高等微积分笔记

mny

2023 年 10 月 9 日

目录

1 微积分简介

1.1 阿基米德时代

问题: 设 $D = \{(x,y) | a \le x \le b, \quad 0 \le y \le h(x)\}$ 求曲边梯形 D 的面积 $\mathrm{area}\,(D)$.
特例: $a=0$, 剖分 $D = \bigcup D_i$, 分点 $x_i = \frac{ib}{n}$

- 算 $\mathrm{area}\,(D_i) \simeq (x_i - x_{i-1})\, h(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- 求和
$$\mathrm{area}\,(D) \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i)\, h(\xi) \tag{1.1}$$
- 相信随着剖分越来越细, 上述近似越来越好

例 1.1. $h(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\mathrm{area}\,(D) &\simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} h\,(\xi_i = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 && (1.2)\\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) && (1.3)\\ &= \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) && (1.4)\\ &= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \xlongequal{\text{记为}} x_n && (1.5)\end{aligned}$$

研究: 当 n 越大时, x_n 最终会靠近哪个常值 L

例 1.2. $h(x) = x^k, \quad (k \ge 2)$ *相应的*

$$\mathrm{area}\,(D) \simeq \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k \tag{1.6}$$

更接近哪个数 L? 对于更一般 h, 以上计算更加复杂.

1.2 Newton 时代

上述问题反问题: 已知面积函数 $S(a)$, 如何求高度?
x 流动到 $x+o$,

$$S(x+o) - S(x) \simeq o \cdot h(x) \tag{1.7}$$

$$\Longrightarrow h(x) \simeq \frac{S(x+o) - S(x)}{o} \quad \text{(流数法)} \tag{1.8}$$

相信当 o 越接近零, 此近似越好.

例 1.3. $S(a)=a^m, \quad (m\in\mathbb{Z}_+)$

$$\Longrightarrow h(x)\simeq\frac{(x+o)^m-x^m}{o} \tag{1.9}$$

使用牛顿二项式公式

$$(x+y)^m=x^m+C_m^1x^{m-1}y+\cdots+C_m^my^m \tag{1.10}$$

带入, 得到

$$h(x)\simeq C_m^1x^{m-1}+C_m^2x^{m-2}o\cdots+C_m^mo^{m-1}\xlongequal{\text{令 } o \text{ 等于零}}mx^{m-1} \tag{1.11}$$

由此可知, 例1.2 答案为 $S(a)=\frac{1}{k+1}a^{k+1}$

- 从高度函数得到面积称作积分 $S(b)=\int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x$
- 从面积函数得到高度函数称作求导 $h(x)=S'(x)$

进行一个循环, 可以得到

$$\left(\int_0^x h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)'=h(x) \tag{1.12}$$

和

$$\int_0^b S'(x)\,\mathrm{d}x=S(b)-S(0) \tag{1.13}$$

2 集合与映射

定义 2.1. 设 X, Y 是集合, 所谓 X 到 Y 的一个映射是指如下的数据

对于 X 中的每一个元素 x, 指定 Y 中唯一的元素 (记为 $f(x)$) 与之对应. 记此映射为

$$f\colon X\to Y \tag{2.1}$$

(这个符号直到 1940 年代才开始出现, 标志着范畴论的开始)

称 X 为 f 的定义域 domain, Y 为 f 的陪域 co-domain.

$$\forall A\subseteq X, \quad f(A)=\{y\in Y|\exists a\in A\text{使}y=f(a)\} \tag{2.2}$$

称之为 A 在 f 下的像集. 特别的, 称 $f(X)=\mathrm{Im}(f)$ 为 f 的值域或像集.

定义 2.2. *原像集. 对 $V\subseteq Y$, 定义在 f 下的原像集*

$$f^{-1}(V)=\{x\in X|f(x)\in V\}=\bigcup_{y\in V}F_y \tag{2.3}$$

对于 V 的补集 V^c 显然有,

$$f^{-1}(V^c)=\left(f^{-1}(V)\right)^c \tag{2.4}$$

显然有

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \tag{2.5}$$

2.1 映射的性质

- 映射可复合. 设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, 可定义复合映射 $g \circ f\colon X \to Z$,

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right), \quad \forall x \in X \tag{2.6}$$

- 映射的复合满足结合律. 设 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$, 则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.7}$$

  证明是直接的.

- 对于集合 X 有一个恒同映射, $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, 定义为 $\mathrm{Id}_X(x) = x, \quad \forall x \in X$
- 恒同映射是映射复合的单位, 即 $\forall f\colon X \to Y$ 有

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X \tag{2.8}$$

对于两个集合 X, Y, 存在一个集合

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \left\{\text{从 } X \text{ 到 } Y \text{ 的映射}\right\} \tag{2.9}$$

2.2 范畴中的映射

定义 2.3. *所谓一个范畴 (Category) $\mathcal{C}$ 是指如下一个数据:*

- *对象 X, Y, Z[1], 构成 object $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$*
- *对任何 $X, Y \in \mathcal{C}$, 指定一个集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, 称 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的任意元素为范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个态射 (morphism), 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ 中的元素为*

$$f\colon X \to Y \tag{2.10}$$

- *态射可复合, 即 $\forall X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, 指定出映射*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.11}$$

