

Peder Bacher

DTU Compute, Dynamiske Systemer
Bygning 303B, Rum 009
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark
e-mail: pbac@dtu.dk

Forår 2017

Chapter 4: Statistics by simulation

Simulation:

- Draw random values and calculate the statistic many times
- Error propagation rules
(e.g. through a non-linear function)
- Bootstrapping of confidence intervals:
 - Parametric (Simulate many outcomes of random var.)
 - Non-parametric (Draw values directly from data)

Specific situations: (4 versions of confidence intervals)

- One-sample and Two-sample data
- Parametric vs. non-parametric

Kapitel 4: Statistik ved simulering

Simulering:

- Træk tilfældige værdier og beregn statistik mange gange
- Fejlforplantning (error propagation rules)
(F.eks. igennem ikke-lineær funktion)
- Bootstrapping af konfidensintervaller:
 - Parametrisk (Simuler mange udfald af stokastisk var.)
 - Ikke-parametrisk (Træk direkte fra data)

Specifikke setups: (4 versioner af konfidensintervaller)

- Æn gruppe/stikprøve og to grupper/stikprøver data
- Parametrisk vs. ikke-parametrisk

Oversigt

- 1 Introduktion til simulation
 - Hvad er simulering egentlig?
- 2 Fejlophobningslove
- 3 Parametrisk bootstrap
 - Introduction to bootstrap
 - One-sample konfidensinterval for μ
 - One-sample konfidensinterval for en vilkårlig størrelse
 - Two-sample konfidensintervaller for en vilkårlig fordeling
- 4 Ikke-parametrisk bootstrap
 - One-sample konfidensinterval for μ
 - One-sample konfidensinterval for en vilkårlig størrelse
 - Two-sample konfidensintervaller

Motivation

- Mange relevant statistikker ("computed features") har komplicerede samplingfordelinger:
 - Medianen
 - Fraktiler generelt, dvs. f.eks. også $IQR = Q_3 - Q_1$
 - Enhver ikke-lineær function af en eller flere input variable
 - ...
- Data/populations fordelingen kan være ikke-normal (komplicerer den statistiske teori)
- Vi kan "håbe" på the magic of CLT (Central Limit Theorem), men afhænger af antal samples
- MEN: Nogle gange kan vi ikke være helt sikre på om det er godt nok - simulering kan hjælpe til at verificere!
- Kræver: Brug af computer - R er et super værktøj til dette!

Hvad er simulering egentlig?

- (Pseudo)tilfældige tal genereret af en computer
- En tilfældighedsgenerator er en algoritme der kan generere x_{i+1} ud fra x_i
- En sekvens af tal "ser tilfældige ud"
- Kræver en "start" - kaldet "seed" (Bruger typisk uret i computeren)
- Kapitel 2.6: Grundlæggende simuleres den uniforme fordeling, og så bruges:

Remark 2.51:

Hvis $U \sim \text{Uniform}(0,1)$ og F er en fordelingsfunktion for en eller anden sandsynlighedsfordeling, så vil $F^{-1}(U)$ følge fordelingen givet ved F

Anvendelser

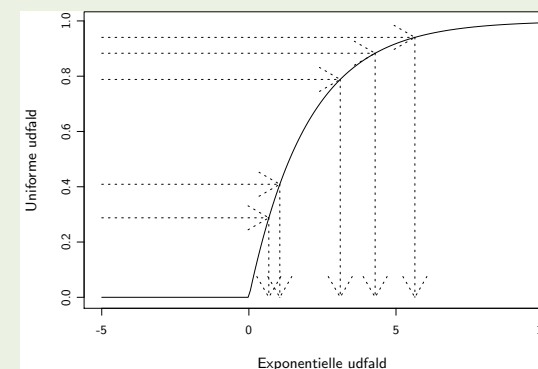
Stokastisk simulering anvendes mange steder:

- Trafiksimulering
- Kø simulering, f.eks. call-center
- Agent baseret simulering, f.eks. evakuering og markeder
- ...

