Course 02402/02323 Introducerende Statistik

Forelæsning 3: Kontinuerte fordelinger

Klaus K. Andersen og Per Bruun Brockhoff

DTU Compute, Statistik og Dataanalyse
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark

e-mail: klaus@cancer.dk

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Oversigt

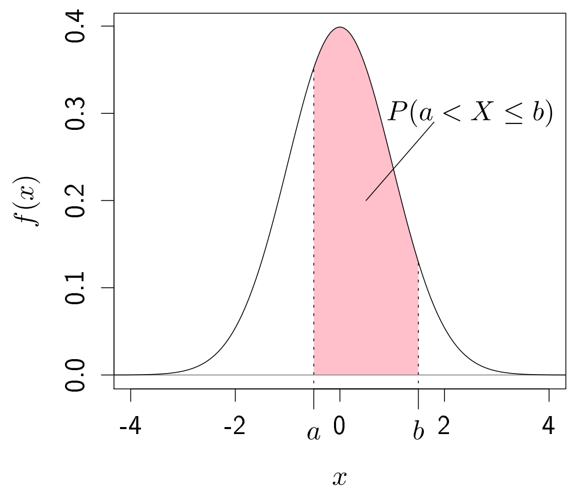
DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Tæthedsfunktion (probability density function (pdf))

- Tæthedsfunktionen for en stokastisk variabel betegnes ved $f(x)$
- $f(x)$ siger noget om hyppigheden af udfaldet x for den stokastiske variabel X
- For kontinuerte variable svarer tætheden ikke til sandsynligheden, dvs. $f(x) \neq P(X = x)$
- Et godt plot af $f(x)$ er et histogram (kontinuert)

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Tæthedsfunktion for en kontinuert variabel



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Tæthedsfunktion for en kontinuert variabel

For en kontinuert stokastisk variabel skrives tæthedsfunktionen som:

$$f(x)$$

Der gælder:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{for alle mulige } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Fordelingsfunktion (distribution function eller cumulative density function (cdf))

- Fordelingsfunktion for en kontinuert stokastisk variabel betegnes ved $F(x)$.
  Fordelingsfunktionen svarer til den kumulerede tæthedsfunktion:

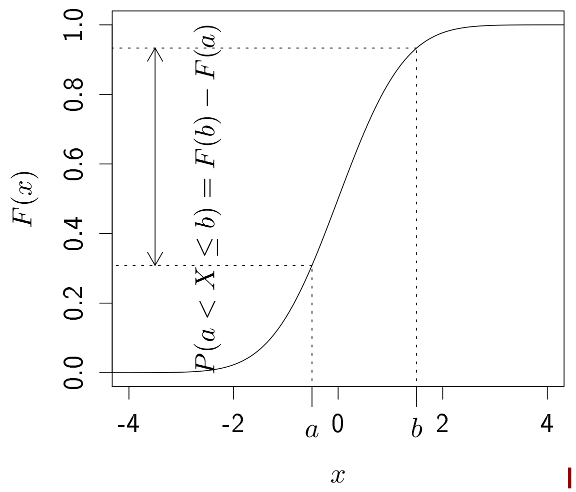
$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$f(x) = F'(x)$$

- Et godt plot for fordelingsfunktionen er den kumulative fordeling

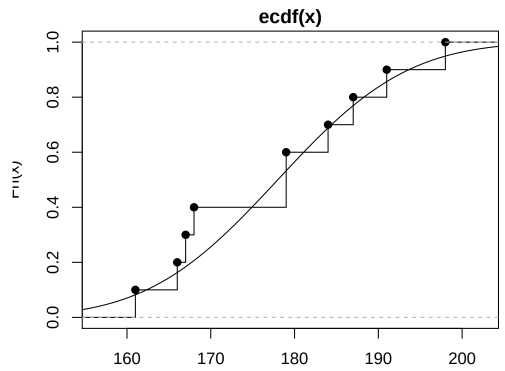
Fordelingsfunktion (distribution function eller cumulative density function (cdf))



