第一次作业

mny

2023 年 9 月 20 日

1 Path Integral without $\int \mathrm{d}p$

标准的路径积分

$$\begin{aligned}\langle x_N|\,U(t_N,t_0)\,|x_0\rangle = \left(\prod_{n=1}^{N-1}\int\frac{\mathrm{d}p_{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x_n}{2\pi\hbar}\right)\int\frac{\mathrm{d}p_{\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \\ \times\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\left[p_{n+\frac{1}{2}}(x_{n+1}-x_n)-\delta t\frac{H(p_{n+\frac{1}{2}},x_{n+1},t_{n+\frac{1}{2}})+H(\cdots,x_n,\cdots)}{2}\right]\right),\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中动量的部分是高斯型的, 我们把它写出来

$$\prod_{n=0}^{N-1}\left[\int\frac{\mathrm{d}p_{n+\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_{n+\frac{1}{2}}\delta x_n-\delta t\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{V(x_{n+1}+V(x_n))}{2}\right)\right]\right)\right]. \tag{1.2}$$

应用高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax^2+bx}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4a}}. \tag{1.3}$$

对应到这里,

$$\begin{cases} a=\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}\frac{1}{2m} \\ b=\frac{\mathrm{i}\delta x_n}{\hbar} \end{cases} \tag{1.4}$$

于是(1.2)的结果为

$$\prod_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{\mathrm{i}\delta t}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\delta x_n)^2 m}{2\hbar\delta t}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\delta t\frac{V(x_{n+1}+V(x_n))}{2}} \tag{1.5}$$

路径积分去掉动量之后的结果为

$$\langle x_N|\,U(t_N,t_0)\,|x_0\rangle=\left(\prod_{n=1}^{N-1}\int\mathrm{d}x_n\right)\left(\prod_{n=0}^{N-1}\sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\delta t}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{\delta x_n}{\delta t}\right)^2-\frac{V(x_{n+1})+V(x_n)}{2}\right]}\right) \tag{1.6}$$

也可以写成紧致的形式

$$\langle x_N|\, U(t_N,t_0)\,|x_0\rangle=\sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t}}\prod_{n=1}^{N-1}\left(\int \mathrm{d}x_n\sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t\, L} \tag{1.7}$$

相对论性的哈密顿量 $H=\sqrt{p^2+m^2}$. 对指数上的项 $p\dot{x}-\sqrt{p^2+m^2}$ 使用鞍点近似 (saddle approximation), 带入

$$p=\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}+p_{(1)}, \tag{1.8}$$

这一项变为

$$\begin{aligned}
p\dot{x}-H&=\frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}+p_{(1)}\dot{x}-\sqrt{m^2+\frac{m^2\dot{x}^2}{1-\dot{x}^2}+2\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}p_{(1)}+p_{(1)}^2}\\
&=\frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}+p_{(1)}\dot{x}-\frac{m}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}\sqrt{1+\frac{2\dot{x}\sqrt{1-\dot{x}^2}}{m}p_{(1)}+\frac{1-\dot{x}^2}{m^2}p_{(1)}^2}\\
=\frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}-\frac{m}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}&+p_{(1)}\dot{x}-p_{(1)}\dot{x}-\frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}\frac{1-\dot{x}^2}{2m^2}p_{(1)}^2-\frac{m}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}\left(-\frac{1}{8}\right)\frac{4\dot{x}^2(1-\dot{x}^2)}{m^2}p_{(1)}^2\\
&=-m\sqrt{1-\dot{x}^2}+\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{p_{(1)}^2}{2m}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

于是, 含有动量的积分为

$$\prod_{n=0}^{N-1}\left[\int\frac{\mathrm{d}p_{n+\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}\left[-m\sqrt{1-\dot{x}^2}+\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{p_{(1)}^2}{2m}\right]\right)\right] \tag{1.10}$$

完成积分, 它变为

$$\prod_{n=0}^{N-1}\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t(1-\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}m\sqrt{1-\dot{x}^2}}\right) \tag{1.11}$$

最终的结果是

$$\langle x_N|\, U(t_N,t_0)\,|x_0\rangle=\sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t}}\frac{1}{(1-\dot{x}_N^2)^{\frac{4}{3}}}\prod_{n=1}^{N-1}\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar\delta t}}\frac{\mathrm{d}x_n}{(1-\dot{x}_n^2)^{\frac{4}{3}}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}m\sqrt{1-\dot{x}^2}}\right), \tag{1.12}$$

其中 $\dot{x}_n\equiv\frac{x_n-x_{n-1}}{\delta t}$.

对于零质量情形, $H=p$, 上面的小量展开条件不再成立,

2 Unitary

2.1 算符方法

在 $t=0$ 时, 满足. 所以我们只计算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U^\dagger U\right)$.

由 Schrödinger 方程, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,0) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t)U(t,0), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U(t,0)\right)^\dagger = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(U(t.0)\right)^\dagger \hat{H}(t) \tag{2.1}$$

所以,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U^\dagger U\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U^\dagger)U + U^\dagger\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}U^\dagger\hat{H}U - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}U^\dagger\hat{H}U = 0 \tag{2.2}$$

这保证了幺正性.

2.2 路径积分方法

路径积分当中我们得到的是一个矩阵元,

$$\langle x_N|\, U(t_N,t_0)\, |x_0\rangle \tag{2.3}$$

它的幺正性可以写成

$$\int \mathrm{d}x_b \left(\langle x_b|\, U(t_N,t_0)\, |x_c\rangle\right)^\dagger \langle x_a|\, U(t_N,t_0)\, |x_a\rangle = \langle x_c|x_a\rangle = \delta(x_c - x_a) \tag{2.4}$$

幺正性是对于每个时刻成立的, t 不是这个算符 (矩阵) 的角标, 不需要对 t 积分.

$$\left(\langle x_b|\, U(t_N,t_0)\, |x_c\rangle\right)^\dagger \langle x_a|\, U(t_N,t_0)\, |x_a\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{n=1}^{N-1}\int \frac{\mathrm{d}p'_{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x'_n}{2\pi\hbar}\right)\int\frac{\mathrm{d}p'_{\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \quad \left(\prod_{n=1}^{N-1}\int \frac{\mathrm{d}p_{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x_n}{2\pi\hbar}\right)\int\frac{\mathrm{d}p_{\frac{1}{2}}}{2\pi\hbar} \\
&\times \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\left[p'_{n+\frac{1}{2}}(x'_{n+1}-x'_n) - \delta t\frac{H(p'_{n+\frac{1}{2}},x'_{n+1},t_{n+\frac{1}{2}}) + H(\cdots,x'_n,\cdots)}{2}\right]\right) \\
&\times \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\left[p_{n+\frac{1}{2}}(x_{n+1}-x_n) - \delta t\frac{H(p_{n+\frac{1}{2}},x_{n+1},t_{n+\frac{1}{2}}) + H(\cdots,x_n,\cdots)}{2}\right]\right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$