タイトル　量子計算理論
著者　森前智行
訳者
出版日　2017/11/14
出版社　森北出版
ISBN10　4627854013
ISBN13　9784627854017
ページ数　183
言語　ja
内容　従来のコンピュータのしくみと何がどう違うのか?なぜ速いのか?気鋭の若手研究者が基礎から最先端の話題までを幅広く解説.
版　1
刷　2

注意点:

本書の p14 で与えられるテンソル積のルール以外に、次の式を仮定する。

$$(|a\rangle\langle b|)\otimes(|c\rangle\langle d|)=|ac\rangle\langle bd|$$

さらに一般に (積が上手く定義できる時)

$$AB\otimes CD=(A\otimes B)\cdot(C\otimes D)$$

が言える。ここで $\cdot$ は行列としての積を意味する。

p6, 古典計算機の場合はベクトルの L1 ノルムが保存される—

- L1 ノルム x_1+x_2
- L2 ノルム $x_1^2+x_2^2$

p12, 演習問題, チューリングマシンで実際に足し算と—

motomu

p13, 演習問題, チューリングマシンのテープのビット列が—

motomu

p14, 古典計算機の状態は 2^n 次元線形空間の—ということもできる。

ここはテンソル積を知らなければ理解できない。基底の数を次元と言い、n 次元線型空間と m 次元線型空間のテンソル積 $V \otimes V$ は $n \times m$ 次元線型空間となる。

例

2 次元線型空間 V の基底を e_1, e_2 とするとき $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ は $V \otimes V$ の基底となる。ここではこれら基底を $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ と書いている。2 ビットの古典計算機の状態は 2^2 次元線型空間の正規直交基底である!

p15, 演習問題, チューリングマシンが 1+1 を計算する様子を—

motomu

p15, 演習問題,$X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$ となることを—

成分を用いて計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

あるいは以下の表式から明らかである。

$$X = |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1|$$

p16, 演習問題, 任意の $a, b, c \in \{0, 1\}$ に対し、—

$$T|a, b, c\rangle = |a, b, c \oplus ab\rangle$$

$$\begin{aligned} T &:= (I \otimes I - |11\rangle \langle 11|) \otimes I + |11\rangle \langle 11| \otimes X \\ T|a, b, c\rangle &= (I|a\rangle \otimes I|b\rangle - |11\rangle \langle 11|a, b\rangle) \otimes I|c\rangle + |11\rangle \langle 11|a, b\rangle \otimes X|c\rangle \\ &= |a, b, c\rangle + |11\rangle \langle 11|a, b\rangle \otimes (-|c\rangle + X|c\rangle) \end{aligned}$$

ここで a, b が 11 以外であれば後ろの項は落ちる。11 であれば

$$|11, c\rangle - |11, c\rangle + |11, \neg c\rangle = |11, \neg c\rangle$$

より言える。

p19, 演習問題, 上記の演算子を $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ に作用させて—

motomu

p19, 演習問題,—を表す 3×3 の確率行列を書け.

motomu

p19, 演習問題,—も, この条件を必ず満たすことを示せ.

ψ を w を用いて $\sum_w c_w |w\rangle$ と書いておき、$S|\psi\rangle$ を計算する。

$$S(\{p_{z',z}\}) := \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{z'\in\{0,1\}^n} p_{z',z} |z'\rangle \langle z|$$

であるから

$$\begin{aligned} S|\psi\rangle &= \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{z'\in\{0,1\}^n} \sum_{w\in\{0,1\}^n} p_{z',z} c_w |z'\rangle \langle z|w\rangle \\ &= \sum_{z,z',w} p_{z',z} c_w \delta_{zw} |z'\rangle \\ &= \sum_{z,z'} p_{z',z} c_z |z'\rangle \end{aligned}$$

ここで係数に注目すると、

$$\sum_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} c_z \right) = \sum_z c_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} \right) = \sum_z c_z = 1$$

