

高等微积分笔记

mny

2023 年 10 月 13 日

目录

1	微积分简介	2
1.1	阿基米德时代	2
1.2	Newton 时代	3
2	集合与映射	3
2.1	映射的性质	4
2.2	范畴中的映射	5
3	实数	7
3.1	戴德金分割	8
3.2	确界定理	9
3.3	确界定理应用	11
4	数列极限	12
4.1	极限的性质	14
4.2	极限的计算方法	16
4.2.1	从定义直接计算	16
4.2.2	极限的四则运算	17
4.2.3	夹逼定理	18
4.2.4	Stolz 定理	21
4.3	单调极限定理	21
4.4	柯西收敛准则	25
4.5	度量空间	27
4.5.1	基本概念	27

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\text{area}(D)$.

特例: $a = 0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\text{area}(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})h(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i) h(\xi) \quad (1.1)$$

- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x) = x^2$

$$\text{area}(D) \simeq \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} h(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \quad (1.2)$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad (1.3)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.4)$$

$$= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{\text{记为}} x_n \quad (1.5)$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x) = x^k$, ($k \geq 2$) 相应的

$$\text{area}(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k \quad (1.6)$$

更接近哪个数 L ? 对于更一般 h , 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?

x 流动到 $x + o$,

$$S(x + o) - S(x) \simeq o \cdot h(x) \quad (1.7)$$

$$\implies h(x) \simeq \frac{S(x + o) - S(x)}{o} \quad (\text{流数法}) \quad (1.8)$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a) = a^m$, ($m \in \mathbb{Z}_+$)

$$\implies h(x) \simeq \frac{(x + o)^m - x^m}{o} \quad (1.9)$$

使用牛顿二项式公式

$$(x + y)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} y + \cdots + C_m^m y^m \quad (1.10)$$

带入, 得到

$$h(x) \simeq C_m^1 x^{m-1} + C_m^2 x^{m-2} o \cdots + C_m^m o^{m-1} \xrightarrow{\text{令 } o \text{ 等于零}} m x^{m-1} \quad (1.11)$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a) = \frac{1}{k+1} a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b) = \int_0^b h(x) dx$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x) = S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi) d\xi \right)' = h(x) \quad (1.12)$$

和

$$\int_0^b S'(x) dx = S(b) - S(0) \quad (1.13)$$

2 集合与映射

定义 2.1. 设 X, Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据

对于 X 中的每一个元素 x , 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.1)$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 *domain*, Y 为 f 的陪域 *co-domain*.

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A) = \{y \in Y \mid \exists a \in A \text{ 使 } y = f(a)\} \quad (2.2)$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X) = \text{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. 原像集. 对 $V \subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} = \bigcup_{y \in V} F_y \quad (2.3)$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c \quad (2.4)$$

显然有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad (2.5)$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, 可定义复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$,

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X \quad (2.6)$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.7)$$

证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\text{id}_X: X \rightarrow X$, 定义为 $\text{Id}_X(x) = x$, $\forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f: X \rightarrow Y$ 有

$$\text{id}_Y \circ f = f = f \circ \text{id}_X \quad (2.8)$$

对于两个集合 X, Y , 存在一个集合

$$\text{Hom}(X, Y) = \{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\} \quad (2.9)$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. 所谓一个范畴 (Category) \mathcal{C} 是指如下一个数据:

- 对象 X, Y, Z^1 , 构成 *object* $\text{Obj}(\mathcal{C})$
- 对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, 称 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 \mathcal{C} 中的一个态射 (*morphism*), 记 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为

$$f: X \rightarrow Y \quad (2.10)$$

- 态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.11)$$

记为

$$(f, g) \rightarrow g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.12)$$

- 态射复合是结合的, 即 $\forall X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 设

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), \quad (2.13)$$

有 (结合律)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (2.14)$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \quad (2.15)$$

- 态射的复合是有单位元的, 对任何对象 $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, 指定态射

$$\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \quad (2.16)$$

满足, 对 $\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, 有

$$f \circ \text{id}_X = f, \text{id}_Y \circ g = g \quad (2.17)$$

例 2.1. 范畴 Set , 其中的对象是集合 X, Y , 此时

- 态射 \longleftrightarrow 映射

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X, Y) = \{ \text{映射 } f: X \rightarrow Y \} \quad (2.18)$$

¹在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合 \longleftrightarrow 映射复合

- $\text{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 向量空间 $Vect$: 对象是线性空间, 态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 Top : 对象是拓扑空间, 态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中). 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x', \text{ 有 } f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ 使 } f(x) = y$.
- 双射 \iff 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f: X \rightarrow Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{ 映射 } g: Y \rightarrow X, \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \quad (\text{只在集合当中适用}) \quad (2.19)$$

一般的范畴中:

$$\iff \forall \text{ 集合 } W, \forall \text{ 映射 } g_1, g_2: W \rightarrow X, \text{ 若 } f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{ 则有 } g_1 = g_2 \quad (2.20)$$

- 满射

$$\iff \forall \text{ 集合 } Z, \forall \text{ 映射 } h_1, h_2: Y \rightarrow Z. \text{ 若有 } h_1 \circ f = h_2 \circ f, \text{ 则有 } h_1 = h_2 \quad (2.21)$$

定理 2.1. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 是双射 $\iff \exists \text{ 映射 } g: Y \rightarrow X \text{ 使 } g \circ f = \text{id}_X \text{ 且 } f \circ g = \text{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

“ \implies ”:

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g .