Den empiriske cumulative distribution function - ecdf

Student height example from Chapter 1:

```
x <- c(168,161,167,179,184,166,198,187,191,179)
plot(ecdf(x), verticals = TRUE)
xp <- seq(0.9*min(x), 1.1*max(x), length.out = 100)
lines(xp, pnorm(xp, mean(x), sd(x)))
```



Middelværdi (mean) af en kontinuert stokastisk variabel

Middelværdien af en kontinuert stokastisk variabel

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Sammenlign med den diskrete definition:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

Varians af en kontinuert stokastisk variabel

Variansen af en kontinuert stokastisk variabel:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

Sammenlign med den diskrete definition:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

Kovariansen af to stokastiske variable

Kovariansen af to stokastiske variable:

Let X and Y be two random variables, then the covariance between X and Y, is

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Konkrete statistiske fordelinger

- Der findes en række statistiske fordelinger, som kan bruges til at beskrive og analysere forskellige problemstillinger med

Vi betragter nu kontinuerte fordelinger

- Uniform fordelingen
- Normal fordelingen
- Log-Normal fordelingen
- Eksponential fordelingen

Uniform fordelingen

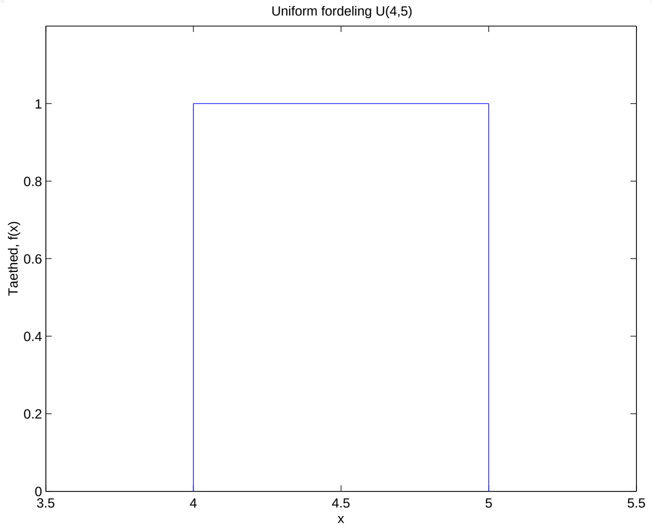
Skrivemåde:
$X \sim U(\alpha, \beta)$

Tæthedsfunktion:
$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$

Middelværdi:
$\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Varians:
$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$

Uniform fordelingen



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 1

Medarbejdere på en arbejdsplads ankommer mellem klokken 8.00 og 8.30. Det antages, at ankomsttiden kan beskrives ved en uniform fordeling.

Spørgsmål:
Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt medarbejder (Hans) ankommer mellem 8.20 og 8.30?

Svar:
10/30=1/3

```
punif(30,0,30)-punif(20,0,30)
```

[1] 0.33333

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 1 - forts.

Spørgsmål:
Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt medarbejder (Martin) ankommer efter 8.30?

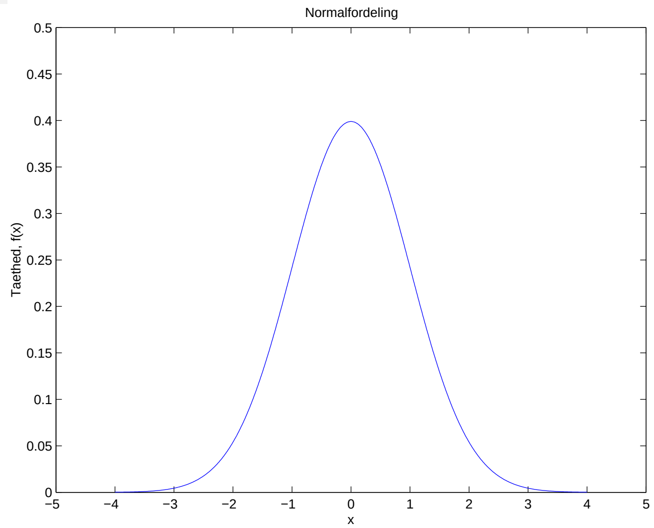
Svar:
0

```
1-punif(30,0,30)
```

[1] 0

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Normalfordelingen



Normal fordelingen

Skrivemåde:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Tæthedsfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

