

Kursus 02402/02323 Introducerende Statistik

Forelæsning 8: Simpel lineær regression

Klaus K. Andersen og Per Bruun Brockhoff

DTU Compute, Statistik og Dataanalyse
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark
e-mail: klaus@cancer.dk

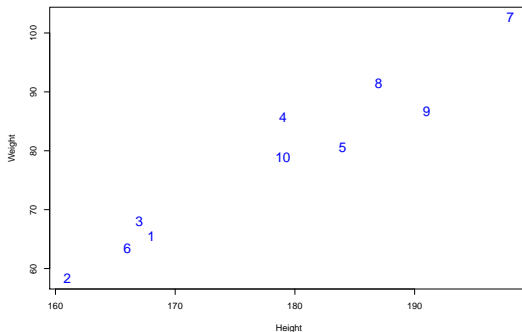
Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

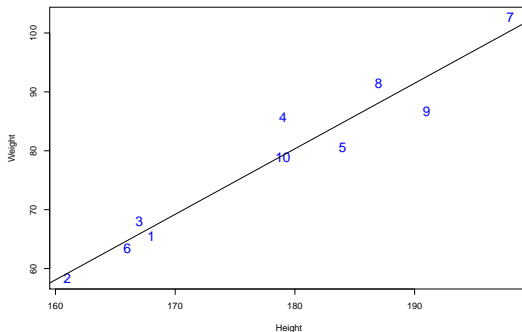
Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9



Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9

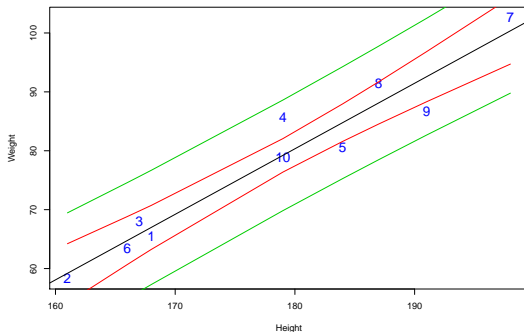


Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9

```
summary(lm(y ~ x))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -5.876 -1.451 -0.608  2.234  6.477
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -119.958     18.897   -6.35  0.00022 ***
## x              1.113       0.106   10.50  5.9e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 3.88 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.932, Adjusted R-squared:  0.924
## F-statistic: 110 on 1 and 8 DF,  p-value: 5.87e-06
```

Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9

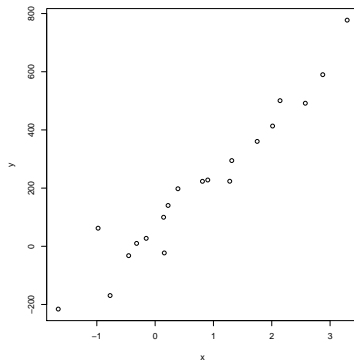


Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 **Lineær regressionsmodel**
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

Et scatter plot af noget data

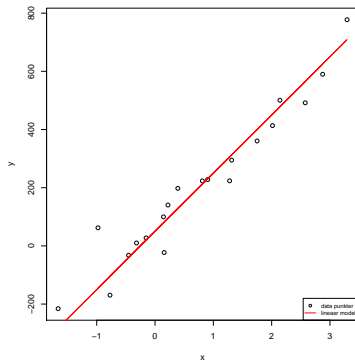
- Vi har n par datapunkter (x_i, y_i)



Opstil en lineær model

- Opstil en lineær model

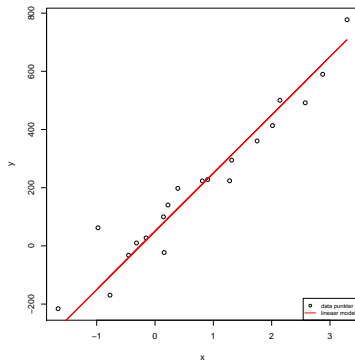
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$



Opstil en lineær model

- Opstil en lineær model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$



men den der mangler noget til at beskrive den *tilfældige variation*!

