

タイトル 量子計算理論

著者 森前智行

訳者

出版日 2017/11/14

出版社 森北出版

ISBN10 4627854013

ISBN13 9784627854017

ページ数 183

言語 ja

内容 従来のコンピュータのしくみと何がどう違うのか?なぜ速いのか?気鋭の若手研究者が基礎から最先端の話題までを幅広く解説.

版 1

刷 2

p6, 古典計算機の場合はベクトルの L1 ノルムが保存される—

- L1 ノルム  $x_1 + x_2$
- L2 ノルム  $x_1^2 + x_2^2$

p14, 古典計算機の状態は  $2^n$  次元線形空間の—ということもできる。

ここはテンソル積を知らなければ理解できない。基底の数を次元と言い、 $n$  次元線型空間と  $m$  次元線型空間のテンソル積  $V \otimes V$  は  $n \times m$  次元線型空間となる。

例

2 次元線型空間  $V$  の基底を  $e_1, e_2$  とするとき  $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$  は  $V \otimes V$  の基底となる。ここではこれら基底を  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  と書いている。2 ビットの古典計算機の状態は  $2^2$  次元線型空間の正規直交基底である!

p15, 演習問題

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### p16, 演習問題

$$T|a, b, c\rangle = |a, b, c \oplus ab\rangle$$

$$\begin{aligned} T &:= (I \otimes I - |11\rangle\langle 11|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes X \\ T|a, b, c\rangle &= (I|a\rangle \otimes I|b\rangle - |11\rangle\langle 11|a, b\rangle) \otimes I|c\rangle + |11\rangle\langle 11|a, b\rangle \otimes X|c\rangle \\ &= |a, b, c\rangle + |11\rangle\langle 11|a, b\rangle \otimes (-|c\rangle + X|c\rangle) \end{aligned}$$

ここで  $a, b$  が 11 以外であれば後ろの項は落ちる。11 であれば

$$|11, c\rangle - |11, c\rangle + |11, \neg c\rangle = |11, \neg c\rangle$$

より言える。

### p19, 演習問題

$\psi$  を  $w$  を用いて  $\sum_w c_w |w\rangle$  と書いておき、 $S|\psi\rangle$  を計算する。

$$S(\{p_{z',z}\}) := \sum_{z \in \{0,1\}^n} \sum_{z' \in \{0,1\}^n} p_{z',z} |z'\rangle\langle z|$$

であるから

$$\begin{aligned} S|\psi\rangle &= \sum_{z \in \{0,1\}^n} \sum_{z' \in \{0,1\}^n} \sum_{w \in \{0,1\}^n} p_{z',z} c_w |z'\rangle\langle z|w\rangle \\ &= \sum_{z, z', w} p_{z',z} c_w \delta_{z,w} |z'\rangle \\ &= \sum_{z, z'} p_{z',z} c_z |z'\rangle \end{aligned}$$

ここで係数に注目すると、

$$\sum_z \left( \sum_{z'} p_{z',z} c_z \right) = \sum_z c_z \left( \sum_{z'} p_{z',z} \right) = \sum_z c_z = 1$$

より言えた。

### p25, 演習問題

p19 の演習問題と同様にして

$$U|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \sum_{\beta} p_{\beta, \alpha} |\beta\rangle$$

を得る。求む。

p25, よりシンプルな式と等価であることが分かる。

ユニタリー行列とは  $U^\dagger U = I$  を満たすような行列である。ここで  $\dagger$  はエルミート転置を表す<sup>\*1</sup>。行列  $A$  を  $(i, j)$  成分  $a_{ij}$  を用いて  $(a_{ij})$  と書くことがある。この記号を用いれば、 $A^\dagger = (a_{ji}^*)$  である<sup>\*2</sup>。したがって、

$$U^\dagger U = \left( \sum_k u_{ki}^* u_{kj} \right) = (\delta_{ij}) = I$$

である。演算子  $U$  の定義を用いて  $U^\dagger U$  を計算する。

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} \sum_{\beta \in \{0,1\}^n} p_{\alpha,\beta}^* |\beta\rangle \langle \alpha| \sum_{\alpha' \in \{0,1\}^n} \sum_{\beta' \in \{0,1\}^n} p_{\alpha',\beta'} |\alpha'\rangle \langle \beta'| \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} p_{\alpha,\beta}^* p_{\alpha',\beta'} \delta_{\alpha,\alpha'} |\beta\rangle \langle \beta'| \\ &= \sum_{\alpha,\beta,\beta'} p_{\alpha,\beta}^* p_{\alpha,\beta'} |\beta\rangle \langle \beta'| \end{aligned}$$

ここで式 (3.1) を用いると、

$$\begin{aligned} &= \sum_{\beta,\beta'} \delta_{\beta,\beta'} |\beta\rangle \langle \beta'| \\ &= \sum_{\beta} |\beta\rangle \langle \beta| = I \end{aligned}$$

逆に  $U^\dagger U = I$  を仮定すると

$$\sum_{\beta,\mu,\nu} p_{\beta,\mu}^* p_{\beta,\nu} |\mu\rangle \langle \nu| = I$$

を得るから、左から  $\langle \alpha|$  を右から  $|\gamma\rangle$  を掛けることで、式 (3, 1) を導出することができる。

ちなみに  $\sum_{\beta} |\beta\rangle \langle \beta| = I$  であるが、1 ビットの具体例を計算して見るとよく分かる。

$$\sum_{\beta \in \{0,1\}} |\beta\rangle \langle \beta| \psi = (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)(c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle = |\psi\rangle$$

## p27, 演習問題

$$|\psi\rangle = \sum_{y \in \{0,1\}^{n-1}} c_{1y} |1y\rangle + \sum_{y \in \{0,1\}^{n-1}} c_{0y} |0y\rangle$$

<sup>\*1</sup> 物理ではエルミート転置に  $\dagger$  を用いるが、数学では  $*$  を用いることが多い。エルミート共軛、エルミート随伴、エルミート共役、あるいは随伴行列とも呼ばれる。

<sup>\*2</sup> 物理では複素共役に  $*$  を用いるが、数学では  $\bar{\phantom{x}}$  のように上線で表すことが多い。