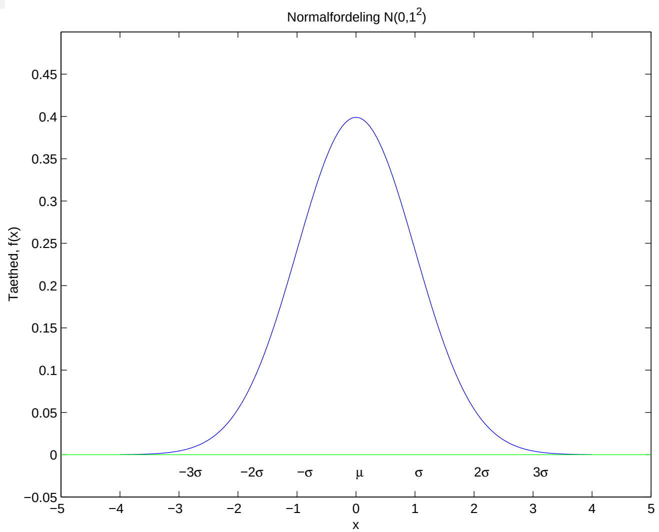
Middelværdi:

$\mu = \mu$

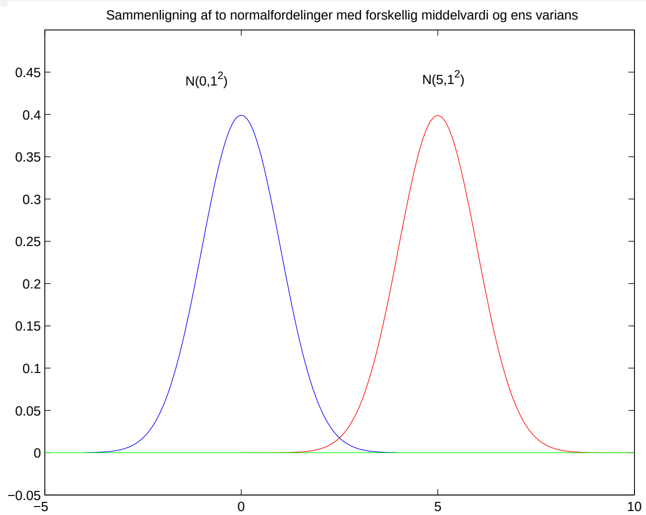
Varians:

$\sigma^2 = \sigma^2$

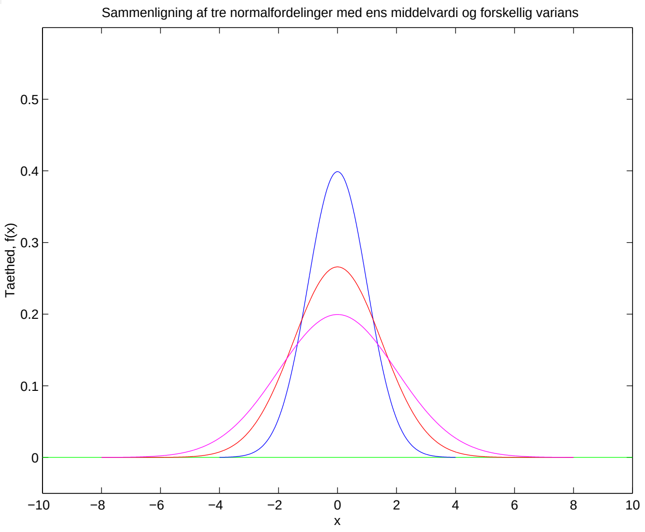
Normalfordelingen



Normalfordelingen



Normalfordelingen



Normal fordelingen

En standard normal fordeling:

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

En normalfordeling med middelværdi 0 og varians 1.

