Évaluation d'une usine de production d'éthanol à partir du maïs

TP 1 – Stratégies Financières – HEC Montréal
Pascal François

Hiver 2020

La production d'éthanol à partir du maïs s'inscrit depuis plusieurs décennies dans un effort de diversification des sources d'énergie et de réduction de l'empreinte environnementale.

Pour de nombreux producteurs de maïs, la production d'éthanol offre un débouché supplémentaire permettant d'améliorer leurs revenus et de réduire leurs risques. Ce travail consiste à analyser la décision d'un producteur de maïs d'acquérir une usine de production d'éthanol à partir du maïs.

La figure en annexe A présente le processus de production de manière schématique. Nous considérerons que la décision d'arrêter ou de continuer la production d'éthanol peut être prise à fréquence mensuelle. Plus précisément, si, pour un mois donné, les cours du maïs et de l'éthanol ne permettent pas au producteur de générer un revenu net positif, celui-ci décidera simplement de ne pas alimenter l'usine. La production pourra reprendre le mois prochain (sans coût) si les conditions économiques redeviennent favorables.

1 Évaluation d'une usine

Pour une usine de production d'éthanol à partir du maïs, la valeur présente espérée des revenus nets sur un horizon de production de 10 ans s'écrit

$$\mathbb{E}\left[v\sum_{k=1}^{120}\left(h\left(e_k-p\right)-m_k\right)^+\left(1+r\right)^{-\frac{k}{12}}\right] \tag{1}$$

avec

v	nombre de boisseaux de maïs consommés par mois
h	gallons d'éthanol produits par boisseau de maïs
e_k	prix de marché de l'éthanol agrégé au mois k (dollars par gallon)
m_k	prix de marché du maïs agrégé au mois k (dollars par boisseau)
p	coût fixe de production (dollars par gallon d'éthanol)
r	taux d'actualisation pertinent

D'après l'équation (1), nous pouvons interpréter la valeur de l'usine de production d'éthanol comme un portefeuille d'options européennes sur écart (*spread options*). On utilisera le calibrage suivant : $h = 3$ Gal/Bu ; $p = 0,6$ \$/Gal ; $r = 5\%$. Compte tenu de sa taille, l'usine produira 3 millions de gallons d'éthanol par mois et devra donc être alimentée de $v = 1$ million de boisseaux de maïs par mois.

2 Modèle de prix

Les prix de marché du maïs et de l'éthanol sont supposés être gouvernés par des mouvements browniens géométriques corrélés. Selon le modèle de Black-Scholes, la prime de l'option d'achat européenne écrite sur le contrat à terme d'échéance θ est donnée par

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT}\left(F(\theta)\,\Phi(z_1) - K\Phi(z_2)\right), \\ z_1 &= \frac{\ln\frac{F(\theta)}{K} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}, \\ z_2 &= \frac{\ln\frac{F(\theta)}{K} - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

où $\Phi(.)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $F(\theta)$ est le prix à terme pour une livraison en date θ, K est le prix d'exercice, T est l'échéance de l'option, r est le taux d'intérêt sans risque et σ est la volatilité de l'actif sous-jacent.

On se place en date du 1$^{\text{er}}$ février 2020.

Les cotations des options d'achat (américaines) écrites sur le contrat à terme sur éthanol d'échéance mars 2020, relevées sur le CME sont les suivantes (en dollars par gallon)

K	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
c	0.104	0.063	0.033	0.014	0.005

Le contrat à terme sous-jacent est coté à 1.350. Les contrats à terme d'échéance avril 2020 et mai 2020 sont de 1.366 et de 1.382, respectivement.

Les cotations des options d'achat (américaines) écrites sur le contrat à terme sur maïs d'échéance mars 2020, relevées sur le CME sont les suivantes (en dollars par boisseau)

K	3.65	3.70	3.75	3.80	3.85
c	0.171	0.130	0.092	0.063	0.041

Le contrat à terme sous-jacent est coté à 3.8125. Les contrats à terme d'échéance mai 2020 et juillet 2020 sont de 3.844 et de 3.892, respectivement.