  记为

$$(f,g) \to g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \tag{2.12}$$

[1]在线性代数里面它们是线性空间

- 态射复合是结合的，即 $\forall X, Y, Z, W \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，设

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z),\ h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W), \tag{2.13}$$

有 *(结合律)*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{2.14}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W \tag{2.15}$$

- 态射的复合是有单位元的，对任何对象 $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，指定态射

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \tag{2.16}$$

满足，对 $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$，$\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$，有

$$f \circ \mathrm{id}_X = f,\ \mathrm{id}_X \circ g = g \tag{2.17}$$

例 2.1. 范畴 *Set*，其中的对象是集合 X, Y，此时

- 态射 $\longleftrightarrow$ 映射

$$\mathrm{Hom}_{Set}(X, Y) = \left\{\text{映射} f \colon X \to Y\right\} \tag{2.18}$$

- 态射复合 $\longleftrightarrow$ 映射复合
- $\mathrm{id}_X =$ 恒同映射

例 2.2. 矢量空间 *Vect:* 对象是线性空间，态射是线性映射.

例 2.3. 拓扑空间 *Top:* 对象是拓扑空间，态射是连续映射.

定义 2.4 (集合论中)**.** 称映射 $f \colon x \to y$ 是

- 单射 $\iff \forall x \neq x'$，有 $f(x) \neq f(x')$.
- 满射 $\iff \forall y \in Y,\ \exists x \in X \text{使} f(x) = y$.
- 双射 $\iff$ 既单又满.

定义 2.5. 称映射 $f \colon X \to Y$ 是

- 单射

$$\iff \exists \text{映射} g \colon Y \to X, \text{使} g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{(只在集合当中适用)} \tag{2.19}$$

一般的范畴中*:*

$$\iff \forall \text{集合} W, \forall \text{映射} g_1, g_2 \colon W \to X, \text{若} f \circ g_1 = f \circ g_2, \text{则有} g_1 = g_2 \tag{2.20}$$

- 满射

$$\iff \forall 集合 Z, \forall 映射 h_1, h_2 \colon Y \to Z. 若有 h_1 \circ f = h_2 \circ f, 则有 h_1 = h_2 \tag{2.21}$$

定理 2.1. 映射 $f\colon X \to Y$ 是双射 $\iff \exists$映射$g\colon Y \to X$使$g \circ f = \mathrm{id}_X$ 且$f \circ g = \mathrm{id}_Y$

证明. 从充分和必要两个方面说明.

"$\implies$":

由 f 满知 $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

由 f 单知 $f^{-1}(\{y\})$ 至多一个元素.

于是 $\forall y \in Y$ 有 $f^{-1}(\{y\})$ 是单元集. 记 $f^{-1}(\{y\}) = \{g(y)\}$, 得到映射 g.

"$\impliedby$":

设 $\exists g\colon Y \to X$ 使

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.22}$$

证 f 单: 若 $f(x) = f(x')$, 则

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') \tag{2.23}$$

即

$$x = x' \tag{2.24}$$

矛盾, 故 f 单.

证 f 满:

$$\forall y \in Y,\ f[g(y)] = f \circ g(y) = \mathrm{id}_Y(y) = y \tag{2.25}$$

所以 $y \in \operatorname{Im} f$, 故 f 满.

□

定义 2.6. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中, 称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为一个同构, 如果

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \tag{2.26}$$

使得

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \ \text{且}\ f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{2.27}$$

称对象 X 与对象 Y 同构, 如果 $\exists$同构态射$f\colon X \to Y$.

命题 2.1. 满足(2.27)的 g 至多一个.

证明. 若 $g_1, g_2\colon Y \to X$ 都满足(2.27), 则

$$g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1. \tag{2.28}$$

□

3 实数

出于计数的需要, 引入了自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$.

由于要做不交并,

$$|S \cup T| = |S| + |T| \tag{3.1}$$

引入了加法.

由于要做笛卡尔积,

$$S \times T = \{(s,t) | s \in S, t \in T\} \tag{3.2}$$

引入了乘法.

加法在 $\mathbb{N}$ 上未必有逆, 引入负整数. 这样将整数集扩充为 $\mathbb{Z}$. 但 $\mathbb{Z}$ 上乘法未必有逆, 形式化引入分数 $\frac{m}{n}$, $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+)$, 将 $\mathbb{Z}$ 扩充为 $\mathbb{Q}$ [2] .

命题 3.1. *$\sqrt{2}$ 不是有理数 (定义 $\sqrt{2}$ 是满足 $x^2 = 2$ 的正数).*

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, m, n 无公因子. 则 $2 = \frac{m^2}{n^2}$.

$m^2 = 2n^2$ 说明 m 是偶数, 代回发现 n 是偶数. □

这表明有理数集 $\mathbb{Q}$ 需要进一步扩充.

命题 3.2. *x 是有理数 $\iff$ x 是有限或无限循环小数.*[3]

微积分当中需要介值定理, 但人们一直没有严格证明, 问题在于没有实数的严格定义.

1872 年戴德金首次严格定义实数.