Opstil en lineær regressionsmodel

- Opstil den *lineære regressionsmodel*

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

- Y_i er den *afhængige variabel* (dependent variable). En stokastisk variabel.
- x_i er en *forklarende variabel* (explanatory variable)
- ε_i er afvigelsen (error). En stokastisk variabel.

Opstil en lineær regressionsmodel

- Opstil den *lineære regressionsmodel*

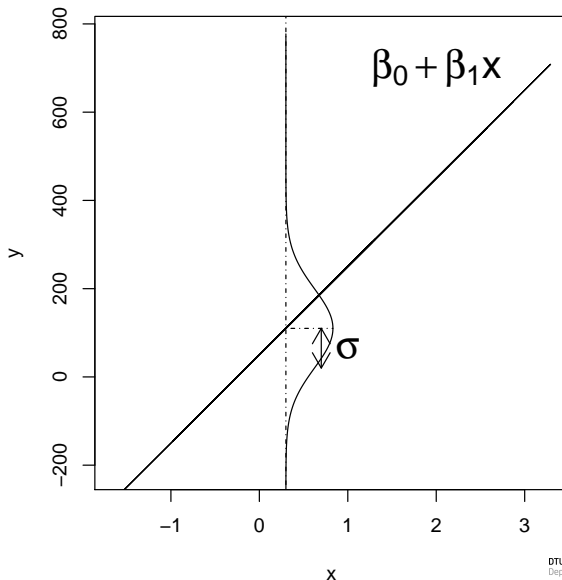
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

- Y_i er den *afhængige variabel* (dependent variable). En stokastisk variabel.
- x_i er en *forklarende variabel* (explanatory variable)
- ε_i er afvigelsen (error). En stokastisk variabel.

og vi antager

ε_i er independent and identically distributed (i.i.d.) og $N(0, \sigma^2)$

Model-illustration



Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 **Mindste kvadraters metode (least squares)**
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

Mindste kvadraters metode

- Hvad kan vi gøre for at estimere parametrene β_0 og β_1 ?

Mindste kvadraters metode

- Hvad kan vi gøre for at estimere parametrene β_0 og β_1 ?

God ide: Minimer variansen σ^2 på afvigelsen. Det er på næsten alle måder det bedste valg i dette setup.

- But how!?

Mindste kvadraters metode

- Hvad kan vi gøre for at estimere parametrene β_0 og β_1 ?

God ide: Minimer variansen σ^2 på afvigelsen. Det er på næsten alle måder det bedste valg i dette setup.

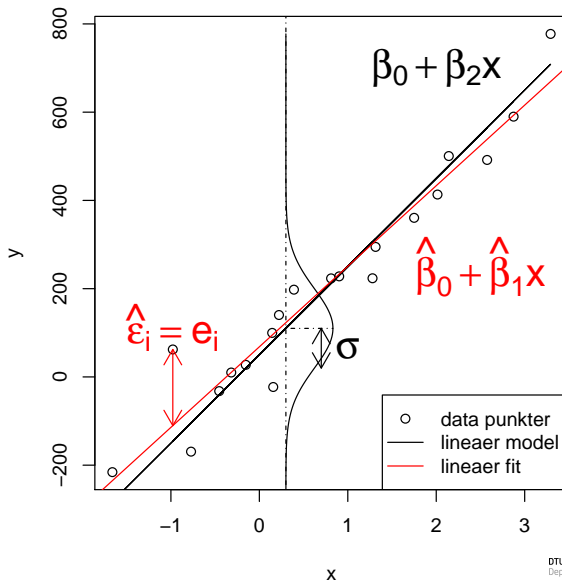
- But how!?

Minimer summen af de kvadrerede afvigelser (Residual Sum of Squares (RSS))

$$RSS(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

$\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ minimerer RSS

Illustration af model, data og fit



Least squares estimator

Theorem 5.4 (her for estimatorer som i eNoten)

The least squares estimators of β_0 and β_1 are given by

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{S_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

where $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Least squares estimator

Theorem 5.4 (her for estimator)

The least squares estimates of β_0 and β_1 are given by

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{S_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

where $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Tænk ikke længere over det for nu!