“ \impliedby ”:

设 $\exists g: Y \rightarrow X$ 使

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.22)$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \quad (2.23)$$

即

$$x = x' \quad (2.24)$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y, f[g(y)] = f \circ g(y) = \text{id}_Y(y) = y \quad (2.25)$$

所以 $y \in \text{Im } f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 \mathcal{C} 中, 称态射 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad (2.26)$$

使得

$$g \circ f = \text{id}_X \text{ 且 } f \circ g = \text{id}_Y \quad (2.27)$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 \exists 同构态射 $f: X \rightarrow Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2: Y \rightarrow X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1. \quad (2.28)$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \dots$

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \quad (3.1)$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s, t) | s \in S, t \in T\} \quad (3.2)$$

引入了乘法.

加法在 \mathbb{N} 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 \mathbb{Z} . 但 \mathbb{Z} 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+$), 将 \mathbb{Z} 扩充为 \mathbb{Q} ².

²这些“逆”都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x) dx = \{ \text{所有 } F(x) | F' = f \}. \quad (3.3)$$

命题 3.1. $\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2 = 2$ 的正数).

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n 无公因子. 则 $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

$m^2 = 2n^2$ 说明 m 是偶数, 代入发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 \mathbb{Q} 需要进一步扩充.

命题 3.2. x 是有理数 $\iff x$ 是有限或无限循环小数.³

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. 所谓戴德金分割是指一个有序对 (A, B) , 满足:

- A, B 是 \mathbb{Q} 的非空子集.
- $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$
- $\forall x \in A, \forall y \in B$, 有 $x < y$
- 集合 A 无最大元素.

称两个戴德金分割 $(A, B) = (A', B') \iff A = A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D = \{\text{所有戴德金分割}\} \quad (3.4)$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a, B_a), \text{ 其中 } A_a = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq a\} \quad (3.5)$$

- 序.

定义 $(A, B) \leq (A', B') \iff A \subseteq A'$

- 和.

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', \mathbb{Q} / (A + A')) \quad (3.6)$$

- 称一个戴德金实数 (A, B) 为一个戴德金有理数 $\iff A$ 有最大元素.

以上定义好实数集 \mathbb{R} , 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

³小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E \in \mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x \in E, x \leq a$, 记为 $a = \max E$

最小元素: $a = \min E \iff a \in E$ 且 $\forall x \in E$ 有 $x \geq a$

定义 3.4. 上界和下界.

称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.

称 d 为 E 的一个下界, 如果 $\forall x \in E$ 有 $x \geq d$.

定义 3.5. 确界.

称 c 是 E 的上确界 (*supremum*), 记作 $c = \sup E$, 如果 c 是 E 的最小的上界.

$\iff c = \min\{E \text{ 的上界}\}$

称 d 是 E 的下确界 (*infimum*), 记作 $d = \inf E$, 如果 d 是 E 的最大的下界.

$\iff d = \max\{E \text{ 的下界}\}$

命题 3.3. 任意非空实数集 F , $\min F, \max F$ 未必存在.

例 3.1. $F = (0, 1)$, 则 $\min F, \max F$ 皆不存在.

证明. 因为

$$\forall a \in F \implies \frac{a}{2} \in F \implies a \text{ 不是最小元素}, \quad (3.7)$$

$$\forall b \in F \implies \frac{b+1}{2} \in F \implies b \text{ 不是最大元素}. \quad (3.8)$$

□

这样, 从字面上有

- 若 E 无上界, 则 E 无上确界.
- 若 E 有上界, $\{E \text{ 上界}\}$ 非空, 是否有最小元素需要证明.

定理 3.1 (确界定理). 有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E = \{x_\alpha = \text{戴德金分割 } (A_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in \text{指标集 } \Lambda\} \quad (3.9)$$

已知 E 有上界 $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B})$, $(\tilde{A} \subsetneq \mathbb{Q})$.

由 $\forall \alpha, \tilde{c} \geq x_\alpha$, 根据定义有

$$\forall \alpha, \tilde{A} \supseteq A_\alpha \implies \tilde{A} \supseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \xrightarrow{\text{定义为}} \{y | \exists \alpha \in \Lambda \text{ 使 } y \in A_\alpha\} \quad (3.10)$$

令 $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ (A 必是 \mathbb{Q} 的非空真子集).