Generelt, kan bruges til at modellere komplekse stokastiske processer ved generere tilfældige udfald

Eksempel: Exponentialfordelingen med $\lambda = 0.5$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-0.5x}$$



I praksis i R

De forskellige fordelinger er gjort klar til simulering:

rbinom	Binomialfordelingen
rpois	Poissonfordelingen
rhyper	Den hypergeometriske fordeling
rnorm	Normalfordelingen
rlnorm	Lognormalfordelingen
rexp	Eksponentialfordelingen
runif	Den uniforme(lige) fordeling
rt	t-fordelingen
rchisq	χ^2 -fordelingen
rf	F-fordelingen

Eksempel: Simuler 100 binomialfordelte værdier

```
## Simuler fra nogle fordelinger

## Sæt et seed for at få samme udfald hver gang
set.seed(123)

## 100 realisationer fra binomialfordelingen:
## Antal succeser fra 25 trækninger med 0.2 sandsynlighed for succes
rbinom(n=100, size=25, prob=0.2)

## Eksponential fordelte
hist(rexp(n=100, rate=2), prob=TRUE)
## Plot the theoretical pdf
xseq <- seq(0,10,len=1000)
lines(xseq, dexp(xseq, rate=2))
```

Eksempel: Areal af plader

En virksomhed producerer rektangulære plader

- Bredden X af pladerne (i meter) antages at kunne beskrives med en normalfordeling $N(2, 0.01^2)$ og længden Y af pladerne (i meter) antages at kunne beskrives med en normalfordeling $N(3, 0.02^2)$
- Man er interesseret i arealet, som jo så givet ved

$$A = XY$$

Spørgsmål som kan stilles er f.eks.:

- Hvor ofte sådanne plader har et areal, der afviger mere end 0.1m^2 fra de 6m^2 ?
- Sandsynligheden for andre mulige hændelser?
- Generelt: Hvad er sandsynlighedsfordelingen for A ?

Eksempel: Areal af plader

- Hvor ofte sådanne plader har et areal, der afviger mere end 0.1m^2 fra de 6m^2 ?

Løsning ved simulering:

```
## Sæt et seed for at få samme udfald hver gang
set.seed(345)
## Antal simuleringer
k = 10000
## Simuler længderne af siderne
x = rnorm(k, 2, 0.01)
y = rnorm(k, 3, 0.02)
## Beregn arealet for hver simulering
area = x*y

## Beregn statistikker
## (stikprøve)Gennemsnit
mean(area)
## (stikprøve)spredning
sd(area)
## Fraktion af arealer afviger mere end 0.1
sum(abs(area-6) > 0.1) / k
```

Fejlphobning

Fejlphobning (error propagation)

- Vi har n stokastiske variabler X_1, X_2, \dots, X_n og kender deres varianser $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$
- Og vil finde variansen af en ikke-lineær funktion af dem $\sigma_{f(X_1, \dots, X_n)}^2 = \text{Var}(f(X_1, \dots, X_n))$

3 måder at løse på for ikke-lineær funktion $f()$:

- Simulation (Method 4.4)
- Lineær approksimation (Method 4.3)
- Teoretisk udledning

Fejlphobning - ved simulering

Method 4.4: Error propagation by simulation

Assume we have actual measurements x_1, \dots, x_n with known/assumed error variances $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

- 1 Simulate k outcomes of all n measurements from assumed error distributions, e.g. $N(x_i, \sigma_i^2)$: $X_i^{(j)}, j = 1, \dots, k$
- 2 Calculate the standard deviation directly as the observed standard deviation of the k simulated values of f

$$s_{f(X_1, \dots, X_n)}^{\text{sim}} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (f_j - \bar{f})^2}$$

where

$$f_j = f(X_1^{(j)}, \dots, X_n^{(j)})$$

Eksempel: Varians af areal (Simulering)

Beregn variansen af arealet med simulering:

```
## Beregn variansen af arealet med simulering
## Antal simuleringer
k = 10000
## Simuler længderne af siderne
x = rnorm(k, 2, 0.01)
y = rnorm(k, 3, 0.02)
## Beregn arealet for hver simulering
area = x*y
## Beregn variansen af de simulerede arealer
var(area)
```

Fejlphobning - ved lineær approksimation

Vi kender allerede regneregler for lineære funktioner (Theorem 2.56)

$$\sigma_{f(X_1, \dots, X_n)}^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \quad \text{hvis} \quad f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

Method 4.3: for ikke-lineære funktioner

$$\sigma_{f(X_1, \dots, X_n)}^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2$$

Spørgsmål om hvilken metode til beregning af varians

(socrative.com - ROOM:PBAC)

Hvordan beregnes: $\text{Var}(2^2X - Y)$?

