Лабораторное занятие
Scheme 13

Во всех задачах многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

задается списком коэффициентов $(a_0\ a_1\ \ldots\ a_{n-1}\ a_n)$.

1. Напишите функцию, которая вычисляет производную многочлена, заданного на входе.
2. Напишите функцию, которая возвращает сумму многочленов, заданных на входе.
3. Напишите функцию, которая вычисляет произведение многочленов, заданых на входе.
4. Напишите функцию, которая первым аргументом получает основание системы счисления k ($k \leqslant 10$), остальные аргументы (их произвольное число) являются натуральными числами в этой системе счисления. Результатом должна быть сумма всех этих чисел в системе счисления по основанию k.

   Примечание. Использовать многочлены. Например, $1364_7 = 1 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 4$.
5. Напишите функцию, которая по заданным многочлену и начальному приближению его корня x_0 уточняет этот корень методом Ньютона[1].

---

[1] **Метод Ньютона, алгоритм Ньютона** (также известный как **метод касательных**) — это итерационный численный метод нахождения корня (нуля) заданной функции. Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном (1643–1727). Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. Улучшением метода является метод хорд и касательных. Также метод Ньютона может быть использован для решения задач оптимизации, в которых требуется определить нуль первой производной либо градиента в случае многомерного пространства.

Алгоритм

(a) Задается начальное приближение x_0.

(b) Пока не выполнено условие остановки, в качестве которого можно взять $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ или $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ (то есть погрешность в нужных пределах), вычисляют новое приближение:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Теорма о сходимости метода Ньютона. Пусть x^* — простой вещественный корень уравнения $f(x) = 0$, а функция $f(x)$ — дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U_r(x^*)$, причем первая производная нигде не обращается в нуль.

Тогда, следуя обозначениям

$$0 < m_1 = \inf_{x \in U_r(x^*)} |f'(x)|, M_2 = \sup_{x \in U_r(x^*)} |f''(x)|,$$

при выборе начального приближения x^0 из той же окрестности $U_r(x^*)$ такого, что

$$\frac{M_2 |x^0 - x^*|}{2m_1} = q < 1,$$

итерационная последовательность

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, k = 0, 1, \ldots$$

будет сходиться к x^*, причем для погрешности на k–м шаге буддет справедлива оценка:

$$|x^k - x^*| \leq q^{2^k - 1} |x^0 - x^*|.$$