考虑 $(A, B = \mathbb{Q}/A)$, 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

$$\forall x \in A, \exists \alpha \text{ 使 } x \in A_\alpha \quad (3.11)$$

而且

$$B = \left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha \right)^C = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^C = \bigcap_{\alpha} B_\alpha \implies \forall y \in B, \forall \alpha, y \in B_\alpha \quad (3.12)$$

即我们可以找到一个 α ,

$$x \in A_\alpha, y \in B_\alpha \implies x < y. \quad (3.13)$$

- 定义中的第四条: 要证 A 中无最大元, 采用反证法.

若 A 中有最大元, 记为 z , 则

$$z \in A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha \implies \exists \alpha \text{ 使 } z \in A_\alpha. \quad (3.14)$$

由于 z 是 A 最大元, 并且 $A_\alpha \subseteq A$, z 也是 A_α 最大元, 矛盾.

这样 $y = (A, B) = (\bigcup_{\alpha} A_\alpha, \bigcup_{\alpha} B_\alpha)$ 是一个戴德金实数, 我们可以断言 $y = \sup E$, 分为两部分内容:

- y 是 E 上界 $\iff y \geq x_\alpha \iff A \supseteq A_\alpha, \forall \alpha$ 显然成立.
- $y \leq E$ 的任何上界 $z \xrightarrow{\text{记为}} (A_0, B_0)$, 由 z 是上界可知,

$$\forall \alpha, A_0 \supseteq A_\alpha \implies A \supseteq \bigcup_{\alpha} A_\alpha = A \implies z > y. \quad (3.15)$$

□

命题 3.4 (判断上确界). $C = \sup E$ 等价于下列两点同时成立:

1. $\forall x \in E$ 有 $x \leq c$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E$ 使 $x \geq c - \varepsilon$.

定义 3.6. 称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界. $\iff \exists k > 0$ 使 $\forall x \in E$ 有 $|x| \leq k$

例 3.2. 设 E 是有界的非空实数集, 则

$$\sup\{x - y | x, y \in E\} = \sup E - \inf E. \quad (3.16)$$

证明. 记 $F = \{x - y | x, y \in E\}$, 可知 F 非空有界.

由确界定理知, $\sup F, \sup E, \inf E$ 皆存在, 有

- $\sup E - \inf E$ 是 F 的上界, 因为 $\forall x, y \in E$, 有 $x \leq \sup E, y \geq \inf E$, 所以

$$x - y \leq \sup E - \inf E. \quad (3.17)$$

说明 $\sup E - \inf E$ 不小于 F 的任何成员, 是上界.

- 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\sup E - \frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 上界, $\inf E + \frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 下界.

$$\exists x, y \in E, x - y > \sup E - \inf E - \varepsilon \quad (3.18)$$

说明 $\forall \varepsilon > 0$, $\sup E - \inf E - \varepsilon$ 不是 F 上界.

所以 $\sup E - \inf E = \sup F$. □

3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

命题 3.5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}$ 使 $x < n$.

证明. 反证法. 假设结论不对, 则 $x \geq n, \forall n \in \mathbb{Z}$, 即 x 是 \mathbb{Z} 的一个上界. 这说明 \mathbb{Z} 非空且有上界.

由确界定理知, $\sup \mathbb{Z}$ 存在, 记 $M \equiv \sup \mathbb{Z}$, 那么

$$n + 1 \in \mathbb{Z} \implies n + 1 \leq M \implies n \leq M - 1. \quad (3.19)$$

这与 $M = \sup \mathbb{Z}$ 矛盾. □

命题 3.6. 任何两个实数 $a < b$ 之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数 $\frac{m}{n} \in (a, b)$

对于 $x = \frac{1}{b-a}$, 由命题3.5结论可知,

$$\exists n \in \mathbb{Z}, n > \frac{1}{b-a}. \quad (3.20)$$

对于 $y = nb$, 由命题3.5的结论可知, $m_1 \in \mathbb{Z}$, $m_1 > y$, 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \quad (3.21)$$

对于 $z = -na$, 由命题3.5的结论可知, $\exists m \in \mathbb{Z}$, $m > -na$, 记 $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$, 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \quad (3.22)$$

这样总能找到整数 m_0, m_1 使 $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$. 于是在 m_0 和 m_1 之间总有一个 m 满足 $a < \frac{m}{n} < b$. \square

4 数列极限

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑 n 越来越大的时候, x_n 是否趋近于某个值 L . 我们需要定义越来越接近这个概念.

定义 4.1. 所谓一个无穷序列, 是指一个映射 $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, 记为

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \quad (4.1)$$

称 x_n 为其第 n 项.

定义 4.2. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限 (*limit*), (记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$) 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\forall n > N$ 总有 $|x_n - L| < \varepsilon$.

也称当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 趋于 L .

这种定义称为 $\varepsilon - N$ 语言.