A: Som lineær funktion B: Som ikke-lineær funktion C: Ved ikke

Svar: A: Som *lineær funktion*

(Regneregler: Theorem 2.56 mean and variance of linear combinations)

Hvordan beregnes: $\text{Var}(X + Y^{-1})$?

A: Som lineær funktion B: Som *ikke-lineær* funktion C: Ved ikke

Svar: B: Som *ikke-lineær funktion*

(Brug approximation (Method 4.3) eller simulation (Method 4.4))

Eksempel: Varians af areal (ikke-lineære fejlophobningslov)

- Vi har allerede brugt eksemplet med areal af en plade
- Nu spørger vi: Hvad er "fejlen" på $A = 2.00 \times 3.00 = 6.00 \text{ m}^2$ fundet ved den ikke-lineære fejlophobningslov?

Eksempel: Varians af areal (ikke-lineære fejlophobningslov)

Varianserne er

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = 0.01^2 \text{ og } \sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = 0.02^2$$

Funktionen og de partielt afledte er

$$f(x, y) = xy, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Så resultatet bliver

$$\begin{aligned} \text{Var}(A) &\approx \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_Y^2 \\ &= y^2 \sigma_X^2 + x^2 \sigma_Y^2 \\ &= 3.00^2 \cdot 0.01^2 + 2.00^2 \cdot 0.02^2 \\ &= 0.0025 \end{aligned}$$

Eksempel: Varians af areal (Teoretisk udledning)

Faktisk kan man finde variansen for $A = XY$ teoretisk

$$\begin{aligned} \text{Var}(XY) &= E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 \\ &= E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2E(Y)^2 \\ &= [\text{Var}(X) + E(X)^2][\text{Var}(Y) + E(Y)^2] - E(X)^2E(Y)^2 \\ &= \text{Var}(X)\text{Var}(Y) + \text{Var}(X)E(Y)^2 + \text{Var}(Y)E(X)^2 \\ &= 0.01^2 \times 0.02^2 + 0.01^2 \times 3^2 + 0.02^2 \times 2^2 \\ &= 0.00000004 + 0.0009 + 0.0016 \\ &= 0.00250004 \end{aligned}$$

Et summary

Igen: 3 måder til *beregning af varians af ikke-lineær funktion*
(husk, det er rent teoretisk, dvs. ingen data):

- 1 Simuleringsbaseret
- 2 Den analytiske, men approksimative, fejlphobningslov
- 3 Teoretisk udledning

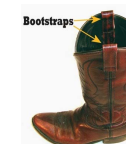
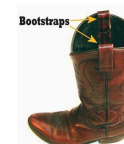
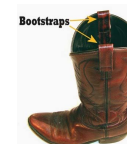
Simulering har en række fordele:

- 1 Det er en simpel måde at beregne andre størrelser end standardafvigelsen (som kan være mere komplicerede, f.eks. udtryk sværere at differentiere)
- 2 Det er en simpel måde at bruge andre fordelinger end normalfordelingen
- 3 Det afhænger ikke af en lineær approksimation (som error propagation) til den underliggende ikke-lineære funktion

Bootstrapping

Bootstrapping findes i to versioner:

- 1 Parametrisk bootstrap: Simuler gentagne samples fra en antagende (og estimerede) fordeling.
- 2 Ikke-parametrisk bootstrap: Simuler gentagne samples direkte fra data.



Eksempel: Konfidensinterval for middelværdien i en eksponentialfordeling

Antag at vi har observeret følgende 10 opkaldsventetider (i sekunder) i et call center

32.6, 1.6, 42.1, 29.2, 53.4, 79.3, 2.3, 4.7, 13.6, 2.0

Vi estimerer fra data (eksponential fordelingen har en parameter *raten*)

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 26.08 \text{ og dermed er raten: } \hat{\lambda} = 1/26.08 = 0.03834356$$

Vores fordelingsantagelse:

Ventetiderne kommer fra en eksponentialfordeling

Hvad er konfidensintervallet for μ ?