Standardisering:

En vilkårlig normal fordelt variabel $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ kan standardiseres ved at beregne

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Eksempel 2

Målefejl:

En vægt har en målefejl, Z, der kan beskrives ved en standard normalfordeling, dvs

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

dvs. middelværdi $\mu = 0$ og spredning $\sigma = 1$ gram.
Vi måler nu vægten af ét emne

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at vægten måler mindst 2 gram for lidt?

Svar:

$P(Z \leq -2) = 0.02275$

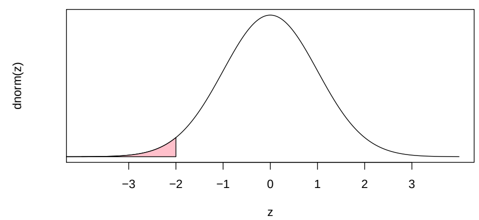
```
pnorm(-2)
```


Eksempel 2

Svar:

```
pnorm(-2)
```

[1] 0.02275



Eksempel 2

Spørgsmål b):

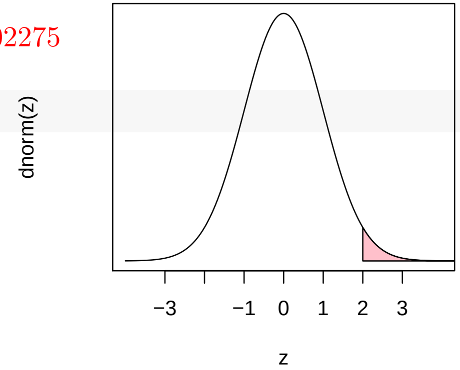
Hvad er sandsynligheden for at vægten måler mindst 2 gram for meget?

Svar:

$P(Z \geq 2) = 0.02275$

```
1-pnorm(2)
```

[1] 0.02275



Eksempel 2

Spørgsmål c):

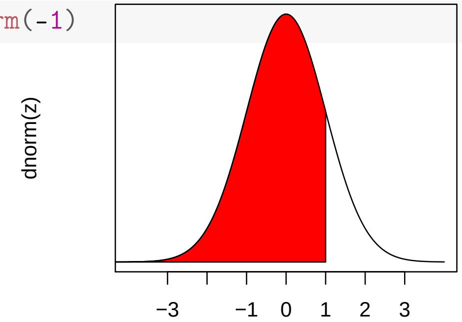
Hvad er sandsynligheden for at vægten måler højst ± 1 gram forkert?

Svar:

$P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0.683$

```
pnorm(1)-pnorm(-1)
```

[1] 0.68269



Eksempel 2

Spørgsmål c):

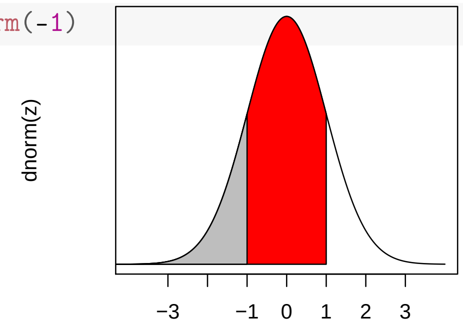
Hvad er sandsynligheden for at vægten måler højst ± 1 gram forkert?

Svar:

$P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0.683$

```
pnorm(1)-pnorm(-1)
```

[1] 0.68269



Eksempel 3

Indkomstfordeling:

Det antages, at blandt en gruppe lærere i folkeskolen, at lønnen kan beskrives ved en normalfordeling med middelværdi $\mu = 280.000$ og spredning $\sigma = 10.000$.