“ $\{x_n\}$ 以 L 为极限” 可以表示为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{ 使得 } \forall n \geq N \text{ 有 } |x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

“ $\{x_n\}$ 不以 L 为极限” 可以表示为

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{ 使 } |x_n - L| \geq \varepsilon. \quad (4.3)$$

定义 4.3. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的, 如果 \exists 实数 L , 使 $\{x_n\}$ 以 L 为极限. 否则, 称 $\{x_n\}$ 发散.

“ $\{x_n\}$ 收敛” 可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, \text{ 有 } |x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.4)$$

“ $\{x_n\}$ 发散” 可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{ 使 } |x_n - L| \geq \varepsilon. \quad (4.5)$$

例 4.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 取正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (4.6)$$

□

例 4.2. 设 $a > 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$.

解 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 为此, $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则对 $\forall n \geq N$ 都有

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + N\varepsilon > a. \quad (4.7)$$

从而

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}. \quad (4.8)$$

可以得到

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon, \quad (4.9)$$

验证了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (4.10)$$

总结 $\forall a > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

例 4.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明. $\forall \varepsilon > 0$ 取 N 使 $\frac{N-1}{2}\varepsilon^2 > 1$, 则对于 $\forall n \geq N$ 有

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + C_n^1 \varepsilon + C_n^2 \varepsilon^2 + \cdots \geq C_n^2 \varepsilon^2. \quad (4.11)$$

$$\geq \frac{(n+1)n}{2} \varepsilon^2 \quad (4.12)$$

$$\geq \frac{N+1}{2} \varepsilon^2 n > 1 \cdot n \quad (4.13)$$

从而 $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, 得到

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon. \quad (4.14)$$

□

4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式). 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 则 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $a_n < b_n$.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 取 $\varepsilon = \frac{B-A}{2} > 0$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 定义知

$$\exists N_1 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_1 \text{ 有 } |a_n - A| < \varepsilon. \quad (4.15)$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 定义知

$$\exists N_2 \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N_2 \text{ 有 } |b_n - B| < \varepsilon. \quad (4.16)$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$a_n < A + \varepsilon = B - \varepsilon < b_n. \quad (4.17)$$

□

推论 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证明. 取 $q < r < 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lim_{n \rightarrow \infty} r. \quad (4.18)$$

由命题4.1可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$.

从而, $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \quad (4.19)$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \quad (4.20)$$

由于 $\frac{1}{r} > 1$, 记 $\frac{1}{r} = 1 + c$, ($c > 0$). 这样, 取 $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$, 对于 $\forall n \geq N_0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \quad (4.21)$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \quad (4.22)$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \quad (4.23)$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1 \text{ 或 } r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

推论 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 且 $a < B$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < B = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \quad (4.25)$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 满足 } a_n > a, \quad (4.26)$$

矛盾! □

推论 收敛的数列一定有界.

定义 4.4. 称数列有上界, 若 $\exists M$ 使 $\forall n, a_n \leq M$. 称数列有下界, 若 $\exists K$ 使 $\forall n, a_n \geq K$.

证明. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L < L + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} L + 1$, 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } x_n < L + 1. \quad (4.27)$$

所以

$$x_n \leq \max \{x_1, \dots, x_N, L + 1\}. \quad (4.28)$$

故有上界, 下界同理. □

推论 (极限不等式) 设 $a_n \leq b_n, \forall n \geq N_0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

证明. 反证法. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 由命题4.1可知, $\exists n \geq N$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注意! \leq 可过渡给极限式, 但 $<$ 不一定能.

例 4.4. $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

4.2 极限的计算方法

4.2.1 从定义直接计算

例 4.5. 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \text{当 } q > 1 \text{ 时.} \quad (4.29)$$

证法一

证明. 记 $x_n = \frac{n^k}{q^n}$, 注意到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k q^n}{q^{n+1} n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{k \text{ 个}} \cdot \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} < 1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

由命题4.1知 $\lim x_n = 0$. □

证法二 (从定义验证)

证明. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq \max \left\{ 2k, \frac{(k+1)! 2^k}{a^{k+1} \varepsilon} \right\}$. $\forall n \geq N$ 有 (记 $q = 1 + a$, $a > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{n^k}{q^n} &= \frac{n^k}{(1+a)^n} \leq \frac{n^k}{C_n^{k+1} a^{k+1}} \\ &= \frac{n^k (k+1)!}{n(n-1) \cdots (n-k) a^{k+1}} \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \frac{1}{n} \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{n-k} \\ &< \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} \frac{1}{n} 2 \cdot 2 \cdots 2 \\ &= \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} 2^k \frac{1}{n} \leq \frac{(k+1)!}{a^{k+1}} 2^k \frac{1}{N} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.31)$$

□

4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设 $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, 则

$$\lim(a_n + b_n) = A + B \quad (4.32)$$

$$\lim(a_n - b_n) = A - B \quad (4.33)$$

$$\lim a_n b_n = AB \quad (4.34)$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (\text{分母不为零}) \quad (4.35)$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (4.36)$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq |a_n - A| \cdot |b_n| + |A| \cdot |b_n - B| \quad (4.37)$$

- 由 $\{b_n\}$ 收敛知其有界, 即 $\exists M$ 使 $|b_n| \leq M, \forall n$.
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 知 $\exists N_1 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_1$ 有 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 知 $\exists N_2 \in \mathbb{Z}_1, \forall n \geq N_2$ 有 $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$.

