タイトル　量子計算理論

著者　森前智行

訳者

出版日　2017/11/14

出版社　森北出版

ISBN10　4627854013

ISBN13　9784627854017

ページ数　183

言語　ja

内容　従来のコンピュータのしくみと何がどう違うのか?なぜ速いのか?気鋭の若手研究者が基礎から最先端の話題までを幅広く解説.

版　1

刷　2

1　Tensor product

本書の p14 で与えられるテンソル積のルール以外に、次の式を仮定する。

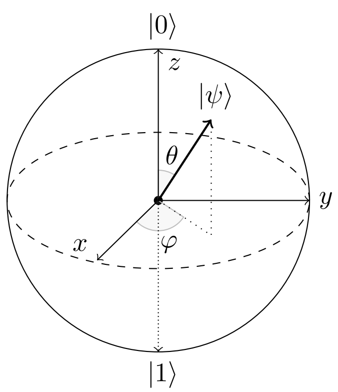
$$(|a\rangle \langle b|) \otimes (|c\rangle \langle d|) = |ac\rangle \langle bd|$$

さらに一般に (積が上手く定義できる時)

$$AB \otimes CD = (A \otimes B) \cdot (C \otimes D)$$

が言える。ここで $\cdot$ は行列としての積を意味する。

2　Bloch Sphere



1bit の状態を考える。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

とした時、α と β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす任意の複素数なので、$\alpha = a\mathrm{e}^{i\kappa},\ \beta = b\mathrm{e}^{i\mu}\quad(a \geq 0, b \geq 0)$ とすると、$a^2 + b^2 = 1$ より、$a = \cos\frac{\theta}{2},\ b = \sin\frac{\theta}{2}\quad(0 \leq \theta \leq \pi)$ と書ける。

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{i\kappa}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{i\mu}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

ここでフェーズだけが違う状態ベクトルは同一状態と見做すことを用いれば、$\mathrm{e}^{-i\kappa}$ を全体に掛けることができて、$\mathrm{e}^{i(\mu-\kappa)}$ を $\mathrm{e}^{i\varphi}$ とおけば、$|\psi\rangle$ として以下のようなものを考えても一般性を失わない。

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

3 Questions

p6, 古典計算機の場合はベクトルの L1 ノルムが保存される—

- L1 ノルム $x_1 + x_2$
- L2 ノルム $x_1^2 + x_2^2$

p12, 演習問題, チューリングマシンで実際に足し算と—

motomu

p13, 演習問題, チューリングマシンのテープのビット列が—

motomu

p14, 古典計算機の状態は 2^n 次元線形空間の—ということもできる。

ここはテンソル積を知らなければ理解できない。基底の数を次元と言い、n 次元線型空間と m 次元線型空間のテンソル積 $V \otimes V$ は $n \times m$ 次元線型空間となる。

例

2 次元線型空間 V の基底を e_1, e_2 とするとき $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ は $V \otimes V$ の基底となる。ここではこれら基底を $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ と書いている。2 ビットの古典計算機の状態は 2^2 次元線型空間の正規直交基底である!

p15, 演習問題, チューリングマシンが 1+1 を計算する様子を—

motomu

p15, 演習問題,$X\left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle, X\left|1\right\rangle = \left|0\right\rangle$ となることを—

成分を用いて計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

あるいは以下の表式から明らかである。

$$X = \left|1\right\rangle \left\langle 0\right| + \left|0\right\rangle \left\langle 1\right|$$

p16, 演習問題, 任意の $a, b, c \in \{0, 1\}$ に対し、—

$$T\left|a, b, c\right\rangle = \left|a, b, c \oplus ab\right\rangle$$

$$\begin{aligned} T &:= (I \otimes I - \left|11\right\rangle \left\langle 11\right|) \otimes I + \left|11\right\rangle \left\langle 11\right| \otimes X \\ T\left|a, b, c\right\rangle &= (I\left|a\right\rangle \otimes I\left|b\right\rangle - \left|11\right\rangle \left\langle 11|a, b\right\rangle) \otimes I\left|c\right\rangle + \left|11\right\rangle \left\langle 11|a, b\right\rangle \otimes X\left|c\right\rangle \\ &= \left|a, b, c\right\rangle + \left|11\right\rangle \left\langle 11|a, b\right\rangle \otimes (-\left|c\right\rangle + X\left|c\right\rangle) \end{aligned}$$

ここで a, b が 11 以外であれば後ろの項は落ちる。11 であれば

$$\left|11, c\right\rangle - \left|11, c\right\rangle + \left|11, \neg c\right\rangle = \left|11, \neg c\right\rangle$$

より言える。

p19, 演習問題, 上記の演算子を $\left|00\right\rangle, \left|01\right\rangle, \left|10\right\rangle, \left|11\right\rangle$ に作用させて—

motomu

p19, 演習問題,—を表す 3×3 の確率行列を書け.

motomu

p19, 演習問題,—も, この条件を必ず満たすことを示せ.