1. Calculez une estimation de la volatilité du maïs et celle de l'éthanol à partir des volatilités implicites des options d'achat.
2. Calculez une estimation de la volatilité du maïs et celle de l'éthanol à partir de l'écart-type des log-rendements historiques (voir fichiers joints).
3. Calculez la corrélation sérielle (notée ρ) entre les log-rendements historiques du maïs et ceux de l'éthanol. Divisez l'échantillon de données en deux fenêtres de temps égales et recalculez les corrélations sur les deux sous-périodes.

3 Conditions actuelles d'évaluation

Sous l'hypothèse que les dynamiques des prix de marché e_k et m_k soient celles de processus log-normaux corrélés, il est possible d'évaluer les options sur écart européennes à l'aide de l'approximation de Bjerksund et Stensland (2014) (voir l'annexe B).

1. Calculez selon cette approche la valeur de l'usine en février 2020.
2. Montrez à partir de graphiques comment la valeur de l'usine se comporte en fonction des volatilités du maïs et de l'éthanol et en fonction la corrélation ρ. Commentez.

4 Décision de retarder l'investissement

Le producteur de maïs estime que le coût de construction d'une usine de cette taille est de 100 millions de dollars. Il se donne un maximum de cinq années pour décider d'investir ou non dans la construction de l'usine.

1. Construisez un arbre pentanomial représentant l'évolution conjointe annuelle des prix du maïs et de l'éthanol sur un horizon de cinq ans (voir l'annexe C).
2. En déduire l'évolution de la valeur de l'usine dans cet arbre pentanomial.
3. En déduire la valeur du projet incluant l'option de retarder la construction de l'usine.

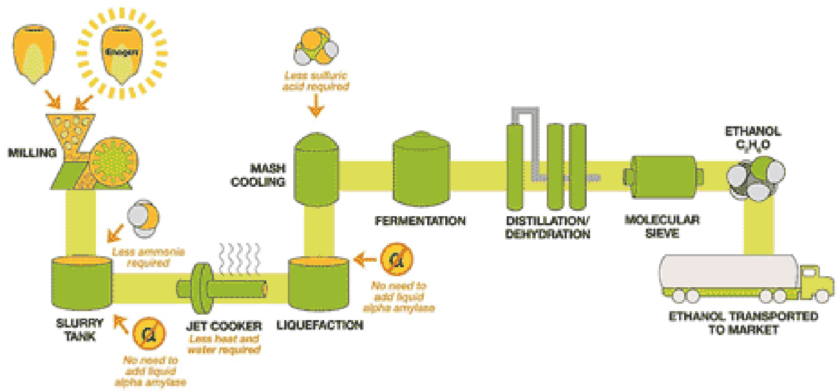
Références

[1] Bjerksund, P. et G. Stensland, 2014, Closed Form Spread Option Valuation, *Quantitative Finance* 14, 1785–1794.

[2] Boyle, P., 1988, A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 23, 1–12.

Annexes

Annexe A : Production d'éthanol à partir du maïs



Annexe B : Approximation de Bjerksund et Stensland (2014)

Le flux terminal de l'option d'achat sur écart s'écrit

$$(x_T - y_T - k)^+ .$$

Lorsque x et y sont deux processus log-normaux de volatilité respective σ_x et σ_y, corrélés par le coefficient ρ, la valeur de l'option d'achat sur l'écart $x - y$ est donnée par

$$x\Phi(d_1) - y\Phi(d_2) - Ke^{-rT}\Phi(d_3)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\frac{x}{a} + \left(r + \frac{\sigma_x^2}{2} - b\sigma_x\sigma_y\rho + \frac{b^2\sigma_y^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad \sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 - 2b\sigma_x\sigma_y\rho},$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{x}{a} + \left(r - \frac{\sigma_x^2}{2} + \sigma_x\sigma_y\rho + \frac{b^2\sigma_y^2}{2} - b\sigma_y^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad a = ye^{rT} + K$$

$$d_3 = \frac{\ln\frac{x}{a} + \left(r - \frac{\sigma_x^2}{2} + \frac{b^2\sigma_y^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad b = ye^{rT} / \left(ye^{rT} + K\right).$$