从而, 令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 对 $n \geq N$, 代回(4.37)得

$$|a_n b_n - AB| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |A| \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.38)$$

这证明了 $\lim a_n b_n = AB$.

商

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| = \left| \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} \right| = \left| \frac{(a_n - A)B + A(B - b_n)}{b_n B} \right| \quad (4.39)$$

$$\leq \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A| \cdot |B - b_n|}{|b_n| |B|}. \quad (4.40)$$

- 由 $B \neq 0$, 不妨设 $B > 0$. 由命题4.1知 $\exists M \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq M$ 有 $b_n > \frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 知 $\exists N_2, \forall n \geq N_2$ 有 $|a_n - A| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{B}{2}$

- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ 知 $\exists N_3, \forall n \geq N_3$ 有 $|b_n - B| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

$\forall \varepsilon > 0$ 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 对 $\forall n \geq N$ 有 (代回(4.39))

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2} \frac{B}{2}}{\frac{B}{2}} + \frac{|A| \frac{\varepsilon}{2} \frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2} B} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4.41)$$

□

推论 有限次四则运算和极限可交换.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{i,k} = \sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} \quad (4.42)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n x_{i,k} \right) = \prod_{i=1}^n \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} \right) \quad (4.43)$$

证明. 只需 $k-1$ 次使用前述定理.

□

注意 无限和/无限积与极限未必可交换.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,k} \neq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} \right) \quad (4.44)$$

例 4.6. 对于一个下表这样一个数列 $x_{i,k}$,

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	\dots
$i=1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=3$	0	0	$\frac{1}{3}$	
\vdots				

纵向求和, 值是 1, 但先取极限 $k \rightarrow \infty$ 每一项都变为零, 再纵向求和, 值是 0.

类似地, 有例子表明无限乘积与极限未必可交换.

4.2.3 夹逼定理

定理 4.2. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($\forall n \geq N_0$), 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \quad (4.45)$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在且等于 L .

证明. 对于左右两边的数列极限,

- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1, \text{有 } |a_n - L| < \varepsilon \quad (4.46)$$

从而

$$L - \varepsilon < a_n \quad (4.47)$$

- 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2, \text{有 } |c_n - L| < \varepsilon \quad (4.48)$$

从而

$$c_n < L + \varepsilon \quad (4.49)$$

结合起来, $\forall n \geq \max\{N_i\}$, 有 $L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$. \square

例 4.7. 计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{n^k} = a_k \quad (4.50)$$

因为

$$LHS = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k} \right) \quad (4.51)$$

$$= \lim a_k + \lim \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots \quad (4.52)$$

$$= a_k + 0 + \cdots = a_k. \quad (4.53)$$

例 4.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \cdots + b_0} \quad (4.54)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{n^k} \frac{n^l}{b_l n^l + \cdots + b_0} n^{k-l} \right) \quad (4.55)$$

$$= \begin{cases} a_k \cdot \frac{1}{b_l} \cdot 0 = 0, & k < l \\ a_k \cdot \frac{1}{b_l} \cdot 1 = 0, & k = l \\ \text{不存在 (由引理),} & k > l \end{cases} \quad (4.56)$$

引理 4.1. 设

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= X \neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= Y \neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n &\text{不存在},\end{aligned}\tag{4.57}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n) \text{ 不存在. }\tag{4.58}$$

证明. 反证法, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n) = L$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(x_n y_n z_n) \frac{1}{x_n} \frac{1}{y_n} \right] \tag{4.59}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n z_n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} \tag{4.60}$$

$$= L \cdot X \cdot Y. \tag{4.61}$$

与条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 不存在 矛盾! □

例 4.9. 设 a_1, a_2, \dots, a_k 是正数, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.62}$$

解 不妨设 $a_1 = \max\{a_i\}$, 有

$$(a_1^n)^{\frac{1}{n}} \leq (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} \leq (ka_1^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.63}$$

注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n)^{\frac{1}{n}} = a_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_1^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} a_1 = a_1. \tag{4.64}$$

使用夹逼定理得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n, a_2^n, \dots, a_k^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_i\} \tag{4.65}$$

例 4.10. 进一步,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^{-n}, a_2^{-n}, \dots, a_k^{-n})^{-\frac{1}{n}} \tag{4.66}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_1} \right)^n + \dots + \left(\frac{1}{a_n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}} \tag{4.67}$$

$$= \frac{1}{\max\left\{ \frac{1}{a_i} \right\}} = \frac{1}{1/\min\{a_i\}} \tag{4.68}$$

$$= \min\{a_i\}. \tag{4.69}$$

4.2.4 计算极限的一个有用方法: Stolz theorem

定义 4.5. 称 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 如果对 $\forall k > 0$,

$$\exists n \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } x_n > k. \quad (4.70)$$

定理 4.3 (Stolz Theorem). 设 $\{b_n\}$ 严格单调递增且无上界 (或等价地说 $\lim b_n = +\infty$).