Baseret på tidligere indhold i dette kursus: Det ved vi ikke!

Eksempel: Konfidensinterval for middelværdien i en eksponentialfordeling

```
## Beregn konfidensinterval for middelværdien med simulering

## Sæt seed hvis sammen resultat ønskes
set.seed(9876.543)

## Første gang: Simuler 10 observationer og beregn gennemsnit
simSample <- rexp(10, 1/26.08)
mean1 <- mean(simSample)

## Anden gang: Simuler 10 observationer og beregn gennemsnit
simSample <- rexp(10, 1/26.08)
mean2 <- mean(simSample)

## Tredje gang: Simuler 10 observationer og beregn gennemsnit
simSample <- rexp(10, 1/26.08)
mean3 <- mean(simSample)

## Gør det 100000 gange!
```

Alright, det må kunne gøres smartere!!

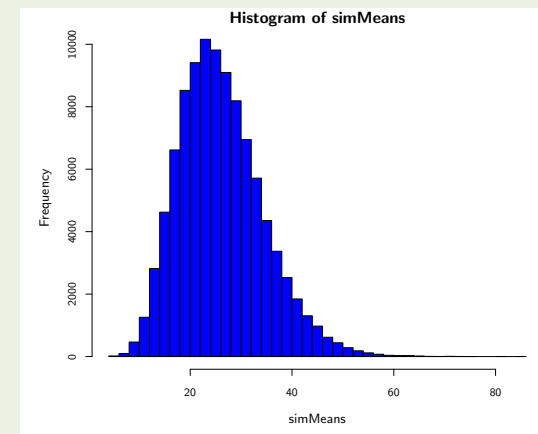
Eksempel: Konfidensinterval for middelværdien i en eksponentialfordeling

```
## Beregn konfidensinterval for middelværdien med simulering
## Set the number of simulations:
k <- 100000
## 1. Simulate 10 exponentials k times and keep in a matrix:
set.seed(9876.543)
simSamples <- replicate(k, rexp(10, 1/26.08))
## 2. Compute the mean of the 10 simulated observations k times:
simMeans <- apply(simSamples, 2, mean)
## 3. Find the two relevant quantiles of the k simulated means:
quantile(simMeans, c(0.025, 0.975))

## 2.5% 98%
## 13 45
```

Example: Konfidensinterval for middelværdien i en eksponentialfordeling

```
hist(simMeans, col="blue", nclass=30)
```



Eksempel: Konfidensinterval for medianen i en eksponentialfordeling

Antag at vi har observeret følgende 10 opkaldsventetider (i sekunder) i et call center

32.6, 1.6, 42.1, 29.2, 53.4, 79.3, 2.3, 4.7, 13.6, 2.0

Vi estimerer fra data

Median = 21.4 og $\hat{\mu} = \bar{x} = 26.08$

Vores fordelingsantagelse

Ventetiderne kommer fra en eksponentialfordeling

Hvad er konfidensintervallet for medianen?

Baseret på tidligere indhold i dette kursus: Det ved vi ikke!

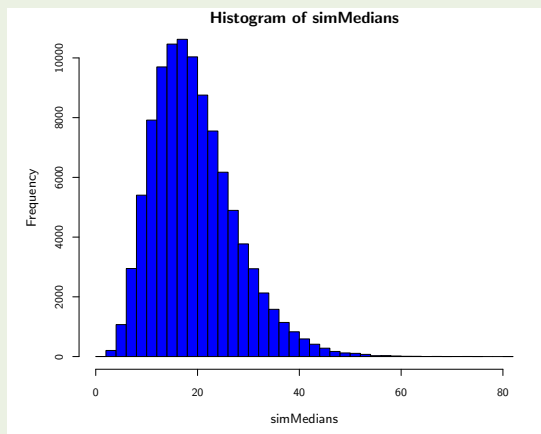
Eksempel: Konfidensinterval for medianen i en eksponentialfordeling

```
## Beregn konfidensinterval for medianen med parametrisk bootstrapping
## Set the number of simulations:
k <- 100000
## 1. Simulate 10 exponentials with the right mean k times:
set.seed(9876.543)
simSamples <- replicate(k, rexp(10, 1/26.08))
## 2. Compute the median of the n=10 simulated observations k times:
simMedians <- apply(simSamples, 2, median)
## 3. Find the two relevant quantiles of the k simulated medians:
quantile(simMedians, c(0.025, 0.975))

## 2.5% 98%
## 7 38
```

Eksempel: Konfidensinterval for medianen i en eksponentialfordeling

```
hist(simMedians, col="blue", nclass=30)
```



Konfidensinterval for en vilkårlig beregningsstørrelse

Method 4.7: Confidence interval for any feature θ by parametric bootstrap

Assume we have actual observations x_1, \dots, x_n and assume that they stem from some probability distribution with density f .

