オートマトンと言語

大阪分散技術コミュニティ

2019 年 1 月 23 日

タイトル　オートマトンと言語

著者　Michael Sipser

訳者　太田和夫, 田中圭介

出版日　2008/5/21

出版社　共立出版

ISBN10　4320122070

ISBN13　978-4320122079

ページ数　240

言語　ja

内容　MIT 屈指の名講義の講義ノートをまとめた書

1　Notation

　使用する記号と用語についてまとめる。

Σ: Alphabet　空でない有限集合

s: Symbol(文字)　アルファベットの元

ω: String over an alphabet　有限の文字列

$|\omega|$: Length　文字列の長さ

ε: Empty string(空列)　$|\varepsilon| := 0$

L: Language(言語)　文字列の集合

$\Sigma_\varepsilon := \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

2^A:　A のべき集合

$\mathbb{N}$:　0 を含む自然数

$w = s_1 s_2 \cdots s_n$ であり、文字列と文字は区別される。$|w| = n$ である。

star(スター演算)

集合 A に対してスター演算を以下で定義する。ただし $|s|=0$ なる元は ε に限る。

$$A^* = \{x_1 x_2 \cdots x_k | x_i \in A, k \in \mathbb{N}\}$$

<u>例</u>　$\Sigma = \{0,1\}$ とすると、$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \cdots\}$
この例から分かるように、$s \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ である。

2　Automaton

有限オートマトン (finite automaton)M を以下で定義する。

$$M = < Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$$

Q: States(状態集合)　空でない有限集合
Σ: Alphabet　空でない有限集合
δ: Transition functions(遷移関数)　$Q \times \Sigma \to Q$
q_0: Start state(開始状態)　$q_0 \in Q$
F: Set of accept states(受理状態集合)　$F \subset Q$

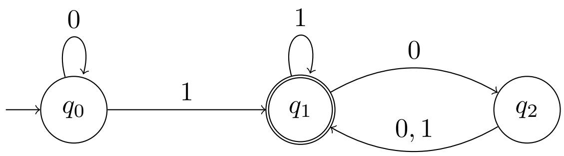
Q の元 q を状態 (state) と言う。オートマトンは初期状態 q_0 から遷移関数に従って動作する。ある入力 $\omega = s_0 s_1 \cdots s_n \in \Sigma^*$ に対して、

$$M(\omega) := \delta(\delta(\cdots \delta(\delta(\delta(q_0, s_0), s_1), s_2) \cdots, s_{n-1}), s_n)$$

を定義する。$M(\omega) \in F$ であれば M は入力 ω を受理 (accept) すると言う。受理しない時、M は入力 ω を拒否 (reject) すると言う。

3　State Diagram

オートマトンは状態遷移図 (state diagram) と呼ばれる図によって記述することができる。初期状態を矢印で表し、状態は丸で囲む。受理状態は二重丸で表す。



この図から、

$$M =< \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\} >$$

が分かる。ただしここで、

$$\delta(q_0, 0) = q_0, \delta(q_0, 1) = q_1$$
$$\delta(q_1, 0) = q_2, \delta(q_1, 1) = q_1$$
$$\delta(q_2, 0) = q_1, \delta(q_2, 1) = q_1$$

である。

オートマトンが正しく定義されるためには、任意の状態において、全ての文字に対する動作が決まらなければならない。図において全ての状態から 0 と 1 の矢印が出ていることに注意されたい。

4 Regular Language

機械 M の言語 (language of machine M) とは、

$$M(L) := \{w \in \Sigma^* | M(w) \in F\}$$

で定義される集合である。ある言語 $L = \{w_1, w_2, w_3, \cdots\}$ が、

$$L = M(L)$$

を満たすならば、機械 M は言語 L を認識 (recognize) と言う。

L を認識するオートマトン M が存在する時、L を正規言語 (regular language) と呼ぶ。

5 Nondeterministic Automaton

先述の定義は決定性有限オートマトン (Deterministic Finite Automaton, DFA) と呼ばれ、遷移関数 $\delta : \Sigma \times Q \to Q$ を $\delta : \Sigma \times Q \to 2^Q$ に置き換えたものを、非決定性有限オートマトン (Nondeterministic Finite Automaton, NFA) と呼ぶ。もはや、文字を読み込んだ後の状態は一意に決まる必要はない。