Annexe C : Arbre pentanomial à deux variables d'état

Boyle (1988) construit un arbre pentanomial permettant de représenter de manière discrète la dynamique conjointe de deux processus log-normaux. À chaque date, les cinq états de nature sont

Probabilité	Actif x	Actif y
p_1	xu_1	yu_2
p_2	xu_1	yd_2
p_3	xd_1	yd_2
p_4	xd_1	yu_2
p_5	x	y

On peut représenter graphiquement l'évolution conjointe des deux prix sur l'intervalle Δt de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{(xd_1, yu_2)} & & \boxed{(xu_1, yu_2)} \\
\text{Proba } p_4 & & \text{Proba } p_1 \\
& \boxed{(x, y)} & \\
& \text{Proba } p_5 & \\
\boxed{(xd_1, yd_2)} & & \boxed{(xu_1, yd_2)} \\
\text{Proba } p_3 & & \text{Proba } p_2
\end{array}$$

Ainsi, à chaque pas de temps, l'arbre pentanomial se déploie à la manière d'une pyramide inversée. Les probabilités sont

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{u_1 u_2 (R-1) - f_1 \left(u_1^2 - 1\right) - f_2 \left(u_2^2 - 1\right) + (f_1 + f_2)(u_1 u_2 - 1)}{\left(u_1^2 - 1\right)\left(u_2^2 - 1\right)}, \\
p_2 &= \frac{f_1 \left(u_1^2 - 1\right) u_2^2 + f_2 \left(u_2^2 - 1\right) - (f_1 + g_2)(u_1 u_2 - 1) - u_1 u_2 (R-1)}{\left(u_1^2 - 1\right)\left(u_2^2 - 1\right)}, \\
p_3 &= \frac{u_1 u_2 (R-1) - f_1 \left(u_1^2 - 1\right) u_2^2 + g_2 \left(u_2^2 - 1\right) u_1^2 + (f_1 + g_2)\left(u_1 u_2 - u_2^2\right)}{\left(u_1^2 - 1\right)\left(u_2^2 - 1\right)}, \\
p_4 &= \frac{f_1 \left(u_1^2 - 1\right) + f_2 \left(u_2^2 - 1\right) u_1^2 - (f_1 + g_2)(u_1 u_2 - 1) - u_1 u_2 (R-1)}{\left(u_1^2 - 1\right)\left(u_2^2 - 1\right)}, \\
p_5 &= 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
R &= M_1 M_2 \exp\left(\rho\sigma_1\sigma_2\Delta t\right), \\
f_i &= \frac{\left(V_i + M_i^2 - M_i\right)u_i - \left(M_i - 1\right)}{\left(u_i - 1\right)\left(u_i^2 - 1\right)}, i = 1, 2, \\
g_i &= \frac{u_i^2\left(V_i + M_i^2 - M_i\right) - u_i^3\left(M_i - 1\right)}{\left(u_i - 1\right)\left(u_i^2 - 1\right)}, i = 1, 2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M_i &= \exp\left[\left(r - y_i\right)\Delta t\right], i = 1, 2, \\
V_i &= M_i^2\left(\exp\left(\sigma_i^2\Delta t\right) - 1\right), i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Notez que dans le présent travail, on néglige les taux de valeur d'usage (*convenience yields*) du maïs et de l'éthanol, ainsi $y_1 = y_2 = 0$.

Enfin, les facteurs u_i et d_i sont donnés par

$$\begin{aligned}
u_i d_i &= 1, i = 1, 2, \\
u_i &= \exp\left(1.1 \times \sigma_i\sqrt{\Delta t}\right), i = 1, 2.
\end{aligned}$$