- 1 Simulate k samples of n observations from the assumed distribution f where the mean^a is set to \bar{x}
- 2 Calculate the statistic $\hat{\theta}$ in each of the k samples $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_k^*$
- 3 Find the $100(\alpha/2)\%$ and $100(1 - \alpha/2)\%$ quantiles for these, $q_{100(\alpha/2)\%}^*$ and $q_{100(1-\alpha/2)\%}^*$ as the $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval:

$$\left[q_{100(\alpha/2)\%}^*, q_{100(1-\alpha/2)\%}^* \right]$$

^aAnd otherwise chosen to match the data as good as possible: Some distributions have more than just a single mean related parameter, e.g. the normal or the log-normal. For these one should use a distribution with a variance that matches the sample variance of the data. Even more generally the approach would be to match the chosen distribution to the data by the so-called *maximum likelihood* approach

Et andet eksempel: 99% konfidensinterval for Q_3 for en normalfordeling

```
## Konfidensinterval for den øvre kvartil (Q3) i en normalfordeling
## Read in the heights data:
x <- c(168, 161, 167, 179, 184, 166, 198, 187, 191, 179)
n <- length(x)
## Define a (upper-quartile) Q3-function:
Q3 <- function(x){ quantile(x, 0.75)}
## Set the number of simulations:
k <- 100000
## 1. Simulate k samples of n=10 normals with the right mean and variance:
set.seed(9876.543)
simSamples <- replicate(k, rnorm(n, mean(x), sd(x)))
## 2. Compute the Q3 of the n=10 simulated observations k times:
simQ3s <- apply(simSamples, 2, Q3)
## 3. Find the two relevant quantiles of the k simulated medians:
quantile(simQ3s, c(0.005, 0.995))

## 0.5% 100%
## 173 198
```

Two-sample konfidensinterval for en vilkårlig feature sammenligning $\theta_X - \theta_Y$ (inkl. $\mu_X - \mu_Y$)

Method 4.10: Two-sample confidence interval for any feature comparison $\theta_X - \theta_Y$ by parametric bootstrap

Assume we have actual observations x_X, \dots, x_n and y_X, \dots, y_n and assume that they stem from some probability distributions with density f_X and f_Y .

- 1 Simulate k sets of 2 samples of n_X and n_Y observations from the assumed distributions setting the means^a to $\hat{\mu}_X = \bar{x}$ and $\hat{\mu}_Y = \bar{y}$, respectively
- 2 Calculate the difference between the features in each of the k samples $\hat{\theta}_{x1}^* - \hat{\theta}_{y1}^*, \dots, \hat{\theta}_{xk}^* - \hat{\theta}_{yk}^*$
- 3 Find the $100(\alpha/2)\%$ and $100(1 - \alpha/2)\%$ quantiles for these, $q_{100(\alpha/2)\%}^*$ and $q_{100(1-\alpha/2)\%}^*$ as the $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval:

$$\left[q_{100(\alpha/2)\%}^*, q_{100(1-\alpha/2)\%}^* \right]$$

^aAs before

Eksempel: Konfidensinterval for the forskellen mellem to eksponentielle middelværdier

```
## Konfidensinterval for the forskellen mellem to eksponentielle middelværdier
## Day 1 data:
x <- c(32.6, 1.6, 42.1, 29.2, 53.4, 79.3,
      2.3, 4.7, 13.6, 2.0)
## Day 2 data:
y <- c(9.6, 22.2, 52.5, 12.6, 33.0, 15.2,
      76.6, 36.3, 110.2, 18.0, 62.4, 10.3)
## Keep sample sizes
n1 <- length(x)
n2 <- length(y)
```