ψ を w を用いて $\sum_w c_w \left|w\right\rangle$ と書いておき、$S\left|\psi\right\rangle$ を計算する。

$$S(\{p_{z',z}\}) := \sum_{z \in \{0,1\}^n} \sum_{z' \in \{0,1\}^n} p_{z',z} \left|z'\right\rangle \left\langle z\right|$$

であるから

$$
\begin{aligned}
S|\psi\rangle &= \sum_{z\in\{0,1\}^n}\sum_{z'\in\{0,1\}^n}\sum_{w\in\{0,1\}^n} p_{z',z}c_w |z'\rangle\langle z|w\rangle \\
&= \sum_{z,z',w} p_{z',z}c_w\delta_{zw}|z'\rangle \\
&= \sum_{z,z'} p_{z',z}c_z|z'\rangle
\end{aligned}
$$

ここで係数に注目すると、

$$
\sum_z\left(\sum_{z'} p_{z',z}c_z\right) = \sum_z c_z\left(\sum_{z'} p_{z',z}\right) = \sum_z c_z = 1
$$

より言えた。

p25, 演習問題,$\{p_{z',z}\}_{z,z'\in\{0,1\}^n}$ が式 (3,1) を満たすなら—

p19 の演習問題と同様にして

$$
U|\psi\rangle = \sum_{z'}\underline{\sum_z p_{z',z}c_z}\,|z'\rangle
$$

を得る。下線部を新たに $c_{z'}$ と看做して、$\sum_{z'}|c_{z'}|^2 = 1$ を示せば良い。

$$
\begin{aligned}
\sum_{z'}|c_{z'}|^2 &= \sum_{z'}\sum_\alpha\sum_\beta p^*_{z',\alpha}c^*_\alpha p_{z',\beta}c_\beta \\
&= \sum_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha\beta}c^*_\alpha c_\beta \\
&= \sum_\alpha |c_\alpha|^2 = 1
\end{aligned}
$$

p25, よりシンプルな式と等価であることが分かる。

ユニタリー行列とは $U^\dagger U = I$ を満たすような行列である。ここで $\dagger$ はエルミート転置を表す[*1]。行列 A を (i,j) 成分 a_{ij} を用いて (a_{ij}) と書くことがある。この記号を用いれば、$A^\dagger = (a^*_{ji})$ である[*2]。したがって、

$$
U^\dagger U = \left(\sum_k u^*_{ki}u_{kj}\right) = (\delta_{ij}) = I
$$

[*1] 物理ではエルミート転置に $\dagger$ を用いるが、数学では $*$ を用いることが多い。エルミート共軛、エルミート随伴、エルミート共役、あるいは随伴行列とも呼ばれる。

[*2] 物理では複素共役に $*$ を用いるが、数学では $\overline{z}$ のように上線で表すことが多い。

である。演算子 U の定義を用いて $U^\dagger U$ を計算する。

$$U^\dagger U = \sum_{\alpha\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta\in\{0,1\}^n} p^*_{\alpha,\beta}\left|\beta\right\rangle\left\langle\alpha\right| \sum_{\alpha'\in\{0,1\}^n}\sum_{\beta'\in\{0,1\}^n} p_{\alpha',\beta'}\left|\alpha'\right\rangle\left\langle\beta'\right|$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} p^*_{\alpha,\beta}p_{\alpha',\beta'}\delta_{\alpha,\alpha'}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right|$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\beta'} p^*_{\alpha,\beta}p_{\alpha,\beta'}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right|$$

ここで式 (3.1) を用いると、

$$= \sum_{\beta,\beta'}\delta_{\beta,\beta'}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta'\right|$$
$$= \sum_{\beta}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| = I$$

逆に $U^\dagger U = I$ を仮定すると

$$\sum_{\beta,\mu,\nu} p^*_{\beta,\mu}p_{\beta,\nu}\left|\mu\right\rangle\left\langle\nu\right| = I$$

を得るから、左から $\left\langle\alpha\right|$ を右から $\left|\gamma\right\rangle$ を掛けることで、式 $(3,1)$ を導出することができる。

ちなみに $\sum_\beta\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta\right| = I$ であるが、1 ビットの具体例を計算して見るとよく分かる。

$$\sum_{\beta\in\{0,1\}}\left|\beta\right\rangle\left\langle\beta|\psi\right\rangle = (\left|0\right\rangle\left\langle0\right| + \left|1\right\rangle\left\langle1\right|)(c_0\left|0\right\rangle + c_1\left|1\right\rangle) = c_0\left|0\right\rangle + c_1\left|1\right\rangle = \left|\psi\right\rangle$$

p27, 演習問題, 以下が成り立つことを確認せよ.

