タイトル　量子計算理論
著者　森前智行
訳者
出版日　2017/11/14
出版社　森北出版
ISBN10　4627854013
ISBN13　9784627854017
ページ数　183
言語　ja
内容　従来のコンピュータのしくみと何がどう違うのか?なぜ速いのか?気鋭の若手研究者が基礎から最先端の話題までを幅広く解説.

版　1
刷　2

注意点:

本書の p14 で与えられるテンソル積のルール以外に、次の式を仮定する。

$$(|a\rangle\langle b|) \otimes (|c\rangle\langle d|) = |ac\rangle\langle bd|$$

さらに一般に (積が上手く定義できる時)

$$AB \otimes CD = (A \otimes B) \cdot (C \otimes D)$$

が言える。ここで · は行列としての積を意味する。

p6, 古典計算機の場合はベクトルの L1 ノルムが保存される—

- L1 ノルム $x_1 + x_2$
- L2 ノルム $x_1^2 + x_2^2$

p12, 演習問題, チューリングマシンで実際に足し算と—

motomu

p13, 演習問題, チューリングマシンのテープのビット列が—

motomu

p14, 古典計算機の状態は 2^n 次元線形空間の—ということもできる。

ここはテンソル積を知らなければ理解できない。基底の数を次元と言い、n 次元線型空間と m 次元線型空間のテンソル積 $V \otimes V$ は $n \times m$ 次元線型空間となる。

例

2 次元線型空間 V の基底を e_1, e_2 とするとき $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ は $V \otimes V$ の基底となる。ここではこれら基底を $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ と書いている。2 ビットの古典計算機の状態は 2^2 次元線型空間の正規直交基底である!

p15, 演習問題, チューリングマシンが 1+1 を計算する様子を—

motomu

p15, 演習問題,$X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$ となることを—

成分を用いて計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

あるいは以下の表式から明らかである。

$$X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$$

p16, 演習問題, 任意の $a, b, c \in \{0, 1\}$ に対し、—

$$T|a, b, c\rangle = |a, b, c \oplus ab\rangle$$

$$\begin{aligned} T &:= (I \otimes I - |11\rangle\langle 11|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X \\ T|a, b, c\rangle &= (I|a\rangle \otimes I|b\rangle - |11\rangle\langle 11|a, b\rangle) \otimes I|c\rangle + |11\rangle\langle 11|a, b\rangle \otimes X|c\rangle \\ &= |a, b, c\rangle + |11\rangle\langle 11|a, b\rangle \otimes (-|c\rangle + X|c\rangle) \end{aligned}$$

ここで a, b が 11 以外であれば後ろの項は落ちる。11 であれば

$$|11, c\rangle - |11, c\rangle + |11, \neg c\rangle = |11, \neg c\rangle$$

より言える。

p19, 演習問題, 上記の演算子を $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ に作用させて—

motomu

p19, 演習問題,—を表す 3×3 の確率行列を書け.

motomu

p19, 演習問題,—も, この条件を必ず満たすことを示せ.

ψ を w を用いて $\sum_w c_w |w\rangle$ と書いておき、$S|\psi\rangle$ を計算する。

$$S(\{p_{z',z}\}) := \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{z'\in\{0,1\}^n} p_{z',z} |z'\rangle \langle z|$$

であるから

$$\begin{aligned} S|\psi\rangle &= \sum_{z\in\{0,1\}^n} \sum_{z'\in\{0,1\}^n} \sum_{w\in\{0,1\}^n} p_{z',z} c_w |z'\rangle \langle z|w\rangle \\ &= \sum_{z,z',w} p_{z',z} c_w \delta_{zw} |z'\rangle \\ &= \sum_{z,z'} p_{z',z} c_z |z'\rangle \end{aligned}$$

ここで係数に注目すると、

$$\sum_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} c_z \right) = \sum_z c_z \left(\sum_{z'} p_{z',z} \right) = \sum_z c_z = 1$$

