# 高等微积分笔记

mny

2023 年 9 月 20 日

## 目录



# 1 微积分简介

## 1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq h(x)\}$ 求曲边梯形 $D$ 的面积 $\operatorname{area}(D)$.
特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\operatorname{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})\, h(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\operatorname{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i)\, h(\xi) \tag{1.1}$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

**例 1.1.** $h(x)=x^2$

$$\operatorname{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} h\left(\xi_i=x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2=\frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{1.2}$$

$$=\frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \tag{1.3}$$

$$=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \tag{1.4}$$

$$=\frac{b^3}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \xlongequal{\text{记为}} x_n \tag{1.5}$$

*研究: 当 $n$ 越大时, $x_n$ 最终会靠近哪个常值 $L$*

**例 1.2.** $h(x)=x^k, \quad (k \geq 2)$ 相应的

$$\operatorname{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k \tag{1.6}$$

*更接近哪个数 $L$? 对于更一般 $h$, 以上计算更加复杂.*

## 1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

$x$ 流动到 $x+o$,

$$S(x+o)-S(x) \simeq o \cdot h(x) \tag{1.7}$$

$$\Longrightarrow h(x) \simeq \frac{S(x+o)-S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) \tag{1.8}$$

相信当 $o$ 越接近零, 此近似越好.

**例 1.3.** $S(a)=a^m, \quad (m \in \mathbb{Z}_+)$

$$\Longrightarrow h(x) \simeq \frac{(x+o)^m-x^m}{o} \tag{1.9}$$

*使用牛顿二项式公式*

$$(x+y)^m=x^m+C_m^1 x^{m-1} y+\cdots+C_m^m y^m \tag{1.10}$$

*带入, 得到*

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1}+C_m^2 x^{m-2} o \cdots+C_m^m o^{m-1} \xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a)=\frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b)=\int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x)=S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)'=h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x=S(b)-S(0) \tag{1.13}$$

# 2 集合与映射

**定义 2.1.** *设 $X,Y$ 是集合, 所谓 $X$ 到 $Y$ 的一个映射是指如下的数据*

*对于 $X$ 中的每一个元素 $x$, 指定 $Y$ 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为*

$$f\colon X\to Y \tag{2.1}$$

*(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)*

*称 $X$ 为 $f$ 的定义域 domain, $Y$ 为 $f$ 的陪域 co-domain.*

$$\forall A\subseteq X,\quad f(A)=\{y\in Y|\exists a\in A使y=f(a)\} \tag{2.2}$$

*称之为 $A$ 在 $f$ 下的像集. 特别的, 称 $f(X)=\mathrm{Im}(f)$ 为 $f$ 的值域或像集.*

**定义 2.2.** *原像集. 对 $V\subseteq Y$, 定义在 $f$ 下的原像集*

$$f^{-1}(V)=\{x\in X|f(x)\in V\} \tag{2.3}$$

*对于 $V$ 的补集 $V^c$ 显然有,*

$$f^{-1}(V^c)=\left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

## 2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to Z$, 可定义复合映射 $g\circ f\colon X\to Z$,

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right),\quad \forall x\in X \tag{2.5}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X\to Y,\ g\colon Y\to Z,\ h\colon Z\to W$, 则

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \tag{2.6}$$

证明是直接的.

- 对于集合 $X$ 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X \to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X \tag{2.7}$$

对于两个集合 $X, Y$, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \left\{ \text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射} \right\} \tag{2.8}$$