R eksempel

```
## Simuler en lineær model med normalfordelt afvigelse og estimer parametrene

## FØRST LAV DATA:
## Generer n værdier af input x som uniform fordelt
x <- runif(n=20, min=-2, max=4)

## Simuler lineær regressionsmodel
beta0=50; beta1=200; sigma=90
y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n=length(x), mean=0, sd=sigma)

## HERFRA ligesom virkeligheden, vi har dataen i x og y:
## Et scatter plot af x og y
plot(x, y)

## Udregn least squares estimerne, brug Theorem 5.4
(beta1hat <- sum( (y-mean(y))*(x-mean(x)) ) / sum( (x-mean(x))^2 ))
(beta0hat <- mean(y) - beta1hat*mean(x))

## Brug lm() til at udregne estimerne
lm(y ~ x)

## Plot den estimerede linie
abline(lm(y ~ x), col="red")
```

Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

Parameter estimerterne er stokastiske variabler

Hvis vi tog en ny stikprøve ville estimerterne $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ have samme udfald?

Parameter estimerterne er stokastiske variabler

Hvis vi tog en ny stikprøve ville estimerterne $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ have samme udfald?

Nej, de er stokastiske variabler. Tog vi en ny stikprøve så ville vi have en anden realisation.

Parameter estimererne er stokastiske variabler

Hvis vi tog en ny stikprøve ville estimererne $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ have samme udfald?

Nej, de er stokastiske variabler. Tog vi en ny stikprøve så ville vi have en anden realisation.

Hvordan er parameter estimererne i en lineær regressionsmodel fordelt (givet normalfordelte afvigelser)?

Parameter estimererne er stokastiske variabler

Hvis vi tog en ny stikprøve ville estimererne $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ have samme udfald?

Nej, de er stokastiske variabler. Tog vi en ny stikprøve så ville vi have en anden realisation.

Hvordan er parameter estimererne i en lineær regressionsmodel fordelt (givet normalfordelte afvigelser)?

Prøv lige at simulere for at se på det...

- Hvordan er parameter estimererne i en lineær regressionsmodel fordelt (givet normalfordelte afvigelser)?

De er normalfordelte (for $n < 30$ brug t -fordeling) og deres varians kan estimeres:

Theorem 5.7 (første del)

$$V[\hat{\beta}_0] = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}^2 \sigma^2}{S_{xx}}$$

$$V[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

$$Cov[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1] = -\frac{\bar{x} \sigma^2}{S_{xx}}$$

- Kovariansen $Cov[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]$ (covariance) gør vi ikke mere ud af her.

Estimer af standard afvigelserne på $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$

Theorem 5.7 (anden del)

Where σ^2 is usually replaced by its estimate ($\hat{\sigma}^2$). The central estimator for σ^2 is

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - 2}.$$

When the estimate of σ^2 is used the variances also become estimates and we'll refer to them as $\hat{\sigma}_{\beta_0}^2$ and $\hat{\sigma}_{\beta_1}^2$.

Estimer af standard afvigelserne på $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$

Theorem 5.7 (anden del)

Where σ^2 is usually replaced by its estimate ($\hat{\sigma}^2$). The central estimator for σ^2 is

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}.$$

When the estimate of σ^2 is used the variances also become estimates and we'll refer to them as $\hat{\sigma}_{\beta_0}^2$ and $\hat{\sigma}_{\beta_1}^2$.

Estimat af standard afvigelserne for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ (ligningerne (5-73))

$$\hat{\sigma}_{\beta_0} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}; \quad \hat{\sigma}_{\beta_1} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$**
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

Hypotesetests for parameter estimerne

- Vi kan altså udføre hypotesetests for parameter estimer i en lineær regressionsmodel:

$$H_{0,i} : \beta_i = \beta_{0,i}$$

$$H_{1,i} : \beta_i \neq \beta_{1,i}$$

Hypotesetests for parameter estimerne

- Vi kan altså udføre hypotesetests for parameter estimer i en lineær regressionsmodel:

$$H_{0,i} : \beta_i = \beta_{0,i}$$

$$H_{1,i} : \beta_i \neq \beta_{1,i}$$

- Vi bruger de t -fordelte statistikker:

Theorem 5.11

Under the null-hypothesis ($\beta_0 = \beta_{0,0}$ and $\beta_1 = \beta_{0,1}$) the statistics

$$T_{\beta_0} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{\hat{\sigma}_{\beta_0}}; \quad T_{\beta_1} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{0,1}}{\hat{\sigma}_{\beta_1}},$$

are t -distributed with $n - 2$ degrees of freedom, and inference should be based on this distribution.