6 Turing Machine

チューリング機械 (turing machine)TM を以下で定義する。

$$TM =< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject} >$$

Q: States(状態集合)　空でない有限集合

Σ: Alphabet　空でない有限集合

Γ: Tape Alphabet　$\Sigma \subset \Gamma, \sqcup \in \Gamma$

δ: Transition functions(遷移関数)　$Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

q_0: Start state(開始状態)　$q_0 \in Q$

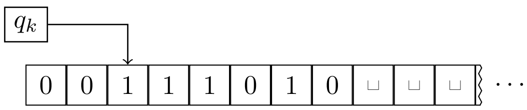
q_{accpet}: Start state(開始状態)　$q_{accept} \in Q$

q_{reject}: Start state(開始状態)　$q_{reject} \in Q$

後で具体例を見るが、テープアルファベットとは、アルファベットに制御文字を足した集合である。必ず空白文字 (blank symbol)$\sqcup$ を含む。

オートマトンと比べて特徴的なのは q_{reject} が含まれている点である。すなわち、オートマトンは文字を必ず全て読み込んだ後に停止したが、チューリングマシーンはテープの途中で動作を停止できる。

7 Configuration



8 計算の定義を与える

ある入力 $\omega = s_0 s_1 \cdots s_n \in \Gamma^*$ に対して、

$$TM(\omega) := a$$

9 Regular Language

チューリング機械 TM の言語 (language of machine M) とは、

$$TM(L) := \{w \in \Sigma^* | TM(w) = q_{accpet}\}$$

で定義される集合である。ある言語 $L = \{w_1, w_2, w_3, \cdots\}$ が、

$$L = TM(L)$$

を満たすならば、チューリング機械 TM は言語 L を認識 (recognize) と言う。

L を認識するチューリング機械 TM が存在する時、L は認識可能 (turing-recognizable) と言う。

10 Decider

書き直す Turing 機械 M が判定装置 (decider) であるとは

$$\forall \omega \in \Sigma^*, M(\omega) \neq loop$$

となることである。

言語 L が判定可能 (Turing-decidable) とは、L が認識可能かつ M が判定装置であることである。

11 Annotation

p15,—をつなげてるとき、その有向グラフを強連結 (strongly connected) という.

正確な定義は任意の 2 点間に有向路 (directed path) が存在することである。例えば図 0.16 だと頂点は繋がっているが (connected)、3 から 6 は辿ることができない。よって強連結 (strongly connected) とは言えない。

12 Questions

p30, 演習

0.1

a). 奇数

b). 負を含む偶数

c). 偶数

d). 偶数かつ奇数

e). $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

f). $\emptyset$

0.2

a). $\{1, 10, 100\}$

b). $\{m \in \mathcal{Z} | m > 5\}$

c). $\{n \in \mathcal{N} | n < 5\}$

d). $\{abc\}$

e). $\{\epsilon\}$

f). $\emptyset$

0.3

a). はい。

b). いいえ。

c). $\{x, y, z\}$

d). $\{x, y\}$

e). $\{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y), (z, x), (z, y)\}$

f). $\{\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$

f). 集合 B の冪集合 (power set) は 2^B という記号で表すことが多い。

0.4

$a \times b$

0.5

2^c

0.6

a). 7

b). X, Y

c). 6

d). $X \times X, Y$

e). 8

0.7

a). 例えば、$a = a'$ or $b = b'$ によって関係 R を定めると

b). b

c). b mathématicha

0.8

pandax 宿题

0.9

pandax 宿题