より言えた。

p25, 演習問題,$\{p_{z',z}\}_{z,z'\in\{0,1\}^n}$ が式 (3,1) を満たすなら—

p19 の演習問題と同様にして

$$U|\psi\rangle = \sum_{z'} \underline{\sum_z p_{z',z} c_z} |z'\rangle$$

を得る。下線部を新たに $c_{z'}$ と看做して、$\sum_{z'} |c_{z'}|^2 = 1$ を示せば良い。

$$\begin{aligned} \sum_{z'} |c_{z'}|^2 &= \sum_{z'} \sum_\alpha \sum_\beta p^*_{z',\alpha} c^*_\alpha p_{z',\beta} c_\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} c^*_\alpha c_\beta \\ &= \sum_\alpha |c_\alpha|^2 = 1 \end{aligned}$$

p25, よりシンプルな式と等価であることが分かる。

ユニタリー行列とは $U^\dagger U = I$ を満たすような行列である。ここで $\dagger$ はエルミート転置を表す[*1]。行列 A を (i,j) 成分 a_{ij} を用いて (a_{ij}) と書くことがある。この記号を用いれば、$A^\dagger = (a^*_{ji})$ である[*2]。したがって、

$$U^\dagger U = \left(\sum_k u^*_{ki} u_{kj}\right) = (\delta_{ij}) = I$$

である。演算子 U の定義を用いて $U^\dagger U$ を計算する。

$$\begin{aligned}
U^\dagger U &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta\in\{0,1\}^n} p^*_{\alpha,\beta}\,|\beta\rangle\langle\alpha| \sum_{\alpha'\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta'\in\{0,1\}^n} p_{\alpha',\beta'}\,|\alpha'\rangle\langle\beta'| \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} p^*_{\alpha,\beta} p_{\alpha',\beta'} \delta_{\alpha,\alpha'}\,|\beta\rangle\langle\beta'| \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\beta'} p^*_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta'}\,|\beta\rangle\langle\beta'|
\end{aligned}$$

ここで式 (3.1) を用いると、

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\beta,\beta'} \delta_{\beta,\beta'}\,|\beta\rangle\langle\beta'| \\
&= \sum_{\beta} |\beta\rangle\langle\beta| = I
\end{aligned}$$

逆に $U^\dagger U = I$ を仮定すると

$$\sum_{\beta,\mu,\nu} p^*_{\beta,\mu} p_{\beta,\nu}\,|\mu\rangle\langle\nu| = I$$

を得るから、左から $\langle\alpha|$ を右から $|\gamma\rangle$ を掛けることで、式 $(3,1)$ を導出することができる。

ちなみに $\sum_\beta |\beta\rangle\langle\beta| = I$ であるが、1 ビットの具体例を計算して見るとよく分かる。

$$\sum_{\beta\in\{0,1\}} |\beta\rangle\langle\beta|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle = |\psi\rangle$$

p27, 演習問題, 以下が成り立つことを確認せよ.

$$|\psi\rangle = \sum_{y\in\{0,1\}^{n-1}} c_{1y}\,|1y\rangle + \sum_{y\in\{0,1\}^{n-1}} c_{0y}\,|0y\rangle$$

[*1] 物理ではエルミート転置に $\dagger$ を用いるが、数学では $*$ を用いることが多い。エルミート共軛、エルミート随伴、エルミート共役、あるいは随伴行列とも呼ばれる。

[*2] 物理では複素共役に $*$ を用いるが、数学では $\overline{z}$ のように上線で表すことが多い。

p35, 演習問題, パウリ演算子は以下の性質を満たすことを—

$$XX = (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

$$YY = (i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|)(i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

$$ZZ = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

p35, 演習問題, またパウリ演算子の固有値、固有ベクトルを求めよ.

motomu

p35, 演習問題, さらに, n 量子ビットパウリ演算子は掛け算について —

motomu

p36, $R_{2/\pi} = Z^{1/2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ を 2 乗すると Z になる。

p36, 一般に — コントロール U ゲート (controlled-U gate) と呼ばれる.

容易に示せるように

$$\Lambda(A)\Lambda(B) = \Lambda(AB)$$

である。

p36,CCZ ゲート — がよく使われる.

$I^{\otimes 2}$ を明示的に書くと、

$$\begin{aligned} I^{\otimes 2} &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11| \end{aligned}$$

である。これを CCZ の定義に代入すると、

$$\begin{aligned} CCZ :&= (I^{\otimes 2} - |11\rangle\langle 11|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes Z \\ &= (|00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes Z \end{aligned}$$

を得る。この式を眺めると、CCZ の意味がはっきりと分かる。
　また、$\Lambda(U)$ に関しても同様の形に書き換えておこう。

$$\begin{aligned}\Lambda(U) &= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U \\ &= (I - |1\rangle\langle 1|) \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U\end{aligned}$$

以上の議論からより高次の一般形についても容易に導出できる。

$$CCZ = |0\rangle\langle 0| \otimes I^{\otimes 2} + |1\rangle\langle 1| \otimes CZ$$