3.1 戴德金分割

定义 3.1. *所谓戴德金分隔是指一个有序对 (A, B), 满足:*

- *A, B 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集.*
- *$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{Q}$*
- *$\forall x \in A, \forall y \in B$, 有 $x < y$*
- *集合 A 无最大元素.*

---

[2] 这些 "逆" 都是等价类, 就像不定积分那样, 可以理解为一个集合

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\text{所有} F(x) | F' = f\}. \tag{3.3}$$

[3] 小数的定义略去. 但是小数是无穷级数, 加法和乘法的定义现在都没定义.

称两个戴德金分割 $(A,B)=(A',B') \iff A=A'$.

定义 3.2. 所谓一个戴德金实数, 就是一个戴德金分割.

$$\mathbb{R}_D=\{\text{所有戴德金分割}\} \tag{3.4}$$

- 每个有理数 a 确定一个戴德金分割

$$(A_a,B_a),\ \text{其中} A_a=\{x\in\mathbb{Q}|x\le a\} \tag{3.5}$$

- 序.

  定义 $(A,B)\le(A',B') \iff A\subseteq A'$

- 和.

$$(A,B)+(A',B')=(A+A',\mathbb{Q}/(A+A')) \tag{3.6}$$

- 称一个戴德金实数 (A,B) 为一个戴德金有理数 $\iff$ A 有最大元素.

以上定义好实数集 $\mathbb{R}$, 由此可以证出介值定理, 严格建立微积分.

3.2 确界定理

定义 3.3. 设非空集合 $E\in\mathbb{R}$, 称 E 的元素 a 为 E 的最大元素, 如果 $\forall x\in E, x\le a$, 记为 $a=\max E$

最小元素: $a=\min E \iff a\in E\text{且}\forall x\in E\text{有}x\ge a$

定义 3.4. 上界和下界.

称 c 为 E 的一个上界, 如果 $\forall x\in E\text{有}x\le c$.

称 d 为 E 的一个下界, 如果 $\forall x\in E\text{有}x\ge d$.

定义 3.5. 确界.

称 c 是 E 的上确界 *(supremum)*, 记作 $c=\sup E$, 如果 c 是 E 的最小的上界.

$\iff c=\min\{E\ \text{的上界}\}$

称 d 是 E 的下确界 *(infimum)*, 记作 $d=\inf E$, 如果 d 是 E 的最大的下界.

$\iff d=\max\{E\ \text{的下界}\}$

命题 3.3. 任意非空实数集 F, $\min F,\max F$ 非必存在.

例 3.1. $F=(0,1)$, 则 $\min F,\max F$ 皆不存在.

证明. 因为

$$\forall a \in F \implies \frac{a}{2} \in F \implies a\text{不是最小元素}, \tag{3.7}$$

$$\forall b \in F \implies \frac{b+1}{2} \in F \implies b\text{不是最大元素}. \tag{3.8}$$

□

这样, 从字面上有

- 若 E 无上界, 则 E 无上确界.
- 若 E 有上界, $\{E$ 上界$\}$ 非空, **是否有最小元素需要证明**.

定理 3.1 (确界定理)**.** *有上界的非空实数集一定有上确界, 有下界的非空实数集一定有下确界.*

证明. 只证明上确界. 对于实数采用戴德金实数的定义.

设

$$E = \{x_\alpha = \text{戴德金分割 } (A_\alpha, B_\alpha) | \alpha \in \text{指标集 } \Lambda\} \tag{3.9}$$

已知 E 有上界 $\tilde{c} = (\tilde{A}, \tilde{B})$, $(\tilde{A} \subsetneqq \mathbb{Q})$.

由 $\forall \alpha,\ \tilde{c} \geq x_\alpha$, 根据定义有

$$\forall \alpha,\ \tilde{A} \supseteq A_\alpha \implies \tilde{A} \supseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \xlongequal{\text{定义为}} \{y | \exists \alpha \in \Lambda \text{使} y \in A_\alpha\} \tag{3.10}$$

令 $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ (A 必是 $\mathbb{Q}$ 的非空真子集).

考虑 $(A, B = \mathbb{Q}/A)$, 可以直接验证它是一个戴德金分割.

- 定义中的第三条:

  $$\forall x \in A,\ \exists \alpha \text{使} x \in A_\alpha \tag{3.11}$$

  而且

  $$B = \left(\bigcup A_\alpha\right)^C = \bigcap A_\alpha^C = \bigcap_\alpha B_\alpha \implies \forall y \in B, \forall \alpha,\ y \in B_\alpha \tag{3.12}$$

  即我们可以找到一个 α,

  $$x \in A_\alpha, y \in B_\alpha \implies x < y. \tag{3.13}$$

- 定义中的第四条: 要证 A 中无最大元, 采用反证法.

  若 A 中有最大元, 记为 z, 则

  $$z \in A = \bigcup_\alpha A_\alpha \implies \exists \alpha \text{使} z \in A_\alpha. \tag{3.14}$$

  由于 z 是 A 最大元, 并且 $A_\alpha \subseteq A$, z 也是 A_α 最大元, 矛盾.