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L. \quad (4.71)$$

证明 Stolz 定理. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ 的定义可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, $\forall n \geq N$ 有

$$L - \varepsilon < \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} < L + \varepsilon \implies (L - \varepsilon)(b_{i+1} - b_i) < a_{i+1} - a_i < (L + \varepsilon)(b_{i+1} - b_i) \quad (4.72)$$

我们可以对上式对 i 从 N 到 $n-1$ 求和, 得到

$$(L - \varepsilon)(b_n - b_N) < a_n - a_N < (L + \varepsilon)(b_n - b_N) \quad (4.73)$$

$$\xrightarrow{\text{除以 } b_n} (L - \varepsilon) \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) + \frac{a_N}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (L + \varepsilon) \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right) + \frac{a_N}{b_n}. \quad (4.74)$$

同时注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_N}{b_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_N}{b_n} = 0 \quad (4.75)$$

由于命题4.1“充分大指标的项保持极限不等式”, 可知 $\exists N_0 \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall n > N_0$ 都有

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < 2\varepsilon. \quad (4.76)$$

□

4.3 单调极限定理 (Weierstrass 定理)(Monotone Converge Theorem)

定理 4.4 (单调极限定理). 有上界且递增的数列一定收敛; 有下界且递减的数列一定收敛.

证明. 设 $\{x_i\}$ 递增且有上界, 考虑单步点集

$$X = \{x_n | n \in \mathbb{Z}_+\}, \quad (4.77)$$

可知 X 非空且有上界, 由确界定理知, $\sup X$ 存在, 记为 L .

由 $\sup X = L$ 的定义知,

$$\forall \varepsilon > 0, L - \varepsilon \text{ 不是 } X \text{ 上界}, \quad (4.78)$$

即 $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $x_N > L - \varepsilon$, 从而对于 $\forall n \geq N$ 都有

$$L - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq L, \quad (4.79)$$

即

$$|x_n - L| < \varepsilon. \quad (4.80)$$

这表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$. □

定理 4.5 (Euler). $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在 (记为 e).

证明. 记 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- $\{x_n\}$ 有上界,

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} < 3 \end{aligned} \quad (4.81)$$

- $\{x_n\}$ 递增,

$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \uparrow} \cdot 1} \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}. \quad (4.82)$$

所以我们得到了

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \quad (4.83)$$

由单调极限定理可知, 极限存在, 称为自然常熟 e .

□

命题 4.2. 令 $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$

证明. 注意到 $\{y_n\}$ 递增且有上界, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 记为 Y .

由上例可知,

$$x_n \leq y_n \quad (\forall n) \implies e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y. \quad (4.84)$$

最后来证 $Y \leq e$. 我们固定一个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 对于 $\forall n \geq k$, 有

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\geq 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \cdots + C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \binom{n}{1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1}\right) + \cdots + \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

利用极限不等式可知,

$$\begin{aligned} e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} \frac{n}{n} + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k. \end{aligned} \quad (4.86)$$

之后再取极限可知

$$e \geq \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = Y. \quad (4.87)$$

□

定理 4.6. e 不是有理数.

证明. 我们需要使用一个引理.

引理 4.2. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$0 < e - y_n < \frac{2}{(n+1)!}. \quad (4.88)$$

证明. 一方面, $\forall m \geq n+1$, 有

$$y_m \geq y_{n+1}. \quad (4.89)$$

由极限不等式可知 $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m \geq y_{n+1}$, 从而

$$e \geq y_{n+1} > y_n \quad (4.90)$$

另一方面, $\forall m > n + 3$, 有

$$y_m - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \quad (4.91)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \right] \quad (4.92)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \quad (4.93)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{2}{n+2} \right) \quad (4.94)$$

$$\leq \frac{2}{(n+1)!}. \quad (4.95)$$

所以

$$e - y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_m - y_n) < \frac{2}{(n+1)!}. \quad (4.96)$$

□

对于定理4.6的证明, 我们采用反证法.

设 $e \in \mathbb{Q}$, $e = \frac{A}{B}$, 其中 $A, B \in \mathbb{Z}_+$. 由引理,

$$0 < e - y_2 < \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \quad (4.97)$$

这表明 $e \notin \mathbb{Z} \implies B \geq 2$.

再次使用引理, 有

$$0 < e - y_B < \frac{2}{(B+1)!}, \quad (4.98)$$

而

$$e - y_B = \frac{A}{B} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{B!} \right) \xrightarrow{\text{通分}} \frac{\text{整数}C}{B!}. \quad (4.99)$$

代回(4.98)可知

$$0 < \frac{C}{B!} < \frac{2}{(B+1)!} = \frac{1}{B!} - \frac{2}{B+1} < \frac{1}{B!}, \quad (4.100)$$

这表明

$$0 < C < 1. \quad (4.101)$$

与 $C \in \mathbb{Z}$ 矛盾!