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{y\in\{0,1\}^{n-1}} c_{1y}\left|1y\right\rangle + \sum_{y\in\{0,1\}^{n-1}} c_{0y}\left|0y\right\rangle$$

p35, 演習問題, パウリ演算子は以下の性質を満たすことを—

$$XX = (\left|1\right\rangle\left\langle0\right| + \left|0\right\rangle\left\langle1\right|)(\left|1\right\rangle\left\langle0\right| + \left|0\right\rangle\left\langle1\right|) = \left|0\right\rangle\left\langle0\right| + \left|1\right\rangle\left\langle1\right| = I$$

$$YY = (i\left|1\right\rangle\left\langle0\right| - i\left|0\right\rangle\left\langle1\right|)(i\left|1\right\rangle\left\langle0\right| - i\left|0\right\rangle\left\langle1\right|) = \left|0\right\rangle\left\langle0\right| + \left|1\right\rangle\left\langle1\right| = I$$

$$ZZ = (\left|0\right\rangle\left\langle0\right| - \left|1\right\rangle\left\langle1\right|)(\left|0\right\rangle\left\langle0\right| - \left|1\right\rangle\left\langle1\right|) = \left|0\right\rangle\left\langle0\right| + \left|1\right\rangle\left\langle1\right| = I$$

p35, 演習問題, またパウリ演算子の固有値、固有ベクトルを求めよ.

motomu

p35, 演習問題, さらに, n 量子ビットパウリ演算子は掛け算について —

motomu

p35, 量子ゲートには, パウリゲートのほかに, アダマール (Hadamard) ゲートや—

p28 で導入された記号

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

を用いれば

$$H \equiv |+\rangle \langle 0| + |-\rangle \langle 1|$$

と書くことができる。

p36, $R_{2/\pi} = Z^{1/2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ を 2 乗すると Z になる。

p36, 一般に — コントロール U ゲート (controlled-U gate) と呼ばれる.

容易に示せるように

$$\Lambda(A)\Lambda(B) = \Lambda(AB)$$

である。

p36,CCZ ゲート — がよく使われる.

$I^{\otimes 2}$ を明示的に書くと、

$$\begin{aligned} I^{\otimes 2} &= (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) \\ &= |00\rangle \langle 00| + |10\rangle \langle 10| + |01\rangle \langle 01| + |11\rangle \langle 11| \end{aligned}$$

である。これを CCZ の定義に代入すると、

$$
\begin{aligned}
CCZ &:= (I^{\otimes 2} - |11\rangle\langle 11|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes Z \\
&= (|00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|) \otimes I + |11\rangle\langle 11| \otimes Z
\end{aligned}
$$

を得る。この式を眺めると、CCZ の意味がはっきりと分かる。

また、$\Lambda(U)$ に関しても同様の形に書き換えておこう。

$$
\begin{aligned}
\Lambda(U) &= |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U \\
&= (I - |1\rangle\langle 1|) \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U
\end{aligned}
$$

以上の議論からより高次の一般形についても容易に導出できる。

$$
CCZ = |0\rangle\langle 0| \otimes I^{\otimes 2} + |1\rangle\langle 1| \otimes CZ
$$

なお CCZ はこのようにかけることも注意しておく。

p37, 演習問題,CZ ゲートは、コントロールとターゲットを入れ替えても —

それぞれ計算する。

$$
\begin{aligned}
|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes Z &= |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \\
&= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |11\rangle\langle 11|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I \otimes |0\rangle\langle 0| + Z \otimes |1\rangle\langle 1| &= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \otimes |0\rangle\langle 0| + (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes |1\rangle\langle 1| \\
&= |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01| - |11\rangle\langle 11|
\end{aligned}
$$

p37, 演習問題, また図 4,1(f) のように CX ゲートをコントロールと —

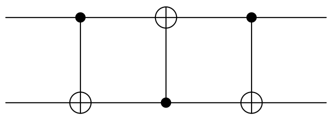


図 1　SWAP Gate

p16 で導入した記号 $\oplus$(exclusive or) を用いると

$$
\begin{aligned}
CX\,|\psi\phi\rangle &= (|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)\,|a, b\rangle \\
&= \delta_{0a}\,|0b\rangle + \delta_{1a}\,|1\neg b\rangle \\
&= |a, a \oplus b\rangle
\end{aligned}
$$