- Se Eksempel 5.12 for eksempel på hypotesetest.

- Se Eksempel 5.12 for eksempel på hypotesetest.
- Test om parametrene er signifikant forskellige fra 0

$$H_{0,i} : \beta_i = 0$$

$$H_{1,i} : \beta_i \neq 0$$

- Se resultatet i R

```
## Hypotesetests om signifikante parametre

## Generer x
x <- runif(n=20, min=-2, max=4)
## Simuler Y
beta0=50; beta1=200; sigma=90
y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n=length(x), mean=0, sd=sigma)

## Brug lm() til at udregne estimerne
fit <- lm(y ~ x)

## Se summary, deri står hvad vi har brug for
summary(fit)
```

Konfidensintervaller for parametrene

Method 5.14

$(1 - \alpha)$ confidence intervals for β_0 and β_1 are given by

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\beta_0}$$

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}_{\beta_1}$$

where $t_{1-\alpha/2}$ is the $(1 - \alpha/2)$ -quantile of a t -distribution with $n - 2$ degrees of freedom.

- husk at $\hat{\sigma}_{\beta_0}$ og $\hat{\sigma}_{\beta_1}$ findes ved ligningerne (5-74)
- i R kan $\hat{\sigma}_{\beta_0}$ og $\hat{\sigma}_{\beta_1}$ aflæses ved "Std. Error" ved "summary(fit)"

```

## Lav konfidensintervaller for parametrene

## Antal gentagelser
nRepeat <- 100

## Fangede vi den rigtige parameter
TrueValInCI <- logical(nRepeat)

## Gentag simuleringen og estimeringen nRepeat gange
for(i in 1:nRepeat){
  ## Generer x
  x <- runif(n=20, min=-2, max=4)
  ## Simuler y
  beta0=50; beta1=200; sigma=90
  y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n=length(x), mean=0, sd=sigma)

  ## Brug lm() til at udregne estimerterne
  fit <- lm(y ~ x)

  ## Heldigvis kan R beregne konfidensintervallet (level=1-alpha)
  (ci <- confint(fit, "(Intercept)", level=0.95))

  ## Var den rigtige parameterværdi "fanget" af intervallet?
  (TrueValInCI[i] <- ci[1] < beta0 & beta0 < ci[2])
}

## Hvor ofte blev den rigtige værdi "fanget"?
sum(TrueValInCI) / nRepeat

```

Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval**
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

Method 5.17: Konfidensinterval for $\beta_0 + \beta_1 x_0$

- Konfidensinterval for $\beta_0 + \beta_1 x_0$ svarer til et konfidensinterval for linien i punktet x_0
- Beregnes med

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

- Konfidensintervallet vil i $100(1 - \alpha)\%$ af gangene indeholde den rigtige linie, altså $\beta_0 + \beta_1 x_0$

Method 5.17: Prædiktionsinterval for $\beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$

- Prædiktionsintervallet (prediction interval) for Y_0 beregnes med en værdi x_0
- Dette gøres *før* Y_0 observeres med

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

- Prædiktionsintervallet vil $100(1 - \alpha)\%$ af gangene indeholde den observerede y_0
- Et prædiktionsinterval bliver altså større end et konfidensinterval for fastholdt α