□

4.4 柯西收敛准则

单调极限定理 (MCT) 的适用范围太小, 只能用于单调数列, 我们需要一般的判据.

要证 $\{x_n\}$ 有极限 L , 我们需要证当 n 无穷大时 $|x_n - L| < \varepsilon$, 但是如果猜不出 L , 往往无用. 我们只能比较大指标的 $|x_n - x_m|$.

定理 4.7 (Cauchy 收敛原理). 实数列 $\{x_n\}$ 收敛, 当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n \text{ 都有 } |x_m - x_n| < \varepsilon. \quad (4.102)$$

定义 4.6. 称 $\{x_n\}$ 为一个 *Cauchy* 列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

这样, 定理 4.7 可以表述为 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 *Cauchy* 序列.

Cauchy 收敛原理的证明. 从充分性和必要性两方面来证明.

先证 “ \Rightarrow ”:

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\forall m, n > N \text{ 有 } |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.103)$$

从而由三角不等式可得, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

再证 “ \Leftarrow ”:

首先 $\{x_n\}$ 有界, 因为对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别地, 有 $|x_n - x_{N+1}| < 1$. 于是我们得到

$$\min\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\}. \quad (4.104)$$

这表明 $\{x_n\}$ 有界.

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 集合 $\{x_n : n \geq k\}$ 非空且有界, 有确界定理可知上确界和下确界都存在, 记

$$a_k = \inf\{x_k : k \geq n\} \quad (4.105)$$

$$b_k = \sup\{x_k : k \geq n\} \quad (4.106)$$

注意到 $\{a_k\}$ 递增, $\{b_k\}$ 递减⁴, 特别地,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k \leq b_{k-1} \leq \cdots \leq b_1. \quad (4.107)$$

这表明 $\{a_k\}$ 递增且有上界 b_1 , $\{b_k\}$ 递减且有下界 a_1 . 由 MCT 知这两个数列的极限都存在, 记 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B$. 并且有 $A \leq B$.

⁴因为若 $F \subset E$ 则 $\inf F \geq \inf E$, $\sup F \leq \sup E$.

由 Cauchy 列的定义可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall m, n \geq k$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.
 所以, $\forall N \geq k, \varepsilon$ 是集合 $\{x_m - x_n | \forall m, n \geq N\}$ 的上界, 我们可以得到

$$\varepsilon \geq \sup\{x_m - x_n | \forall m, n \geq N\} = b_N - a_N, \forall N \geq k. \quad (4.108)$$

取极限, 得到极限不等式

$$\varepsilon \geq \lim_{N \rightarrow \infty} (b_N - a_N) = B - A. \quad (4.109)$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $B - A \leq \varepsilon$, 又因为 $B \geq A$, 我们发现 $A = B \equiv L$.

最后由于 $a_k \leq x_k \leq b_k, \forall k$, 由夹逼定理可得 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L . \square

从以上证明中可以提炼出上下极限的概念.⁵

定义 4.7. 对于任何实数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 考虑 $b_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ (若 $\{x_k : k \geq n\}$ 有上界, 则可定义 $b_n \in \mathbb{R}$, 若无上界, 则形式化定义 $b_n = +\infty$.)

- 若所有 $b_n = +\infty$, 记 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- 若 $\exists b_n \in \mathbb{R}$, 则所有 $b_n \in \mathbb{R}$, 且 $\{b_n\}$ 递减. 这有两种情况.

1. 若 $\{b_n\}$ 有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 称其值为 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup\{x_k : k \geq n\} \right) \in \mathbb{R}. \quad (4.110)$$

2. 若 $\{b_n\}$ 无下界, 约定

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty. \quad (4.111)$$

总结起来, 上下极限的定义为

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup(\{x_k : k \geq n\}), \quad (4.112)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf(\{x_k : k \geq n\}). \quad (4.113)$$

命题 4.3. $\{x_n\}$ 收敛等价于上下极限存在且相等.

例 4.11 (来自以后极限收敛的例子). 考虑

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k^2}, \quad (4.114)$$

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

⁵以后幂级数收敛半径 Cauchy-Hadamand 公式涉及上极限.

证明. 用 Cauchy 收敛原理验证, 只要证 x_n 是一个 Cauchy 列.

为此对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 从而 $\forall m > n \geq N$, 有

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin(k\theta)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad (4.115)$$

□

4.5 度量空间

4.5.1 基本概念

定义 4.8. 所谓集合 X 上的一个度量, 是指映射

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d((x, y)) \end{aligned} \quad (4.116)$$

需要满足

- 对称性 $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- 正定性 $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$, 且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- 三角不等式 $\forall x, y, z \in X$ 有 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

称 (X, d) 为一个度量空间.

例 4.12. 对于 $X = \mathbb{R}^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$,

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}. \quad (4.117)$$

多元微积分中使用此度量.