Eksempel: Konfidensinterval for the forskellen mellem to eksponentielle middelværdier

```
## Konfidensinterval for the forskellen mellem to eksponentielle middelværdier
## Set the number of simulations:
k <- 100000
## 1. Simulate k samples of each n1=10 and n2=12
## exponentials with the right means:
set.seed(9876.543)
simxSamples <- replicate(k, rexp(n1, 1/mean(x)))
simySamples <- replicate(k, rexp(n2, 1/mean(y)))
## 2. Compute the difference between the simulated
## means k times:
simDifMeans <- apply(simxSamples, 2, mean) -
               apply(simySamples, 2, mean)
## 3. Find the two relevant quantiles of the
## k simulated differences of means:
quantile(simDifMeans, c(0.025, 0.975))

## 2.5% 98%
## -41 14
```

Parametrisk bootstrap - et overblik

Vi antager en fordeling!

Der er parametre i en fordeling, derfor *parametrisk bootstrap*

To konfidensinterval-metodeboks blev givet:

	One-sample	Two-sample
For any feature	Method 4.7	Method 4.10

Ikke-parametrisk bootstrap - et overblik

Vi antager IKKE noget om nogen fordelinger!

Altså der er ingen parametre, derfor *ikke-parametrisk bootstrap*

To konfidensinterval-metodeboks bliver givet:

	One-sample	Two-sample
For any feature	Method 4.15	Method 4.17

Eksempel: Kvinders cigaretforbrug

I et studie undersøgte man kvinders cigaretforbrug før og efter fødsel

Man fik følgende observationer af antal cigaretter pr. dag:

før	efter	før	efter
8	5	13	15
24	11	15	19
7	0	11	12
20	15	22	0
6	0	15	6
20	20		

Sammenlign før og efter! Er der sket nogen ændring i gennemsnitsforbruget!

Eksempel: Kvinders cigaretforbrug

Et parret t -test setup, MEN med tydeligvis ikke-normale data!

```
## Parret test af middelværdiforskel med ikke-parametrisk bootstrapping
## Input the two cigaret use samples
x1 <- c(8, 24, 7, 20, 6, 20, 13, 15, 11, 22, 15)
x2 <- c(5, 11, 0, 15, 0, 20, 15, 19, 12, 0, 6)
## Calculate the difference
dif <- x1 - x2
dif

## [1] 3 13 7 5 6 0 -2 -4 -1 22 9

## And the sample mean
mean(dif)

## [1] 5.3
```

Eksempel: Kvinders cigaretforbrug - bootstrapping

```
#####
## Resample from the several times
sample(dif, replace = TRUE)

## [1] 3 6 0 9 3 9 -4 0 0 -1 6

sample(dif, replace = TRUE)

## [1] -1 9 5 5 6 9 3 13 3 22 22

sample(dif, replace = TRUE)

## [1] -4 -2 3 -1 3 -1 7 3 9 6 0

sample(dif, replace = TRUE)

## [1] 6 3 -4 9 3 22 3 -1 -1 -4 7

sample(dif, replace = TRUE)
```

Eksempel: Kvinders cigaretforbrug - de ikke-parametriske bootstrap resultater:

```
## Resample calculate mean statistic many time, and find 95% confidence interval
k = 100000
simSamples = replicate(k, sample(dif, replace = TRUE))
## Take the mean for every resample
simMeans = apply(simSamples, 2, mean)
## Take the two quantiles to get the confidence interval
quantile(simMeans, c(0.025, 0.975))

## 2.5% 98%
## 1.4 9.8
```

One-sample konfidensinterval for en vilkårlig feature θ (inkl. μ)

Method 4.15: Confidence interval for any feature θ by non-parametric bootstrap

Assume we have actual observations x_1, \dots, x_n .