Eksempel med konfidensinterval for linien

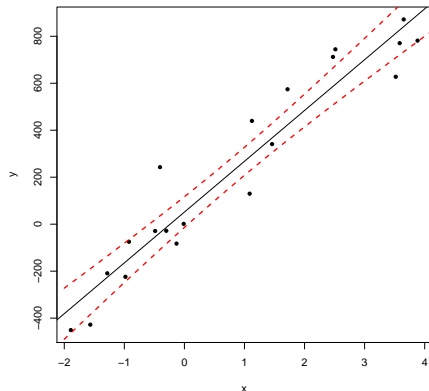
```
## Eksempel med konfidensinterval for linien

## Lav en sekvens af x værdier
xval <- seq(from=-2, to=6, length.out=100)

## Brug predict funktionen
CI <- predict(fit, newdata=data.frame(x=xval),
interval="confidence",
level=.95)

## Se lige hvad der kom
head(CI)

## Plot data, model og intervaller
plot(x, y, pch=20)
abline(fit)
lines(xval, CI[, "lwr"], lty=2, col="red", lwd=2)
lines(xval, CI[, "upr"], lty=2, col="red", lwd=2)
```



Eksempel med prædiktionsinterval

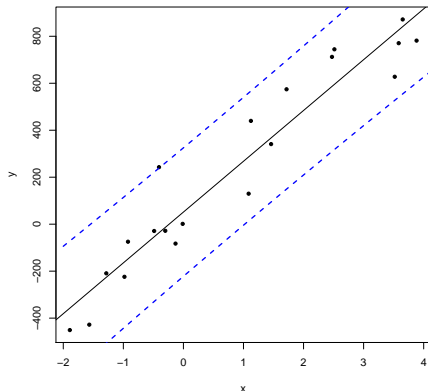
```
## Eksempel med prædiktionsinterval

## Lav en sekvens af x værdier
xval <- seq(from=-2, to=6, length.out=100)

## Beregn interval for hvert x
PI <- predict(fit, newdata=data.frame(x=xval),
interval="prediction",
level=.95)

## Se lige hvad der kom tilbage
head(PI)

## Plot data, model og intervaller
plot(x, y, pch=20)
abline(fit)
lines(xval, PI[, "lwr"], lty=2, col="blue", lwd=2)
lines(xval, PI[, "upr"], lty=2, col="blue", lwd=2)
```



Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 **Korrelation**
- 8 Residual Analysis: Model control

Hvad bliver mere skrevet ud af summary?

```
summary(fit)

##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -184.7   -96.4   -20.3    86.6   279.1
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)      51.5       31.1    1.66    0.12
## x              216.3       15.2   14.22 3.1e-11 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 126 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.918, Adjusted R-squared:  0.914
## F-statistic: 202 on 1 and 18 DF, p-value: 3.14e-11
```

summary(lm(y~x)) wrap up

• Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

- Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"
Koefficienternes:

Estimat	$\hat{\sigma}_{\beta_i}$	t_{obs}	p-værdi
---------	--------------------------	------------------	---------

- Testen er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
- Stjernerne er sat efter p-værdien

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

- Coefficients:
 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"
Koefficienternes:

Estimat	$\hat{\sigma}_{\beta_i}$	t_{obs}	p-værdi
---------	--------------------------	------------------	---------

- Testen er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
 - Stjernerne er sat efter p-værdien
- Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

- Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"
Koefficienternes:

Estimat	$\hat{\sigma}_{\beta_i}$	t_{obs}	p-værdi
---------	--------------------------	------------------	---------

- Testen er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
 - Stjernerne er sat efter p-værdien
- Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ udskrevet er $\hat{\sigma}$ og ν frihedsgrader (brug til hypotesetesten)

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

- Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"
Koefficienternes:

Estimat	$\hat{\sigma}_{\beta_i}$	t_{obs}	p-værdi
---------	--------------------------	------------------	---------

- Testen er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
 - Stjernerne er sat efter p-værdien
- Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ udskrevet er $\hat{\sigma}$ og ν frihedsgrader (brug til hypotesetesten)
- Multiple R-squared: XXX

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

- Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"
Koefficienternes:

Estimat	$\hat{\sigma}_{\beta_i}$	t_{obs}	p-værdi
---------	--------------------------	------------------	---------

- Testen er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
 - Stjernerne er sat efter p-værdien
- Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ udskrevet er $\hat{\sigma}$ og ν frihedsgrader (brug til hypotesetesten)
- Multiple R-squared: XXX
Forklaret varians r^2

summary(lm(y~x)) wrap up

- Residuals: Min 1Q Median 3Q Max:
Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

- Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stjerner"
Koefficienternes:

Estimat	$\hat{\sigma}_{\beta_i}$	t_{obs}	p-værdi
---------	--------------------------	------------------	---------

- Testen er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
 - Stjernerne er sat efter p-værdien
- Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom
 $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ udskrevet er $\hat{\sigma}$ og ν frihedsgrader (brug til hypotesetesten)
- Multiple R-squared: XXX
Forklaret varians r^2
- Resten bruger vi ikke i det her kursus

Forklaret varians og korrelation

- Forklaret varians af en model er r^2 , i summary "Multiple R-squared"
- Beregnes med

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

hvor $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

- Andel af den totale varians der er forklaret med modellen

Forklaret varians og korrelation

- Korrelationen ρ er et mål for *lineær sammenhæng* mellem to stokastiske variable
- Estimeret (i.e. empirisk) korrelation

$$\hat{\rho} = r = \sqrt{r^2} \operatorname{sgn}(\hat{\beta}_1)$$

hvor $\operatorname{sgn}(\hat{\beta}_1)$ er: -1 for $\hat{\beta}_1 \leq 0$ og 1 for $\hat{\beta}_1 > 0$

Forklaret varians og korrelation

- Korrelationen ρ er et mål for *lineær sammenhæng* mellem to stokastiske variable
- Estimeret (i.e. empirisk) korrelation

$$\hat{\rho} = r = \sqrt{r^2} \operatorname{sgn}(\hat{\beta}_1)$$

hvor $\operatorname{sgn}(\hat{\beta}_1)$ er: -1 for $\hat{\beta}_1 \leq 0$ og 1 for $\hat{\beta}_1 > 0$

- Altså:
 - Positiv korrelation ved positiv hældning
 - Negativ korrelation ved negativ hældning

Test for signifikant korrelation

- Test for signifikant korrelation (lineær sammenhæng) mellem to variable

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

er ækvivalent med

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

hvor $\hat{\beta}_1$ er estimatet af hældningen i simpel lineær regressionsmodel

```
## Korrelation

## Generer x
x <- runif(n=20, min=-2, max=4)
## Simuler y
beta0=50; beta1=200; sigma=90
y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n=length(x), mean=0, sd=sigma)

## Scatter plot
plot(x,y)

## Brug lm() til at udregne estimaterne
fit <- lm(y ~ x)

## Den rigtige linie
abline(beta0, beta1)
## Plot fittet
abline(fit, col="red")

## Se summary, deri står hvad vi har brug for
summary(fit)

## Korrelation mellem x og y
cor(x,y)

## Kvadreret er den "Multiple R-squared" fra summary(fit)
cor(x,y)^2
```

Oversigt

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control

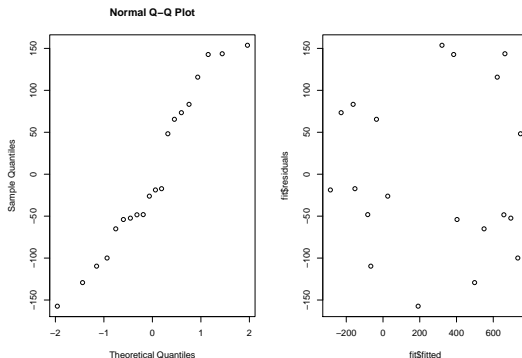
Residual Analysis

Method 5.26

- Check normality assumption with qq-plot.
- Check (non)systematic behavior by plotting the residuals e_i as a function of fitted values \hat{y}_i

Residual Analysis in R

```
fit <- lm(y ~ x)
par(mfrow = c(1, 2))
qqnorm(fit$residuals)
plot(fit$fitted, fit$residuals)
```



Outline

- 1 Motiverende eksempel: Højde-vægt
- 2 Lineær regressionsmodel
- 3 Mindste kvadraters metode (least squares)
- 4 Statistik og lineær regression??
- 5 Hypotesetests og konfidensintervaller for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$
- 6 Konfidensinterval og prædiktionsinterval
 - Konfidensinterval for linien
 - Prædiktionsinterval
- 7 Korrelation
- 8 Residual Analysis: Model control