这样 $y=(A,B)=(\bigcup_\alpha A,\bigcup_\alpha B)$ 是一个戴德金实数, **我们可以断言** $y=\sup E$, 分为两部分内容:

- y 是 E 上界 $\iff y\geq x_\alpha \iff A\supseteq A_\alpha$, $\forall\alpha$ 显然成立.
- $y\leq E$ 的任何上界 $z \xlongequal{\text{记为}} (A_0,B_0)$, 由 z 是上界可知,

$$\forall\alpha,\ A_0\supseteq A_\alpha \implies A\supseteq\bigcup_\alpha A_\alpha=A \implies z>y. \tag{3.15}$$

□

命题 3.4 (判断上确界)**.** *$C=\sup E$ 等价于下列两点同时成立:*

1. *$\forall x\in E$ 有 $x\leq c$.*
2. *$\forall\varepsilon>0\ \exists x\in E$ 使 $x\geq c-\varepsilon$.*

定义 3.6. *称 E 是有界的, 如果 E 既有上界又有下界.* $\iff \exists k>0$使$\forall x\in E$有$|x|\leq k$

例 3.2. *设 E 是有界的非空实数集, 则*

$$\sup\{x-y|x,y\in E\}=\sup E-\inf E. \tag{3.16}$$

证明. 记 $F=\{x-y|x,y\in E\}$, 可知 F 非空有界.

由确界定理知, $\sup F,\sup E,\inf E$ 皆存在, 有

- $\sup E-\inf E$ 是 F 的上界, 因为 $\forall x,y\in E$, 有 $x\leq\sup E, y\geq\inf E$, 所以

$$x-y\leq\sup E-\inf E. \tag{3.17}$$

  说明 $\sup E-\inf E$ 不小于 F 的任何成员, 是上界.

- 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\sup E-\frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 上界, $\inf E+\frac{\varepsilon}{2}$ 不是 E 下界.

$$\exists x,y\in E,\ x-y>\sup E-\inf E-\varepsilon \tag{3.18}$$

  说明 $\forall\varepsilon>0,\ \sup E-\inf E-\varepsilon$ 不是 F 上界.

所以 $\sup E-\inf E=\sup F$. □

3.3 确界定理应用: 证明阿基米德定理 (命题3.5)

命题 3.5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z}$使$x < n$.

证明. 反证法. 假设结论不对, 则 $x \geq n,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, 即 x 是 $\mathbb{Z}$ 的一个上界. 这说明 $\mathbb{Z}$ 非空且有上界.

由确界定理知, $\sup \mathbb{Z}$ 存在, 记 $M \equiv \sup \mathbb{Z}$, 那么

$$n+1 \in \mathbb{Z} \implies n+1 \leq M \implies n \leq M-1. \tag{3.19}$$

这与 $M = \sup \mathbb{Z}$ 矛盾. □

命题 3.6. 任何两个实数 $a < b$ 之间必有有理数.

证明. 寻找一个有理数 $\frac{m}{n} \in (a,b)$

对于 $x = \frac{1}{b-a}$, 由命题3.5结论可知,

$$\exists n \in \mathbb{Z},\ n > \frac{1}{b-a}. \tag{3.20}$$

对于 $y = nb$, 由命题3.5的结论可知, $m_1 \in \mathbb{Z},\ m_1 > y$, 即有

$$\frac{m_1}{n} > b \quad (m_1 \in \mathbb{Z}) \tag{3.21}$$

对于 $z = -na$, 由命题3.5的结论可知, $\exists m \in \mathbb{Z},\ m > -na$, 记 $m_0 = -m \in \mathbb{Z}$, 从而有

$$-m_0 > -na \iff \frac{m_0}{n} < a. \tag{3.22}$$

这样总能找到整数 m_0, m_1 使 $\frac{m_0}{n} < a < b < \frac{m_1}{n}$. 于是在 m_0 和 m_1 之间总有一个 m 满足 $a < \frac{m}{n} < b$. □

4 极限理论

之前的阿基米德时代的问题 (例1.2) 中, 我们需要考虑 n 越来越大的时候, x_n 是否趋近于某个值 L. 我们需要定义越来越接近这个概念.

定义 4.1. 所谓一个无穷序列, 是指一个映射 $x\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$, 记为

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \tag{4.1}$$

称 x_n 为其第 n 项.

定义 4.2. 称数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 以 L 为极限 *(limit)*, *(*记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$*)* 如果对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\forall n > N$ 总有 $|x_n - L| < \varepsilon$.

也称当 $n \to \infty$ 时, x_n 趋于 L.

这种定义称为 $\varepsilon - N$ 语言.

"$\{x_n\}$ 以 L 为极限" 可以表示为

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+ \text{使得} \forall n \geq N \text{有} |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

"$\{x_n\}$ 不以 L 为极限" 可以表示为

$$\exists\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \leq N \text{使} |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.3}$$

定义 4.3. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的, 如果 $\exists$ 实数 L, 使 $\{x_n\}$ 以 L 为极限. 否则, 称 $\{x_n\}$ 发散.

"$\{x_n\}$ 收敛" 可以表示为

$$\exists L \in \mathbb{R} \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_+ \forall n \geq N, \text{有} |x_n - L| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

"$\{x_n\}$ 发散" 可以表示为

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists\varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{Z}_+ \exists n \geq N \text{使} |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{4.5}$$

例 4.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

证明. $\forall\varepsilon > 0$, 取正整数 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\forall n \geq N$ 有

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

□

例 4.2. 设 $a > 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$.