- 1 Simulate k samples of size n by randomly sampling among the available data (with replacement)
- 2 Calculate the statistic $\hat{\theta}$ in each of the k samples $\hat{\theta}_1^*, \dots, \hat{\theta}_k^*$.
- 3 Find the $100(\alpha/2)\%$ and $100(1 - \alpha/2)\%$ quantiles for these, $q_{100(\alpha/2)\%}^*$ and $q_{100(1-\alpha/2)\%}^*$ as the $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval:

$$\left[q_{100(\alpha/2)\%}^*, q_{100(1-\alpha/2)\%}^* \right]$$

Eksempel: Kvinders cigaretforbrug

Lad os finde 95% konfidensintervallet for ændringen af median cigaretforbruget

```
## Konfidensintervallet for ændringen af median cigaretforbruget
## Simulate many times
k = 100000
simsamples = replicate(k, sample(dif, replace = TRUE))
## Take the median for each resample
simMedians = apply(simsamples, 2, median)
## Take the two quantiles to get the confidence interval
quantile(simMedians, c(0.025, 0.975))

## 2.5% 98%
## -1 9
```

Eksempel: Tandsundhed og flaskebrug

I et studie ville man undersøge, om børn der havde fået mælk fra flaske som barn havde dårligere eller bedre tænder end dem, der ikke havde fået mælk fra flaske. Fra 19 tilfældigt udvalgte børn registrerede man hvornår de havde haft deres første tilfælde af karies.

flaske	alder	flaske	alder	flaske	alder
nej	9	nej	10	ja	16
ja	14	nej	8	ja	14
ja	15	nej	6	ja	9
nej	10	ja	12	nej	12
nej	12	ja	13	ja	12
nej	6	nej	20		
ja	19	ja	13		

Find konfidensintervallet for forskellen!

Eksempel: Tandsundhed og flaskebrug - et 95% konfidensinterval for $\mu_X - \mu_Y$

```
## Tandsundhed og flaskebrug. Konfidensinterval for forskel i middelværdi
## Reading in no group:
x <- c(9,10,12,6,10,8,6,20,12)
## Reading in yes group:
y <- c(14,15,19,12,13,13,16,14,9,12)

## Resample many times
k <- 100000
simxSamples <- replicate(k, sample(x, replace = TRUE))
simySamples <- replicate(k, sample(y, replace = TRUE))
## Take the mean for each time and subtract
simmeandifs <- apply(simxSamples, 2, mean) -
  apply(simySamples, 2, mean)
## Take the two quantiles to get the confidence interval
quantile(simmeandifs, c(0.025, 0.975))

## 2.5% 98%
## -6.23 -0.14
```

Two-sample konfidensinterval for $\theta_X - \theta_Y$ (inkl. $\mu_X - \mu_Y$) med ikke-parametrisk bootstrap

Method Method 4.17: Two-sample confidence interval for $\theta_X - \theta_Y$ by non-parametric bootstrap

Assume we have actual observations x_1, \dots, x_n and y_1, \dots, y_n .

- 1 Simulate k sets of 2 samples of n_X and n_Y observations from the respective groups (with replacement)
- 2 Calculate the difference between the features in each of the k samples $\hat{\theta}_{x1}^* - \hat{\theta}_{y1}^*, \dots, \hat{\theta}_{xk}^* - \hat{\theta}_{yk}^*$.
- 3 Find the $100(\alpha/2)\%$ and $100(1 - \alpha/2)\%$ quantiles for these, $q_{100(\alpha/2)\%}^*$ and $q_{100(1-\alpha/2)\%}^*$ as the $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval:

$$\left[q_{100(\alpha/2)\%}^*, q_{100(1-\alpha/2)\%}^* \right]$$

Eksempel: Tandsundhed og flaskebrug - et 99% confidence interval for median-forskellen

```
## Tandsundhed og flaskebrug. Konfidensinterval for forskel i median
## Resample many times
k <- 100000
simxSamples <- replicate(k, sample(x, replace = TRUE))
simySamples <- replicate(k, sample(y, replace = TRUE))
## Take the difference in medians
simmedianDiffs <- apply(simxSamples, 2, median) -
  apply(simySamples, 2, median)
## Take the two quantiles to get the confidence interval
quantile(simmedianDiffs, c(0.005, 0.995))

## 0.5% 100%
## -8 0
```

Spørgsmål: bootstrapping methods (socrative.com - ROOM:PBAC)

```
## Resample many times
k <- 100000
simxSamples <- replicate(k, sample(x, replace = TRUE))
simySamples <- replicate(k, sample(y, replace = TRUE))
## Define a (upper-quartile) Q3-function:
Q3 <- function(x){ quantile(x, 0.75)}
## Calculate the simulated statistic
simQ3Diffs <- apply(simxSamples, 2, Q3) - apply(simySamples, 2, Q3)
## Find the two relevant quantiles of the k simulated differences
quantile(simQ3Diffs, c(0.005, 0.995))
```

Hvilken analyse udføres?