より言えた。

p25, 演習問題,$\{p_{z',z}\}_{z,z'\in\{0,1\}^n}$ が式 (3,1) を満たすなら—

p19 の演習問題と同様にして

$$U|\psi\rangle = \sum_{z'} \underline{\sum_z p_{z',z} c_z} |z'\rangle$$

を得る。下線部を新たに $c_{z'}$ と看做して、$\sum_{z'} |c_{z'}|^2 = 1$ を示せば良い。

$$\begin{aligned} \sum_{z'} |c_{z'}|^2 &= \sum_{z'} \sum_\alpha \sum_\beta p^*_{z',\alpha} c^*_\alpha p_{z',\beta} c_\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} c^*_\alpha c_\beta \\ &= \sum_\alpha |c_\alpha|^2 = 1 \end{aligned}$$

p25, よりシンプルな式と等価であることが分かる。

ユニタリー行列とは $U^\dagger U = I$ を満たすような行列である。ここで $\dagger$ はエルミート転置を表す[*1]。行列 A を (i,j) 成分 a_{ij} を用いて (a_{ij}) と書くことがある。この記号を用いれば、$A^\dagger = (a_{ji}^*)$ である[*2]。したがって、

$$U^\dagger U = \left(\sum_k u_{ki}^* u_{kj}\right) = (\delta_{ij}) = I$$

である。演算子 U の定義を用いて $U^\dagger U$ を計算する。

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta\in\{0,1\}^n} p_{\alpha,\beta}^* \left|\beta\right\rangle\left\langle\alpha\right| \sum_{\alpha'\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta'\in\{0,1\}^n} p_{\alpha',\beta'}\left|\alpha'\right\rangle\left\langle\beta'\right| \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} p_{\alpha,\beta}^* p_{\alpha',\beta'}\delta_{\alpha,\alpha'}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right| \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\beta'} p_{\alpha,\beta}^* p_{\alpha,\beta'}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right| \end{aligned}$$

ここで式 (3.1) を用いると、

$$\begin{aligned} &= \sum_{\beta,\beta'}\delta_{\beta,\beta'}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right| \\ &= \sum_{\beta}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| = I \end{aligned}$$

逆に $U^\dagger U = I$ を仮定すると

$$\sum_{\beta,\mu,\nu} p_{\beta,\mu}^* p_{\beta,\nu}\left|\mu\right\rangle\left\langle\nu\right| = I$$

を得るから、左から $\left\langle\alpha\right|$ を右から $\left|\gamma\right\rangle$ を掛けることで、式 $(3,1)$ を導出することができる。

ちなみに $\sum_\beta \left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| = I$ であるが、1 ビットの具体例を計算して見るとよく分かる。

$$\sum_{\beta\in\{0,1\}}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta|\psi\right\rangle = (\left|0\right\rangle\left\langle0\right| + \left|1\right\rangle\left\langle1\right|)(c_0\left|0\right\rangle + c_1\left|1\right\rangle) = c_0\left|0\right\rangle + c_1\left|1\right\rangle = \left|\psi\right\rangle$$

p27, 演習問題, 以下が成り立つことを確認せよ.

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{y\in\{0,1\}^{n-1}} c_{1y}\left|1y\right\rangle + \sum_{y\in\{0,1\}^{n-1}} c_{0y}\left|0y\right\rangle$$

[*1] 物理ではエルミート転置に $\dagger$ を用いるが、数学では $*$ を用いることが多い。エルミート共軛、エルミート随伴、エルミート共役、あるいは随伴行列とも呼ばれる。

[*2] 物理では複素共役に $*$ を用いるが、数学では $\overline{z}$ のように上線で表すことが多い。

p35, 演習問題, パウリ演算子は以下の性質を満たすことを—

$$XX = (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|)(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

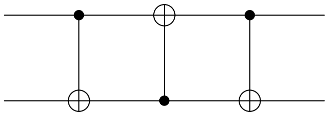
$$YY = (i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|)(i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

$$ZZ = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = I$$

p35, 演習問題,—固有値、固有ベクトルを求めよ.

p35, 演習問題, また図 4,1(f) のように—$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ になっていることを示せ.

swap gate



p35, 演習問題,CCZ ゲートは、図 4.2 の回路と等価であることを確認せよ。

等価ゲート集

0.1 toffoli