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

Svar:

$P(X > 300) = P(Z > \frac{300-280}{10}) = P(Z > 2) = 0.023$

$$X \sim N(300, 10^2) \Rightarrow Z = \frac{X - 280}{10} \sim N(0, 1^2)$$

Eksempel 3

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

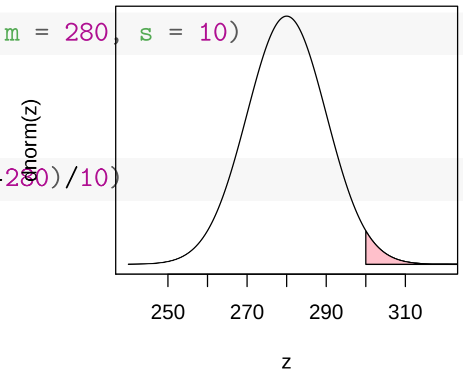
Svar:

```
1-pnorm(300, m = 280, s = 10)
```

[1] 0.02275

```
1-pnorm((300-280)/10)
```

[1] 0.02275



Eksempel 4

En mere smal fordeling:

Det antages, at blandt en gruppe lærere i folkeskolen, at lønnen kan beskrives ved en normalfordeling med middelværdi $\mu = 290.000$ og spredning $\sigma = 4.000$.

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

Eksempel 4

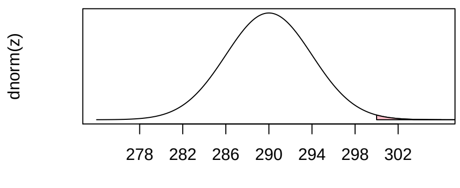
Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

Svar:

```
1-pnorm(300, m = 290, s = 4)
```

[1] 0.0062097



Eksempel 5

Samme indkomstfordeling

Det antages, at blandt en gruppe lærere i folkeskolen, at lønnen kan beskrives ved en normalfordeling med middelværdi $\mu = 290.000$ og spredning $\sigma = 4.000$

"Omvendt spørgsmål"

Angiv det interval, der dækker over 95% af læreres løn

Svar:

```
qnorm(c(0.025, 0.975), m = 290, s = 4)
```

[1] 282.16 297.84

Log-Normal fordelingen

Skrivemåde:

$X \sim LN(\alpha, \beta)$

Tæthedsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} x^{-1} e^{-(\ln(x)-\alpha)^2/2\beta^2} & x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

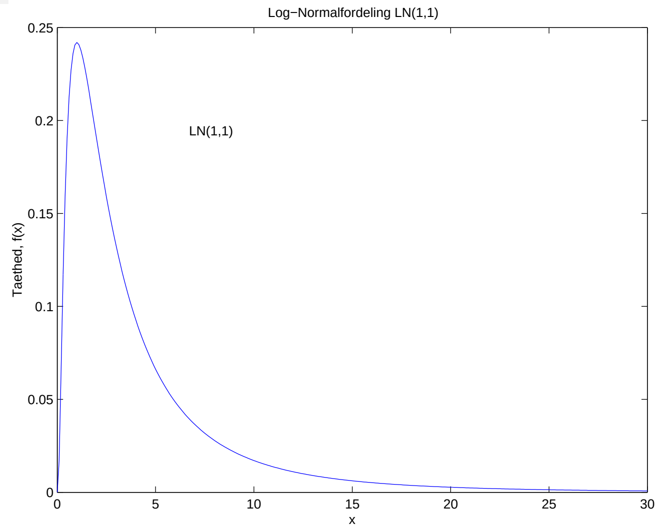
Middelværdi:

$\mu = e^{\alpha+\beta^2/2}$

Varians:

$\sigma^2 = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1)$

Log-Normal fordelingen



Log-Normal fordelingen

Lognormal og Normalfordelingen:

En log-normal fordelt variabel $Y \sim LN(\alpha, \beta)$, kan transformeres til en standard normal fordelt variabel X ved

$$X = \frac{\ln(Y) - \alpha}{\beta}$$

dvs.

$$X \sim N(0, 1^2)$$

Kontinuerte fordelinger i R

R	Betegnelse
`norm`	Normalfordelingen
`unif`	Den uniforme fordeling
`lnorm`	Log-normalfordelingen
`exp`	Exponentialfordelingen

- `d` Tæthedsfunktion $f(x)$ (probability density function).
- `p` Fordelingsfunktion $F(x)$ (cumulative distribution function).
- `q` Fraktil (quantile) i fordeling.
- `r` Tilfældige tal fra fordelingen.