- A: One-sample parametric
- B: Two-sample parametric
- C: One-sample non-parametric
- D: Two-sample non-parametric

Svar D

Resampling af x og y, men ingen fordelingsantagelse. Derfor to stikprøver og non-parametric.

Spørgsmål: bootstrapping methods (socrative.com - ROOM:PBAC)

```
## Resample many times
k <- 100000
simxSamples <- replicate(k, sample(x, replace = TRUE))
## Define a (upper-quartile) Q3-function:
Q3 <- function(x){ quantile(x, 0.75)}
## Calculate the simulated statistic
simQ3 <- apply(simxSamples, 2, Q3)
## Find the two relevant quantiles of the k simulated differences
quantile(simQ3, c(0.005, 0.995))
```

Hvilken analyse udføres?

- A: One-sample parametric
- B: Two-sample parametric
- C: One-sample non-parametric
- D: Two-sample non-parametric

Svar C

Kun resampling af x, og ingen fordelingsantagelse. Derfor kun een stikprøve og non-parametric.

Spørgsmål: bootstrapping methods (socrative.com - ROOM:PBAC)

```
## Resample many times
k <- 100000
simxSamples <- replicate(k, rnorm(length(x), mean(x), sd(x)))
## Define a (upper-quartile) Q3-function:
Q3 <- function(x){ quantile(x, 0.75)}
## Calculate the simulated statistic
simQ3 <- apply(simxSamples, 2, Q3)
## Find the two relevant quantiles of the k simulated differences
quantile(simQ3, c(0.005, 0.995))
```

Hvilken analyse udføres?

- A: One-sample parametric
- B: Two-sample parametric
- C: One-sample non-parametric
- D: Two-sample non-parametric

Svar A

Kun resampling af x og fordelingsantagelse (normalfordeling). Derfor kun een stikprøve og parametric.

Spørgsmål: bootstrapping methods (socrative.com - ROOM:PBAC)

```
## Resample many times
k <- 100000
simxSamples <- replicate(k, rnorm(length(x), mean(x), sd(x)))
simySamples <- replicate(k, rnorm(length(y), mean(y), sd(y)))
## Define a (upper-quartile) Q3-function:
Q3 <- function(x){ quantile(x, 0.75)}
## Calculate the simulated statistic
simQ3Diffs <- apply(simxSamples, 2, Q3) - apply(simySamples, 2, Q3)
## Find the two relevant quantiles of the k simulated differences
quantile(simQ3Diffs, c(0.005, 0.995))
```

Hvilken analyse udføres?

- A: One-sample parametric
- B: Two-sample parametric
- C: One-sample non-parametric
- D: Two-sample non-parametric

Svar B

Resampling af x og y, samt fordelingsantagelse (normal). Derfor to stikprøver og parametric.

Bootstrapping - et overblik

Vi har fået 4 ret ens forskellige metode-bokse:

- 1 Med eller uden fordeling (parametrisk eller ikke-parametrisk)
- 2 For one- eller two-sample analyse (en eller to grupper)

Bemærk:

Middelværdier (means) er inkluderet i *vilkårlige beregningsstørrelser* (other features). Eller: Disse metoder kan også anvendes for andre analyser end for means!

Hypotesetest også muligt

Vi kan udføre hypotese test ved at kigge på konfidensintervallerne!

Oversigt

- 1 Introduktion til simulation
 - Hvad er simulering egentlig?
- 2 Fejlophobningslove
- 3 Parametrisk bootstrap
 - Introduction to bootstrap
 - One-sample konfidensinterval for μ
 - One-sample konfidensinterval for en vilkårlig størrelse
 - Two-sample konfidensintervaller for en vilkårlig fordeling
- 4 Ikke-parametrisk bootstrap
 - One-sample konfidensinterval for μ
 - One-sample konfidensinterval for en vilkårlig størrelse
 - Two-sample konfidensintervaller