タイトル　量子計算理論
著者　森前智行
出版日　2017-11
ISBN13　9784627854017
ページ数　183
言語　ja
内容　従来のコンピュータのしくみと何がどう違うのか?なぜ速いのか?気鋭の若手研究者が基礎から最先端の話題までを幅広く解説.

版　1
刷　2

p6, 古典計算機の場合はベクトルの L1 ノルムが保存される—

- L1 ノルム $x_1 + x_2$
- L2 ノルム $x_1^2 + x_2^2$

p14, 古典計算機の状態は 2^n 次元線形空間の—ということもできる。

ここはテンソル積を知らなければ理解できない。基底の数を次元と言い、n 次元線型空間と m 次元線型空間のテンソル積 $V \otimes V$ は $n \times m$ 次元線型空間となる。

<u>例</u>

2 次元線型空間 V の基底を e_1, e_2 とするとき $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ は $V \otimes V$ の基底となる。ここではこれら基底を $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ と書いている。2 ビットの古典計算機の状態は 2^2 次元線型空間の正規直交基底である!

p15, 演習問題

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

p16, 演習問題

$$T\,|a, b, c\rangle = |a, b, c \oplus ab\rangle$$

$$
\begin{aligned}
T &:= (I \otimes I - |11\rangle\langle 11|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X \\
T|a,b,c\rangle &= (I|a\rangle \otimes I|b\rangle - |11\rangle\langle 11|a,b\rangle) \otimes I|c\rangle + |11\rangle\langle 11|a,b\rangle \otimes X|c\rangle \\
&= |a,b,c\rangle + |11\rangle\langle 11|a,b\rangle \otimes (-|c\rangle + X|c\rangle)
\end{aligned}
$$

ここで a, b が 11 以外であれば後ろの項は落ちる。11 であれば

$$
|11,c\rangle - |11,c\rangle + |11,\neg c\rangle = |11,\neg c\rangle
$$

より言える。

p19, 演習問題

ψ を w を用いて $\sum_w c_w |w\rangle$ と書いておき、$S|\psi\rangle$ を計算する。

$$
S(\{p_{z',z}\}) := \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{z'\in\{0,1\}^n} p_{z',z} |z'\rangle\langle z|
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
S|\psi\rangle &= \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{z'\in\{0,1\}^n} \sum_{w\in\{0,1\}^n} p_{z',z} c_w |z'\rangle\langle z|w\rangle \\
&= \sum_{z,z',w} p_{z',z} c_w \delta_{z,w} |z'\rangle \\
&= \sum_{z,z'} p_{z',z} c_z |z'\rangle
\end{aligned}
$$

ここで係数に注目すると、

$$
\sum_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} c_z \right) = \sum_z c_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} \right) = \sum_z c_z = 1
$$

より言えた。

p25, 演習問題

p19 と同様にして

$$
S|\psi\rangle = \sum_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} c_z \right)
$$

p25, よりシンプルな式と等価であることが分かる。

ユニタリー行列とは $U^\dagger U = I$ を満たすような行列である。ここで $\dagger$ はエルミート転置を表す[*1]。行列 A を (i,j) 成分 a_{ij} を用いて (a_{ij}) と書くことがある。この記号を用いれば、$A^\dagger = (a_{ji}^*)$ である[*2]。したがって、

$$U^\dagger U = \left(\sum_k u_{ki}^* u_{kj}\right) = (\delta_{ij}) = I$$

である。演算子 U の定義を用いて $U^\dagger U$ を計算する。

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta\in\{0,1\}^n} p_{\alpha,\beta}^* \left|\beta\right\rangle\left\langle\alpha\right| \sum_{\alpha'\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta'\in\{0,1\}^n} p_{\alpha',\beta'} \left|\alpha'\right\rangle\left\langle\beta'\right| \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} p_{\alpha,\beta}^* p_{\alpha',\beta'} \delta_{\alpha,\alpha'} \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right| \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\beta'} p_{\alpha,\beta}^* p_{\alpha,\beta'} \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right| \end{aligned}$$

ここで式 (3.1) を用いると、

$$\begin{aligned} &= \sum_{\beta,\beta'} \delta_{\beta,\beta'} \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right| \\ &= \sum_{\beta} \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| = I \end{aligned}$$

逆に $U^\dagger U = I$ を仮定すると

$$\sum_{\beta,\mu,\nu} p_{\beta,\mu}^* p_{\beta,\nu} \left|\mu\right\rangle\left\langle\nu\right| = I$$

を得るから、左から $\left\langle\alpha\right|$ を右から $\left|\gamma\right\rangle$ を掛けることで、式 $(3,1)$ を導出することができる。

[*1] 物理ではエルミート転置に $\dagger$ を用いるが、数学では $*$ を用いることが多い。エルミート共軛、エルミート随伴、エルミート共役、あるいは随伴行列とも呼ばれる。

[*2] 物理では複素共役に $*$ を用いるが、数学では $\bar{z}$ のように上線で表すことが多い。