Eksponential fordelingen

Tæthedsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

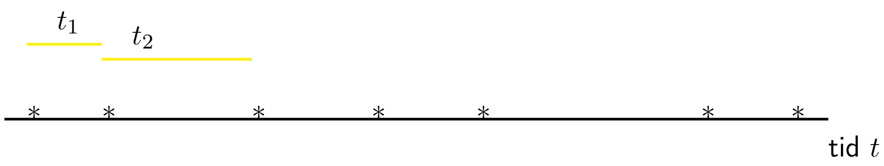
Eksponentialfordelingen

- Eksponential fordelingen er et special tilfælde af Gamma fordelingen
- Eksponential fordelingen anvendes f.eks. til at beskrive levetider og ventetider
- Eksponential fordelingen kan bruges til at beskrive (vente)tiden mellem hændelser i poisson fordelingen
- Middelværdi $\mu = \beta$
- Varians $\sigma^2 = \beta^2$

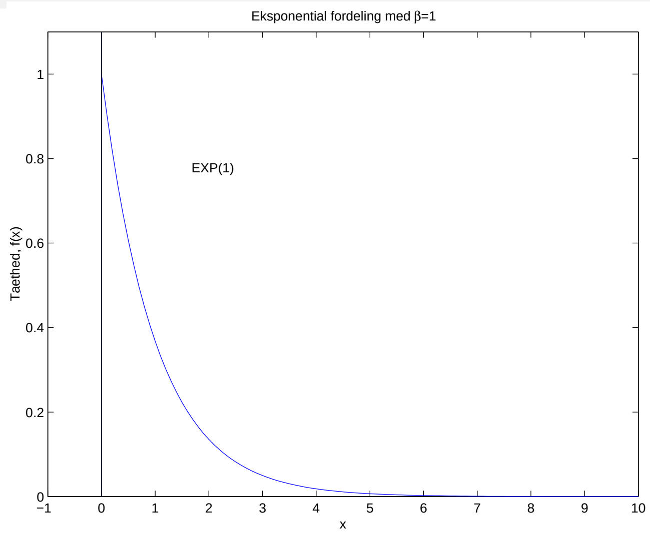
Sammenhæng mellem Eksponential og Poisson fordelingen

Poisson: Diskrete hændelser pr. enhed

Eksponential: Kontinuert afstand mellem hændelser



Eksponential fordelingen



Eksempel 6

Kø-model - poisson proces

Tiden mellem kundeankomster på et posthus er eksponential fordelt med middelværdi $\mu = 2$ minutter.

Spørgsmål:

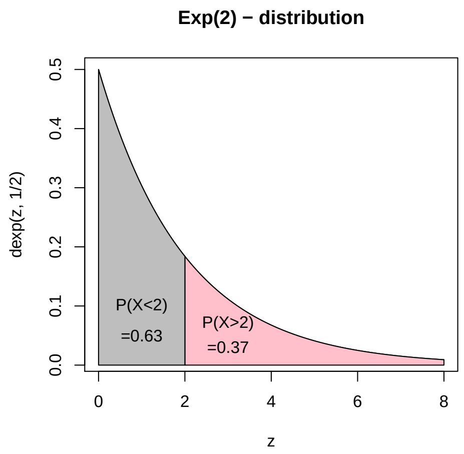
En kunde er netop ankommet. Hvad er sandsynligheden for at der ikke kommer flere kunder indefor en periode på 2 minutter?