解 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 为此, $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \dfrac{a-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则对 $\forall n \geq N$ 都有

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon \geq 1 + N\varepsilon > a. \tag{4.7}$$

从而

$$1 + \varepsilon > \sqrt[n]{a}. \tag{4.8}$$

可以得到

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon, \tag{4.9}$$

验证了

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{4.10}$$

总结 $\forall a>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$.

例 4.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明. $\forall\varepsilon>0$ 取 N 使 $\dfrac{N-1}{2}\varepsilon^2>1$, 则对于 $\forall n\geq N$ 有

$$(1+\varepsilon)^n=1+C_n^1\varepsilon+C_n^2\varepsilon^2+\cdots\geq C_n^2\varepsilon^2. \tag{4.11}$$

$$\geq\frac{(n+1)n}{2}\varepsilon^2 \tag{4.12}$$

$$\geq\frac{N+1}{2}\varepsilon^2 n>1\cdot n \tag{4.13}$$

从而 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 得到

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon. \tag{4.14}$$

□

4.1 极限的性质

命题 4.1 (充分大指标的项保持极限不等式)**.** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 则 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\geq N$ 有 $a_n<b_n$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A<B=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 取 $\varepsilon=\frac{B-A}{2}>0$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 定义知

$$\exists N_1\in\mathbb{Z}_+\forall n\geq N_1\text{有}|a_n-A|<\varepsilon. \tag{4.15}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 定义知

$$\exists N_2\in\mathbb{Z}_+\forall n\geq N_2\text{有}|b_n-B|<\varepsilon. \tag{4.16}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n\geq N$ 有

$$a_n<A+\varepsilon=B-\varepsilon<b_n. \tag{4.17}$$

□

推论 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明. 取 $q<r<1$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<\lim_{n\to\infty}r. \tag{4.18}$$

由命题4.1可知, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n \geq N$ 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$.

从而, $\forall n > N$, 有

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < r^{n-N}. \tag{4.19}$$

即有

$$a_n < a_N r^{n-N}, \forall n > N. \tag{4.20}$$

由于 $\frac{1}{r} > 1$, 记 $\frac{1}{r} = 1 + c, (c > 0)$. 这样, 取 $N_0 > N + \frac{a_N}{c\varepsilon}$, 对于 $\forall n \geq N_0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N} = (1+c)^{n-N} \geq (n-N)c \tag{4.21}$$

$$\geq (N_0 - N)c > \frac{a_N}{\varepsilon}. \tag{4.22}$$

可得

$$a_n < a_N r^{n-N} < a_N \frac{\varepsilon}{a_N} = \varepsilon. \tag{4.23}$$

□

上面最后部分是在算等比级数的极限.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & |r| < 1 \\ \text{不存在}, & |r| > 1 \text{或} r = -1 \\ 1, & r = 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

推论 数列极限是唯一的.

证明. 反证法. 设 $\{a_n\}$ 既以 A 为极限, 又以 B 为极限, 且 $a < B$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A < B = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{4.25}$$

由命题4.1可知,

$$\exists N \in Z_+, \forall n \geq N \text{满足} a_n > a_n, \tag{4.26}$$

矛盾! □

推论 收敛的数列一定有界.

定义 4.4. 称数列有上界, 若 $\exists M$使$\forall n, a_n \leq M$. 称数列有下界, 若 $\exists K$使$\forall n, a_n \geq K$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L < L+1 = \lim\limits_{n\to\infty} L+1$, 由命题4.1可知,

$$\exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N \text{有} x_n < L+1. \tag{4.27}$$

所以

$$x_n \leq \max\{x_1, \cdots, x_N, L+1\}. \tag{4.28}$$

故有上界, 下界同理. □

推论 (极限不等式) 设 $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq N_0$, 若 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证明. 反证法. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 由命题4.1可知, $\exists n \geq N$ 有 $a_n > b_n$, 矛盾! □

注意! $\leq$ 可过渡给极限式, 但 $<$ 不一定能.

例 4.4. $a_n = 0 < b_n = \frac{1}{n}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4.2 极限的计算方法

4.2.1 从定义直接计算

例 4.5. 多项式增长远小于指数增长,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0, \quad \text{当} q > 1 \text{时}. \tag{4.29}$$

证法一

证明. 记 $x_n = \frac{n^k}{q^n}$, 注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k q^n}{q^{n+1} n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{k\text{个}} \cdot \frac{1}{q} \right) \\ &= \frac{1}{q} < 1\end{aligned} \tag{4.30}$$

由命题4.1知 $\lim x_n = 0$. □

证法二 (从定义验证)

证明. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N\geq\max\left\{2k,\frac{(k+1)!2^k}{a^{k-1}\varepsilon}\right\}$. $\forall n\geq N$ 有 (记 $q=1+a,\ a>0$)

$$\begin{aligned}\frac{n^k}{q^n}=\frac{n^k}{(1+a)^n}&\leq\frac{n^k}{C_n^{k+1}a^{k+1}}\\&=\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)a^{k+1}}\\&=\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{n-k}\\&<\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}\frac{1}{n}2\cdot2\cdots2\\&=\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{n}\leq\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}2^k\frac{1}{N}<\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.31}$$

□

4.2.2 极限的四则运算

定理 4.1. 设 $\lim a_n=A,\ \lim b_n=B$, 则

$$\lim(a_n+b_n)=A+B\tag{4.32}$$

$$\lim(a_n-b_n)=A-B\tag{4.33}$$

$$\lim a_nb_n=AB\tag{4.34}$$

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}\quad\textit{(分母不为零)}\tag{4.35}$$

证明中用到三角不等式 (绝对值不等式).

$$|x+y|\leq|x|+|y|\tag{4.36}$$

证明. 我们只证极限的乘积和商的性质.