が分かる。同様にコントロールとターゲットを入れ替えたものを CX' とすると、

$$CX' \left| a, b \right\rangle = \left| a \oplus b, b \right\rangle$$

が言える。これらから、

$$CX'CX \left| a, b \right\rangle = \left| a \oplus (a \oplus b), a \oplus b \right\rangle = \left| b, a \oplus b \right\rangle$$

ここで $\oplus$ を 2 回取ると元に戻ることを使った。同様にすれば

$$CXCX'CX \left| a, b \right\rangle = \left| b, a \right\rangle$$

後は線型結合 $\left| \psi \right\rangle = c_0 \left| 0 \right\rangle + c_1 \left| 1 \right\rangle$ などを考えれば言える。

p37, 演習問題,CCZ ゲートは、図 4.2 の回路と等価であることを確認せよ。

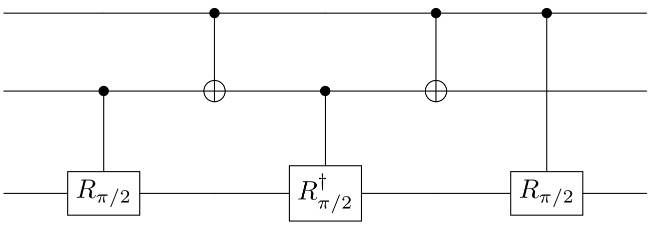


図 2　CCZ equivalent

最後のゲートを除いて先に計算する。
巻末に示した公式集において $A = R_{\pi/2}, B = X, C = R^\dagger_{\pi/2}, D = X$ とすると、

$$\begin{aligned}&\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \otimes \left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \otimes I + \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \otimes \left|0\right\rangle\left\langle 0\right| D \otimes R^\dagger_{2/\pi} \\ &\quad + \left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \otimes \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \otimes I + \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \otimes \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \otimes R_{2/\pi}\end{aligned}$$

を得る。これに最後のゲート

$$\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| \otimes I \otimes I + \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| \otimes I \otimes R_{2/\pi}$$

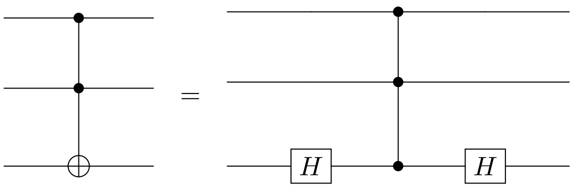
を掛ければ言える。

p38, 演習問題, 図 4.3 の回路において, 一番上の量子ビットを—

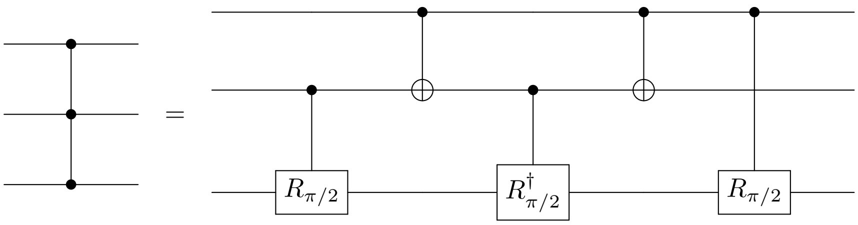
$$\frac{2 + \langle \phi | U \phi \rangle + \langle \phi | U^\dagger | \phi \rangle}{4}$$

4 Equivalent circuit

4.1 Toffoli



4.2 CCZ



5 Fomula

5.1 $(I \otimes \Lambda(A))(\Lambda(B) \otimes I)$

$$
\begin{aligned}
&|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| B \otimes I \\
&\quad + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes A + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| B \otimes A
\end{aligned}
$$

5.2 $(I \otimes \Lambda(A))(\Lambda(B) \otimes I)(I \otimes \Lambda(C))(\Lambda(D) \otimes I)$

$$
\begin{aligned}
&|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|B|0\rangle\langle 0| D \otimes I \\
&\quad + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|B|1\rangle\langle 1| D \otimes C + |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes AC \\
&\qquad + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|B|0\rangle\langle 0| D \otimes A + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|B|1\rangle\langle 1| D \otimes AC
\end{aligned}
$$