Svar:

```
1-pexp(2, rate = 1/2)
```

[1] 0.36788

Eksempel 6



Eksempel 6

```
z=seq(0,8,by=0.01)

plot(z,dexp(z, 1/2),type = "l", main = "Exp(2) - distribution")

polygon(c(2, seq(2, 8, by = 0.01), 8, 2),
c(0, dexp(seq(2, 8, by = 0.01), 1/2), 0, 0),
col = "pink")

text(3,0.07,"P(X>2)")
text(3,0.03,"=0.37")

polygon(c(2, seq(2, 0, by = -0.01), 0, 2),
c(0, dexp(seq(2, 0, by =- 0.01), 1/2), 0, 0),
col = "grey")

text(1,0.1,"P(X<2)")
text(1,0.05,"=0.63")
```


Eksempel 7

Spørgsmål:

En kunde er netop ankommet. Beregn sandsynligheden for at der ikke kommer flere kunder indefor en periode på 2 minutter vha. Poissonfordelingen

Svar:

$\lambda_{2min} = 1, \; P(X = 0) = \frac{e^{-1}}{1!} 1^0 = e^{-1}$

```
dpois(0,1)
```

[1] 0.36788

```
exp(-1)
```

[1] 0.36788

Eksempel 8

Andre tidsperioder:

Tiden mellem kundeankomster på et posthus er eksponential fordelt med middelværdi $\mu = 2$ minutter. Vi betragter nu en periode på 10 minutter

Spørgsmål:

Beregn sandsynligheden for at der ikke kommer nogen kunder i perioden vha. Poissonfordelingen

Svar:

$\lambda_{10min} = 5, \; P(X = 0) = \frac{e^{-5}}{1!} 5^0 = e^{-5}$

```
dpois(0,5)
```

[1] 0.0067379

Regneregler for stokastiske variable

(Gælder BÅDE kontinuert og diskret)

X er en stokastisk variabel

. Vi antager at a og b er konstanter Da gælder:

Middelværdi-regel:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Varians-regel:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 9

X er en stokastisk variabel

. En stokastisk variabel X har middelværdi 4 og varians 6.

Spørgsmål:

Beregn middelværdi og varians for $Y = -3X + 2$

Svar:

$$\mathrm{E}(Y) = -3\mathrm{E}(X) + 2 = -3 \cdot 4 + 2 = -10$$
$$\mathrm{Var}(Y) = (-3)^2 \mathrm{Var}(X) = 9 \cdot 6 = 54$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Regneregler for stokastiske variable

$X_1, \ldots, X_n$ er stokastiske variable

Da gælder (når de er uafhængige):

Middelværdi-regel:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + .. + a_nX_n)$$
$$= a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + .. + a_nE(X_n)$$

Varians-regel:

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + .. + a_nX_n)$$
$$= a_1^2 Var(X_1) + .. + a_n^2 Var(X_n)$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 10

Flypassager-planlægning

Vægten af passagerer på en flystrækning antages normalfordelt $X \sim N(70, 10^2)$.

Et fly, der kan tage 55 passagerer, må max. lastes med 4000 kg (kun passageres vægt betragtes som last).

Spørgsmål:

Beregn sandsynligheden for at flyet bliver overlastet

Hvad er Y=Total passagervægt?

Hvad er Y?

I hvert fald IKKE: $Y = 55 \cdot X$!!!!!!

Eksempel 10

Hvad er Y=Total passagervægt?

$Y = \sum_{i=1}^{55} X_i$, hvor $X_i \sim N(70, 10^2)$

Middelværdi og varians for Y:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{55} E(X_i) = \sum_{i=1}^{55} 70 = 55 \cdot 70 = 3850$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{55} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{55} 100 = 55 \cdot 100 = 5500$$

Bruger normalfordeling for Y:

```
1-pnorm(4000, m = 3850, s = sqrt(5500))
```

[1] 0.021557

Eksempel 10 - FORKERT ANALYSE

Hvad er Y?

I hvert fald IKKE: $Y = 55 \cdot X$!!!!!!

Middelværdi og varians for Y:

$$E(Y) = 55 \cdot 70 = 3850$$

$$\text{Var}(Y) = 55^2 \text{Var}(X) = 55^2 \cdot 100 = 550^2$$

Bruger normalfordeling for Y:

```
1-pnorm(4000, m = 3850, s = 550)
```

[1] 0.39253

Konsekvens af forkert beregning:

MANGE spildte penge for flyselskabet!!!

Oversigt

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science