乘积 对于任何 $\varepsilon>0$,

$$|a_nb_n-AB|=|(a_n-A)b_n+A(b_n-B)|\leq|a_n-A|\cdot|b_n|+|A|\cdot|b_n-B|\tag{4.37}$$

- 由 $\{b_n\}$ 收敛知其有界, 即 $\exists M$ 使 $|b_n|\leq M,\forall n$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 知 $\exists N_1\in\mathbb{Z}_1,\forall n\geq N_1$ 有 $|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{2M}$.
- 由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 知 $\exists N_2\in\mathbb{Z}_1,\forall n\geq N_2$ 有 $|b_n-B|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$.

从而, 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 对 $n\geq N$, 代回(4.37)得

$$|a_nb_n-AB|\leq\frac{\varepsilon}{2M}M+|A|\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.38}$$

这证明了 $\lim a_nb_n=AB$.

商

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{a_nB-b_nA}{b_nB}\right|=\left|\frac{(a_n-A)B+A(B-b_n)}{b_nB}\right| \tag{4.39}$$

$$\leq\frac{|a_n-A|}{|b_n|}+\frac{|A|\cdot|B-b_n|}{|b_n||B|}. \tag{4.40}$$

- 由 $B\neq 0$, 不妨设 $B>0$. 由命题4.1知 $\exists M\in\mathbb{Z}_+$ 使 $\forall n\geq M$ 有 $b_n>\frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$ 知 $\exists N_2,\forall n\geq N_2$ 有 $|a_n-A|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}$
- 由 $\lim_{n\to\infty}b_n=B$ 知 $\exists N_3,\forall n\geq N_3$ 有 $|b_n-B|<\varepsilon''=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, 对 $\forall n\geq N$ 有 (代回(4.39))

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{A}{B}\right|\leq\frac{\frac{\varepsilon}{2}\frac{B}{2}}{\frac{B}{2}}+\frac{|A|\frac{\varepsilon}{2}\frac{\frac{1}{2}B^2}{|A|+1}}{\frac{B}{2}B}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{4.41}$$

□

推论 有限次四则运算和极限可交换.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_{i,k}=\sum_{i=1}^{n}\lim_{k\to\infty}x_{i,k} \tag{4.42}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i,k}\right)=\prod_{i[=1]}^{n}\left(\lim_{k\to\infty}x_{i,k}\right) \tag{4.43}$$

证明. 只需 $k-1$ 次使用前述定理. □

注意 无限和/无限积与极限未必可交换.

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}x_{i,k}\neq\sum_{i=1}^{\infty}\left(\lim_{k\to\infty}x_{i,k}\right) \tag{4.44}$$

例 4.6. 对于一个下表这样一个数列 $x_{i,k}$,

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$\cdots$
$i=1$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$i=3$	0	0	$\frac{1}{3}$	
$\vdots$				

纵向求和, 值是 1, 但先取极限 $k\to\infty$ 每一项都变为零, 再纵向求和, 值是 0.

类似地, 有例子表明无限乘积与极限未必可交换.

4.2.3 夹逼定理

定理 4.2. 设 $a_n \le b_n \le c_n$ $(\forall n \ge N_0)$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L \tag{4.45}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且等于 L.

证明. 对于左右两边的数列极限,

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_1,\ \forall n \ge N_1, \text{有}\ |a_n - L| < \varepsilon \tag{4.46}$$

从而

$$L - \varepsilon < a_n \tag{4.47}$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ 定义可知,

$$\exists N_2,\ \forall n \ge N_2, \text{有}\ |c_n - L| < \varepsilon \tag{4.48}$$

从而

$$c_n < L + \varepsilon \tag{4.49}$$

结合起来, $\forall n \ge \max\{N_i\}$, 有 $L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$. □

例 4.7. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{n^k} = a_k \tag{4.50}$$

因为

$$
\begin{aligned}
LHS &= \lim_{n\to\infty}\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k}\right) && (4.51)\\
&= \lim a_k + \lim \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots && (4.52)\\
&= a_k + 0 + \cdots = a_k. && (4.53)
\end{aligned}
$$

例 4.8.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_0} && (4.54)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_k n^k + \cdots + a_0}{n^k}\frac{n^l}{b_l n^l + \cdots + b_0}n^{k-l}\right) && (4.55)\\
&= \begin{cases} a_k \cdot \frac{1}{b_l}\cdot 0 = 0, & k<l\\ a_k \cdot \frac{1}{b_l}\cdot 1 = 0, & k=l\\ \text{不存在 (由引理)}, & k>l \end{cases} && (4.56)
\end{aligned}
$$

引理 4.1. 设

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_n = X \neq 0,\\
&\lim_{n\to\infty} y_n = Y \neq 0, && (4.57)\\
&\lim_{n\to\infty} Z_n \text{不存在},
\end{aligned}
$$