定义 4.9. 称 $\{x_n\}$ 收敛到某点 $L \in X$ (记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$), 若

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n > N \text{ 有 } d(x_n, L) < \varepsilon, \quad (4.118)$$

这等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, L) = 0. \quad (4.119)$$

定义 4.10. 称 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为一个 Cauchy 列, 若

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall m, n \geq N \text{ 有 } d(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (4.120)$$

定义 4.11. 称一个度量空间 (X, d) 是完备的 (*complete*), 如果 X 中的任何 *Cauchy* 列都收敛 (到 X 中的某点).

例 4.13. $(\mathbb{R}^n, d(x, y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2})$ 是完备的度量空间.

例 4.14. $(\mathbb{Q}, d(x, y) = |x - y|)$ 是不完备的.

理由 取一个有理数序列 $\{x_n \in \mathbb{Q}\}_{n=1}^\infty$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$. $\{x_n\}$ 是 *Cauchy* 列, 但 $\{x_n\}$ 在 \mathbb{Q} 中无极限.

4.5.2 实数的另一种定义

我们用 *Cauchy* 列可以给出 \mathbb{R} 的另一个定义.

定义 4.12. 一个实数为 "有理数 *Cauchy* 列的等价类".

定义 4.13. 两个 \mathbb{Q} 中的 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 等价, 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{ 有 } |x_n - y_n| < \varepsilon. \quad (4.121)$$

定理 4.8 (压缩映射定理). 设 (X, d) 是完备的度量空间, 设 $T: X \rightarrow X$ 是压缩映射 (即 $\exists c \in (0, 1)$ 使 $\forall x, y \in X$ 有 $d(T(x), T(y)) \leq c \cdot d(x, y)$), 则 T 有唯一的不动点.

证明. 任取 $x_0 \in X$, 定义 $x_n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \uparrow T}(x_0) = T(x_{n-1})$.

- 断言 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 是 *Cauchy* 列. 为此, $\forall m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) \underset{\text{压缩}}{\leq} c^n d(x_0, x_{m-n}) \\ &\underset{\text{三角不等式}}{\leq} c^n (d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \\ &= c^n \frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} d(x_0, x_1) \\ &< \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, x_1) < \frac{c^N}{1 - c} d(x_0, x_1) \\ &< \varepsilon \quad (\text{只要 } N \text{ 足够大}) \end{aligned} \quad (4.122)$$

- 由 (X, d) 完备可知, 前述 *Cauchy* 列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_0$, 来证 y_0 是 T 的不动点.

证明. 考虑不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(T(y), x_n) = d(T(y), T(x_{n-1})) \\ &\leq c \cdot d(T(y), x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.123)$$

由夹逼定理知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(T(y), x_n) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = T(y). \quad (4.124)$$

结合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y, \quad (4.125)$$

可得

$$T(y) = y. \quad (4.126)$$

□

- T 的不动点唯一.

证明. 设 $T(y) = y$, $T(z) = z$, 则

$$d(y, z) = d(T(y), T(z)) \leq c \cdot d(y, z) \implies y = z. \quad (4.127)$$

□

结合起来, T 有不动点且不动点唯一. □

5 函数极限

定义 5.1. 称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow L$ (记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$), 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta \text{ 时有 } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

这个定义并不要求 $f(x_0)$ 的行为, $f(x_0)$ 甚至可以无定义.

我们引入记号: 开球邻域 $B_r(x_0) = \{x | d(x, x_0) < r\}$, 去心开球邻域 $B_r^*(x_0) = B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$.

定义 5.2. 如果 f 在 x_0 的某个去心邻域有定义, 称当 $x \rightarrow x_0$ 时, f 以 L 为极限 (记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$) 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ 使得 } \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 都有 } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.2)$$

这个定义使用了 $\varepsilon - \delta$ 语言.

$x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 以 L 为极限

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta \text{ 有 } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 不以 L 为极限

$$\iff \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, \exists |x - x_0| < \delta \text{ 有 } |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

定义 5.3. 左极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall -\delta < x - x_0 < 0 \text{ 有 } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (5.3)$$

右极限, 正负无穷极限同理.

命题 5.1. f 在 x_0 处有极限等价于 f 在 x_0 的左右极限存在且相等.

证明. 证明是直接的. □

类似地, 引入符号

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L. \quad (5.4)$$

我们会想问, 函数极限和序列极限有什么关系?

定理 5.1 (Heine). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 的充要条件为, 对于任何的以 x_0 为极限且项项不等于 x_0 的序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

证明. 必要性是显然的, 下面证明充分性.

为此用反证法, 假设 f 不以 L 为极限, 即

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0, \exists 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 使 } |f(x) - L| \geq \varepsilon. \quad (5.5)$$

(这包含无穷个断言, 因为每一个 δ 给出一个 x .) 这样 $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \delta = \frac{1}{n} \exists x$ (记为 x_n) 满足 $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. □