なお CCZ はこのようにかけることも注意しておく。

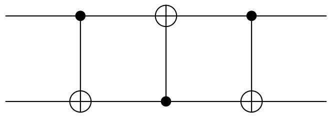
p37, 演習問題,CZ ゲートは、コントロールとターゲットを入れ替えても —

それぞれ計算する。

$$\begin{aligned}|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z &= |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \\ &= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |11\rangle\langle 11|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I \otimes |0\rangle\langle 0| + Z \otimes |1\rangle\langle 1| &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \otimes |0\rangle\langle 0| + (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes |1\rangle\langle 1| \\ &= |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01| - |11\rangle\langle 11|\end{aligned}$$

p37, 演習問題, また図 4,1(f) のように CX ゲートをコントロールと —



SWAP Gate

　p16 で導入した記号 $\oplus$(exclusive or) を用いると

$$\begin{aligned}CX|\psi\phi\rangle &= (|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)|\psi\phi\rangle \\ &= \delta_{0\psi}|0\phi\rangle + \delta_{1\psi}|1\neg\phi\rangle \\ &= |\psi, \psi \oplus \phi\rangle\end{aligned}$$

が分かる。同様にコントロールとターゲットを入れ替えたものを CX' とすると、

$$CX'|\psi\phi\rangle = |\psi \oplus \phi, \phi\rangle$$

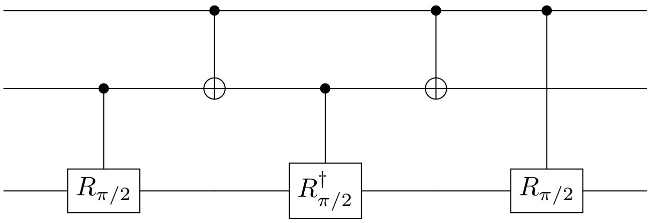
が言える。これらから、

$$CX'CX\,|\psi\phi\rangle = |\psi \oplus (\psi \oplus \phi), \psi \oplus \phi\rangle = |\phi, \psi \oplus \phi\rangle$$

ここで $\oplus$ を 2 回取ると元に戻ることを使った。同様にすれば

$$CXCX'CX\,|\psi\phi\rangle = |\phi\psi\rangle$$

p37, 演習問題,CCZ ゲートは、図 4.2 の回路と等価であることを確認せよ。



CCZ equivalent

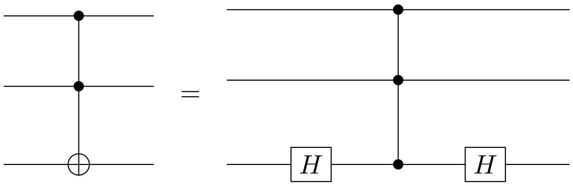
最後のゲートを除いて先に計算する。
公式集において $A = R_{\pi/2}, B = X, C = R^{\dagger}_{\pi/2}, D = X$ とすると、

$$chottomattekudasai$$

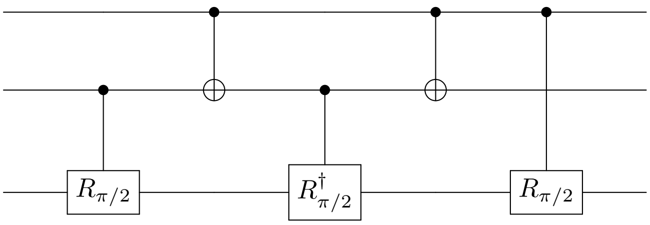
$(|0\rangle\langle 0| \otimes I \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes I \otimes R_{\pi/2})$

等価ゲート集

0.1 Toffoli



0.2 CCZ equivalent



公式集

0.3 $(I \otimes \Lambda(A))(\Lambda(B) \otimes I)$

$$
\begin{aligned}
&|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| B \otimes I \\
&\quad + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes A + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| B \otimes A
\end{aligned}
$$

0.4 $(I \otimes \Lambda(A))(\Lambda(B) \otimes I)(I \otimes \Lambda(C))(\Lambda(D) \otimes I)$

$$
\begin{aligned}
&|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|B|0\rangle\langle 0| D \otimes I \\
&\quad + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|B|1\rangle\langle 1| D \otimes C + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes AC \\
&\qquad + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|B|0\rangle\langle 0| D \otimes A + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|B|1\rangle\langle 1| D \otimes AC
\end{aligned}
$$