则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n z_n)\text{ 不存在}. \tag{4.58}$$

证明. 反证法, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n z_n) = L$ 存在, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} z_n &= \lim_{n\to\infty}\left[(x_n y_n z_n)\frac{1}{x_n}\frac{1}{y_n}\right] && (4.59)\\
&= \lim_{n\to\infty}(x_n y_n z_n)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} && (4.60)\\
&= L\cdot X\cdot Y. && (4.61)
\end{aligned}
$$

与条件 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$不存在 矛盾! □

例 4.9. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是正数, 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n, a_2^n, \cdots, a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.62}$$

解 不妨设 $a_1=\max\{a_i\}$, 有

$$(a_1^n)^{\frac{1}{n}} \le (a_1^n,a_2^n,\cdots,a_k^n)^{\frac{1}{n}} \le (ka_1^n)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.63}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n)^{\frac{1}{n}}=a_1,\ \lim_{n\to\infty}(ka_1^n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}a_1=a_1. \tag{4.64}$$

使用夹逼定理得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n,a_2^n,\cdots,a_k^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_i\} \tag{4.65}$$

例 4.10. 进一步,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^{-n},a_2^{-n},\cdots,a_k^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} \tag{4.66}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{a_1}\right)^n+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \tag{4.67}$$

$$=\frac{1}{\max\left\{\frac{1}{a_i}\right\}}=\frac{1}{1/\min\{a_i\}} \tag{4.68}$$

$$=\min\{a_i\}. \tag{4.69}$$

4.2.4 计算极限的一个有用方法: Stolz theorem

定义 4.5. 称 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 如果对 $\forall k>0$,

$$\exists n\in\mathbb{Z}_+,\ \forall n\ge N 有 x_n>k. \tag{4.70}$$

定理 4.3 (Stolz Theorem)**.** 设 $\{b_n\}$ 严格单调递增且无上界 *(*或等价地说 $\lim b_n=+\infty$*).*

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L. \tag{4.71}$$

证明 *Stolz* 定理. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$ 的定义可知, $\exists N\in\mathbb{Z}_+,\ \forall n\ge N$ 有

$$L-\varepsilon<\frac{a_{i+1}-a_i}{b_{i+1}-b_i}<L+\varepsilon \implies (L-\varepsilon)(b_{i+1}-b_i)<a_{i+1}-a_i<(L+\varepsilon)(b_{i+1}-b_i) \tag{4.72}$$

我们可以对上式对 i 从 N 到 $n-1$ 求和, 得到

$$(L-\varepsilon)(b_n-b_N)<a_n-a_N<(L+\varepsilon)(b_n-b_N) \tag{4.73}$$

$$\xRightarrow{\text{除以}b_n}(L-\varepsilon)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)+\frac{a_N}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(L+\varepsilon)\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)+\frac{a_N}{b_n}. \tag{4.74}$$

同时注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_N}{b_n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_N}{b_n}=0 \tag{4.75}$$

由于命题4.1“充分大指标的项保持极限不等式”，可知 $\exists N_0\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $\forall n>N_0$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<2\varepsilon. \tag{4.76}$$

□

4.3 单调极限定理 (Weierstrass 定理)(Monotone Converge Theorem)

定理 4.4 (单调极限定理)**.** *有上界且递增的数列一定收敛; 有下界且递降的数列一定收敛.*

证明. 设 $\{x_i\}$ 递增且有上界, 考虑单步点集

$$X=\{x_n|n\in\mathbb{Z}_+\}, \tag{4.77}$$

可知 X 非空且有上界, 由确界定理知, $\sup X$ 存在, 记为 L.

由 $\sup X=L$ 的定义知,

$$\forall\varepsilon>0,\ L-\varepsilon\text{不是 } X \text{ 上界}, \tag{4.78}$$

即 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$, 使得 $x_N>L-\varepsilon$, 从而对于 $\forall n\geq N$ 都有

$$L-\varepsilon<x_N\leq x_n\leq L, \tag{4.79}$$

即

$$|x_n-L|<\varepsilon. \tag{4.80}$$

这表明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$. □

定理 4.5 (Euler)**.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *存在 (记为* e*).*

证明. 记 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- $\{x_n\}$ 有上界,

$$\begin{aligned}x_n\leq&1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\<&1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}<3\end{aligned} \tag{4.81}$$

- $\{x_n\}$ 递增,

$$\sqrt[n+1]{x_n} = \sqrt[n+1]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{n\text{ 个}}\cdot 1} \le \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}. \tag{4.82}$$

所以我们得到了

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{4.83}$$

由单调极限定理可知, 极限存在, 称为自然常熟 e.

□

命题 4.2. 令 $y_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mathrm{e}$

证明. 注意到 $\{y_n\}$ 递增且有上界, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 记为 Y.

由上例可知,

$$x_n \le y_n \ (\forall n) \implies \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n = Y. \tag{4.84}$$

最后来证 $Y \le e$. 我们固定一个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 对于 $\forall n \ge k$, 有

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &\ge 1 + C_n^1\frac{1}{n} + \cdots + C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{n}{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.85}$$

利用极限不等式可知,

$$\begin{aligned} e = \lim_{n\to\infty} x_n &\ge \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k. \end{aligned} \tag{4.86}$$

之后再取极限可知

$$\mathrm{e} \ge \lim_{k\to\infty} y_k = Y. \tag{4.87}$$

□

定理 4.6. e 不是有理数.

