)\\&<\varepsilon\quad(\text{只要 }N\text{ 足够大})\end{aligned}\tag{4.122}$$

- 由 (X,d) 完备可知, 前述 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y_0$, 来证 y_0 是 T 的不动点.

  证明. 考虑不等式

$$\begin{aligned}0\leq d(T(y),x_n)&=d(T(y),T(x_{n-1}))\\&\leq c\cdot d(T(y),x_{n-1})\end{aligned}\tag{4.123}$$

由夹逼定理知,

$$\lim_{n\to\infty} d(T(y), x_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} x_n = T(y). \tag{4.124}$$

结合

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y, \tag{4.125}$$

可得

$$T(y) = y. \tag{4.126}$$

□

- T 的不动点唯一.

证明. 设 $T(y) = y$, $T(z) = z$, 则

$$d(y,z) = d(T(y), T(z)) \le c \cdot d(y,z) \implies y = z. \tag{4.127}$$

□

结合起来, T 有不动点且不动点唯一. □

5 函数极限

定义 5.1. *称当 $x \to x_0$ 时, $f(x) \to L$(记为 $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$), 如果*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall |x - x_0| < \delta \text{ 时有} |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

这个定义并不要求 $f(x_0)$ 的行为, $f(x_0)$ 甚至可以无定义.

我们引入记号: 开球邻域 $B_r(x_0) = \{x | d(x, x_0) < r\}$, 去心开球邻域 $B_r^*(x_0) = B_r(x_0)/\{x_0\}$.

定义 5.2. *如果 f 在 x_0 的某个去心邻域有定义, 称当 $x \to x_0$ 时, f 以 L 为极限 (记为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = L$) 如果*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \text{使得} \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 都有} |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

这个定义使用了 $\varepsilon - \delta$ 语言.

$x \to x_0$ 时, $f(x)$ 以 L 为极限

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall |x - x_0| < \delta \text{ 有} |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$x \to x_0$ 时, $f(x)$ 不以 L 为极限

$$\iff \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0,\ \exists |x - x_0| < \delta \text{ 有} |f(x) - L| \ge \varepsilon.$$

定义 5.3. 左极限:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ \forall-\delta<x-x_0<0\ 有|f(x)-L|<\varepsilon. \tag{5.3}$$

右极限, 正负无穷极限同理.

命题 5.1. f 在 x_0 处有极限等价于 f 在 x_0 的左右极限存在且相等.

证明. 证明是直接的. □

类似地, 引入符号

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \iff \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=L. \tag{5.4}$$

我们会想问, 函数极限和序列极限有什么关系?

定理 5.1 (Heine)**.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ 的充要条件为, 对于任何的以 x_0 为极限且项项不等于 x_0 的序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

证明. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

为此用反证法, 假设 f 不以 L 为极限但试探数列的极限为 L, 即

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0,\ \exists 0<|x-x_0|<\delta\ 使|f(x)-L|>=\varepsilon. \tag{5.5}$$

(这包含无穷个断言, 因为每一个 δ 给出一个 x.) 这样 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$, $\delta=\frac{1}{n}$ $\exists x$(记为 x_n) 满足 $0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$.

但是 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$, 与 $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon$ 矛盾! □

上述的定理常常用于判断极限的存在性, 如果能找到两个序列 $\{x_n\}\to x_0$ 和 $\{y_n\}\to x_0$, 但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(y_n)$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

例 5.1. 当 $\alpha>0$ 时, $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{s^{\alpha}}$. 来证这个极限不存在.

证明. 反证法, 设 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^{\alpha}}=L$, 考虑

$$\left\{x_n=\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{1}{2}\pi}\right)^{\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.6}$$

我们有

$$x_n\neq 0\ \forall n,\ \lim_{n\to\infty} x_n=0. \tag{5.7}$$

取另一个序列

$$\left\{y_n=\left(\frac{1}{2n\pi+\frac{3}{2}\pi}\right)^{\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.8}$$

我们发现, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=1,\ \lim_{n\to\infty} f(y_n)=-1$, 由 Heine 定理可知, 极限不存在. □

5.1 函数极限的性质与计算方法

命题 5.2 (保持极限不等式[6])**.** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, 则

$$\exists\delta>0\ \forall 0<|x-x_0|<\delta\ \text{有} f(x)<g(x)\,. \tag{5.9}$$

命题 5.3. 设 $f(x)\le g(x)\ \ \forall 0<|x-x_0|<r$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)\,. \tag{5.10}$$

命题 5.4. 若 $f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域中有界.

证明. 由于 $L-1<\lim_{x\to x_0} f(x)<L+1$ 由命题5.2可知 $\exists\delta>0$, $\forall 0<|x-x_0|<\delta$ 有,

$$L-1<f(x)<L+1\ \ \forall x\in B_\delta(x_0) \tag{5.11}$$

说明 $f(X)$ 在 $B_\delta(x)$ 中有界. □

定理 5.2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B, \tag{5.12}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\,g(x))=AB \tag{5.13}$$

$$\text{当 } B\neq 0 \text{ 时} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} \tag{5.14}$$

定理 5.3 (单调收敛定理)**.** 设 f 在 $[x_0-r,x_0)$ 时递增且有上界的 *(或递减且有下界)*, 则

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \tag{5.15}$$

存在.(右极限同理)

定理 5.4 (Cauchy 收敛准则)**.** 设 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, 使得

$$\forall x,y\in B_\delta(x_0)^* \tag{5.16}$$

都有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{5.17}$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

[6]这和数列极限中的充分大指标的项保持极限不等式 (命题4.1) 是一致的

证明. • 先证 f 在 x_0 的某去心邻域中有界. 由条件, 对 $\varepsilon = 1$, $\exists r > 0, \forall x, y \in B_{2r}(x_0)^*$ 有 $|f(x) - f(y)| < 1$.

取 $y = x + \frac{r}{2}$, 可知 $\left|f(x) - f\left(x_0 + \frac{r}{2}\right)\right| < 1$, $\forall x \in B_{2r}(x_0)^*$, 说明 f 在 $B_{2r}(x_0)^*$ 中有界.

•

□

5.2 函数极限的计算方法

从定义/夹逼定理/四则运算/复合极限定理

定理 5.5. 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0. \tag{5.18}$$

但这个定理是错的. 有两种修正办法:

1. 在 x_0 的某个去心邻域 $B_\delta(x_0)$ 中, 有 $f(x) \neq y_0$.
2. 若 $g(y_0) = z_0$, 上述定理没有问题.