

Практическое занятие «Хаскелл–6. Классы типов»

26 ноября 2019 года

Для решения задач можно взять из примеров с лекции определение класса (абелевой) группы `Group` и примеры инстанциации этого класса для разных типов:

```
class Group a where
  (.,.) :: a -> a -> a
  zero  :: a

  opposite :: a -> a
  opposite x = zero .-. x

  (.-.) :: a -> a -> a
  x .-. y = x .+. opposite y

{-# MINIMAL (.,.), zero, (opposite | (.-.)) #-}
```

1. Инстанцируйте класс `Group` для типа `Double`. Поскольку тип `Double` принадлежит классу `Num`, то для элементов этого типа определены операции сложения, взятия противоположного элемента, умножения, чем следует воспользоваться.
2. *Линейным пространством над вещественным полем* в математике называют множество L с двумя операциями: сложением, относительно которого множество является абелевой группой, и умножением на скаляр $\alpha \cdot$, относительно которого выполняются соотношения:
 - $\forall a, b \in L \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ — дистрибутивность по отношению к сложению в L ;
 - $\forall a \in L \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ — дистрибутивность по отношению к сложению в \mathbb{R} ;
 - $\forall a \in L \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha(\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta)a$ — ассоциативность умножений;
 - если 1 — единица в \mathbb{R} , то $\forall a \in L : 1 \cdot a = a$ — унитарность умножения.

На основе класса группы `Group` определите класс линейного пространства `LinearSpace`. Инстанцируйте его для типа векторов, представленных списками чисел типа, принадлежащего классу `Group` и для типа функций со значениями в типе класса `Group` (инстанциация класса `Group` для этих типов была сделана на лекции).

3. *Евклидовым пространством* в математике называют конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел с введённым на нём скалярным произведением. Известно, что любое евклидово пространство изоморфно \mathbb{R}^n при каком-то натуральном n . Аналогично, *гильбертово пространство* — это бесконечномерное линейное пространство над полем вещественных (или комплексных) чисел с введённым скалярным произведением. Определите класс типов `HilbertSpace`, дополняющий класс `LinearSpace` операциями `(%)` скалярного произведения. Инстанцируйте класс `HilbertSpace` для типа векторов.

Инстанцируйте класс `HilbertSpace` для функций типа `Double -> Double`, рассматривая их как элементы пространства $L_2[0, 1]$. Скалярное произведение определяется по формуле

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Вычисление интеграла можно заменить вычислением суммы Дарбу при достаточно малом шаге разбиения δ (при достаточно большом количестве N точек разбиения):

$$(f, g) \approx \sum_{i=1}^N f(x_i)g(x_i)\delta, \quad \delta = \frac{1}{N}, \quad x_i = i \cdot \delta.$$

4. *Моноидом* в алгебре называется множество с бинарной ассоциативной операцией (обычно называемой *умножением*) и нейтральным элементом (*единицей*). Создайте класс моноида `Monoid'` (штрих нужен, поскольку в Хаскелле определен свой класс моноида). Заметим, что всякая группа по сложению является моноидом, дополненным операцией взятия обратного элемента; напишите эту задачу в отдельном файле, где класс `Group` создается как сужение класса моноида: `class Monoid' a => Group a where ...`. Инстанцируйте созданный класс моноида для типа списка с операцией конкатенации.
5. Опишите тип перестановок из оговоренного числа элементов (должна храниться длина перестановки и сама перестановка). Инстанцируйте для этого типа класс моноида с операцией композиции перестановок.