证明. 我们需要使用一个引理.

引理 4.2. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ 有

$$0 < \mathrm{e} - y_n < \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.88}$$

证明. 一方面, $\forall m \geq n+1$, 有

$$y_m \geq y_{n+1}. \tag{4.89}$$

由极限不等式可知 $\lim\limits_{m\to\infty} y_m \geq y_{n+1}$, 从而

$$\mathrm{e} \geq y_{n+1} > y_n \tag{4.90}$$

另一方面, $\forall m > n+3$, 有

$$y_m - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \tag{4.91}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m}\right] \tag{4.92}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \tag{4.93}$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{2}{n+2}\right) \tag{4.94}$$

$$\leq \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.95}$$

所以

$$\mathrm{e} - y_n = \lim_{m\to\infty}(y_m - y_n) < \frac{2}{(n+1)!}. \tag{4.96}$$

□

对于定理4.6的证明, 我们采用反证法.

设 $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{e} = \frac{A}{B}$, 其中 $A, B \in \mathbb{Z}_+$. 由引理,

$$0 < \mathrm{e} - y_2 < \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \tag{4.97}$$

这表明 $\mathrm{e} \notin \mathbb{Z} \implies B \geq 2$.

再次使用引理, 有

$$0 < \mathrm{e} - y_B < \frac{2}{(B+1)!}, \tag{4.98}$$

而

$$\mathrm{e} - y_B = \frac{A}{B} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{B!}\right) \xlongequal{\text{通分}} \frac{\text{整数}C}{B!}. \tag{4.99}$$

代回(4.98)可知

$$0 < \frac{C}{B!} < \frac{2}{(B+1)!} = \frac{1}{B!} - \frac{2}{B+1} < \frac{1}{B!}, \tag{4.100}$$

这表明

$$0 < C < 1. \tag{4.101}$$

与 $C \in \mathbb{Z}$ 矛盾! □

4.4 柯西收敛准则

单调极限定理 (MCT) 的适用范围太小, 只能用于单调数列, 我们需要一般的判据.

要证 $\{x_n\}$ 有极限 L, 我们需要证当 n 无穷大时 $|x_n - L| < \varepsilon$, 但是如果猜不出 L, 往往无用. 我们只能比较大指标的 $|x_n - x_m|$.

定理 4.7 (Cauchy 收敛原理)**.** *实数列 $\{x_n\}$ 收敛, 当且仅当*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{Z}_+,\ \ \forall m, n \text{ 都有} |x_m - x_n| < \varepsilon. \tag{4.102}$$

定义 4.6. *称 $\{x_n\}$ 为一个 Cauchy 列, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, $\forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

这样, 定理4.7可以表述为 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 序列.

Cauchy 收敛原理的证明. 从充分性和必要性两方面来证明.

先证" $\Longrightarrow$ ": 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, 使得

$$\forall m, n > N \text{有} |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.103}$$

从而由三角不等式可得, $|x_m - x_n| < \varepsilon$

再证" $\Longleftarrow$ "

首先 $\{x_n\}$ 有界, 因为对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}_+$, $\forall m, n > N$ 有 $|x_m - x_n| < 1$. 特别地, 有 $|x_n - x_{N+1}| < 1$. 于是我们得到

$$\min\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\} \le x_n \le \max\{x_1, x_N, x_{N+1} - 1\}. \tag{4.104}$$

这表明 $\{x_n\}$ 有界.

对于每个 $k \in \mathbb{Z}_+$, 集合 $\{x_n : n \ge k\}$ 非空且有界, 有确界定理可知上确界和下确界都存在, 记

$$a_k = \inf\{x_k : k \ge n\} \tag{4.105}$$

$$b_k = \sup\{x_k : k \ge n\} \tag{4.106}$$

注意到 $\{a_k\}$ 递增, $\{b_k\}$ 递减 [4] , 特别地,

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le b_k \le b_{k-1} \le \cdots \le b_1. \tag{4.107}$$

这表明 $\{a_k\}$ 递增且有上界 b_1, $\{b_k\}$ 递减且有下界 a_1. 由 MCT 知这两个数列的极限都存在, 记 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = A$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = B$. 并且有 $A \le B$.

由 Cauchy 列的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\forall m, n \ge k$ 有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

所以, $\forall N \ge k$, ε 是集合 $\{x_m - x_n | \forall m, n \ge N\}$ 的上界, 我们可以得到

$$\varepsilon \ge \sup\{x_m - x_n | \forall m, n \ge N\} = b_N - a_N, \forall N \ge k. \tag{4.108}$$

取极限, 得到极限不等式

$$\varepsilon \ge \lim_{N\to\infty} (b_N - a_N) = B - A. \tag{4.109}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$ 有 $B - A \le \varepsilon$, 又因为 $B \ge A$, 我们发现 $A = B \equiv L$.

最后由于 $a_k \le x_k \le b_k$, $\forall k$, 由夹逼定理可得 $\{x_n\}$ 极限存在且等于 L. $\square$

[4]因为若 $F \subset E$ 则 $\inf F \ge \inf E$, $\sup F \le \sup E$.