# Kursus 02402/02323 Introducerende Statistik

## Forelæsning 6: Sammenligning af to populationer

Peder Bacher

DTU Compute, Dynamiske Systemer
Bygning 303B, Rum 009
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark
e-mail: pbac@dtu.dk

Forår 2017



## Kapitel 3: Statistik for to populationer (2 stikprøver)

**Specifikke metoder, to populationer:**

- Konfidensinterval for forskel i middelværdi
- Test for forskel i middelværdi ($t$-test)
- To PARREDE grupper: "Tag differencen" $\Rightarrow$ "Én gruppe"

**Grundlæggende koncepter for forsøgsplanlægning:**

- Testens styrke er $1 - \beta$ *(hvor $\beta$ er sandsynligheden for at begå Type II fejl)*

**Specifikke metoder, forsøgsplanlægning:**

- Stikprøvestørrelse $n$ for ønsket præcision af konfidensintervaller
- Stikprøvestørrelse $n$ for ønsket styrke af tests



## Chapter 3: Two Samples

**Specific methods, two samples:**

- Confidence interval for the mean difference
- Test for the mean difference ($t$-test)
- Two PAIRED samples: "Take difference" $\Rightarrow$ "One sample"

**General concepts for design of experiments:**

- Power of a test is $1 - \beta$ *(where $\beta$ is the probability of making a Type II error)*

**Specific methods, design of experiments:**

- Sample size $n$ for wanted precision of confidence intervals
- Sample size $n$ for wanted power of tests



## Oversigt

## Motiverende eksempel - energiforbrug

**Forskel på energiforbrug?**

I et ernæringsstudie ønsker man at undersøge om der er en forskel i energiforbrug for forskellige typer (moderat fysisk krævende) arbejde. In the study, the energy usage of 9 nurses from Hospital A and 9 (other) nurses from Hospital B have been measured. The measurements are given in the following table in mega Joule (MJ).

**Stikprøve fra hver hospital** $n_1 = n_2 = 9$:

| Hospital A | Hospital B |
|---|---|
| 7.53 | 9.21 |
| 7.48 | 11.51 |
| 8.08 | 12.79 |
| 8.09 | 11.85 |
| 10.15 | 9.97 |
| 8.40 | 8.79 |
| 10.88 | 9.69 |
| 6.13 | 9.68 |
| 7.90 | 9.19 |





## Eksempel - energiforbrug

**Hypotesen om ingen forskel ønskes undersøgt:**

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

**Sample means og standard deviations:**

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x}_1 = 8.293, \ (s_1 = 1.428)$$
$$\hat{\mu}_2 = \bar{x}_2 = 10.298, \ (s_2 = 1.398)$$

**Er data i overenstemmelse med nulhyposen $H_0$?**

Data: $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 2.005$

Nulhypotese: $H_0: \ \mu_2 - \mu_1 = 0$

**NYT: $p$-værdi for forskel:**

$$p\text{-værdi} = 0.0083$$

(Beregnet under det scenarie, at $H_0$ er sand)

**NYT: Konfidensinterval for forskel:**

$$2.005 \pm 1.412 = [0.59; \ 3.42]$$





## Steps ved hypotesetests - et overblik (repetition)

**Helt generelt består et hypotesetest af følgende trin:**

1. Formuler hypoteserne ($H_0$ og $H_1$) og vælg signifikansniveau $\alpha$ (choose the "risk-level")
2. Beregn med data værdien af teststatistikken
3. Beregn $p$-værdien med teststatistikken og den relevante fordeling, og sammenlign $p$-værdien med signifikansniveauet og drag en konklusion

   *eller*

   Lav konklusionen ved de relevante kristiske værier)





## Definition og fortolkning af $p$-værdien (repetition)

**Definition 3.21 af $p$-værdien:**

**The $p$-value** is the probability of obtaining a test statistic that is at least as extreme as the test statistic that was actually observed. This probability is calculated under the assumption that the null hypothesis is true.

**$p$-værdien udtrykker *evidence* imod nulhypotesen – Tabel 3.1:**

| | |
|---|---|
| $p < 0.001$ | Very strong evidence against $H_0$ |
| $0.001 \leq p < 0.01$ | Strong evidence against $H_0$ |
| $0.01 \leq p < 0.05$ | Some evidence against $H_0$ |
| $0.05 \leq p < 0.1$ | Weak evidence against $H_0$ |
| $p \geq 0.1$ | Little or no evidence against $H_0$ |

## Metode 3.48: Two-sample $t$-test

### Beregning af teststørrelsen

When considering the null hypothesis about the difference between the means of two *independent* samples

$$\delta = \mu_2 - \mu_1 \quad \textit{(delta er forskellen i middelværdi)}$$
$$H_0: \ \delta = \delta_0 \quad \textit{(typisk er } \delta_0 = 0\textit{)}$$

the (Welch) two-sample $t$-test statistic is

$$t_{\text{obs}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$





## Theorem 3.49: Fordelingen af (Welch) $t$-teststørrelsen

### Welch $t$-teststørrelsen er $t$-fordelt

The (Welch) two-sample statistic seen as a random variable

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}}$$

approximately, under the null hypothesis, follows a $t$-distribution with $\nu$ degrees of freedom, where

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

if the two population distributions are normal or if the two sample sizes are large enough.





### Metode 3.50: The level $\alpha$ two-sample $t$-test

1. Compute the test statistic using Equation (3-46) and $\nu$ from Equation (3-48)

$$t_{\text{obs}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} \text{ and } \nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

2. Compute the evidence against the *null hypothesis*

$$H_0: \quad \mu_1 - \mu_2 = \delta_0,$$

vs. the *alternative hypothesis*

$$H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0,$$

by the

$$p\text{-value} = 2 \cdot P(T > |t_{\text{obs}}|),$$

where the $t$-distribution with $\nu$ degrees of freedom is used

3. If $p$-value $< \alpha$: we reject $H_0$, otherwise we accept $H_0$,
*or*
The rejection/acceptance conclusion can equivalently be based on the critical value(s) $\pm t_{1-\alpha/2}$:
if $|t_{\text{obs}}| > t_{1-\alpha/2}$ we reject $H_0$, otherwise we accept $H_0$





## Spørgsmål til fordelingen af forskellen i stikprøvegennemsnit (socrative.com - ROOM:PBAC)

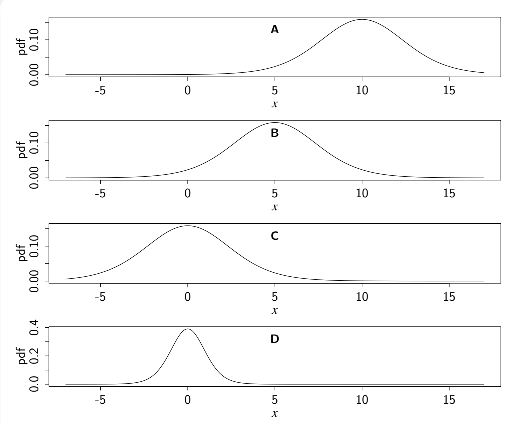
Hvilken af pdf'erne repræsenterer fordelingen af forskellen i stikprøvegennemsnit?

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$$

*UNDER* *(dvs. antag er sand)*:

$$H_0: \delta = 10$$

(sample sizes $n_1 = 7$ and $n_2 = 8$)
(sample std. dev. $s_1 = 18$ and $s_2 = 24$)




A B C eller D? Svar: A

## Spørgsmål til fordelingen af forskellen i stikprøvegennemsnit (socrative.com - ROOM:PBAC)

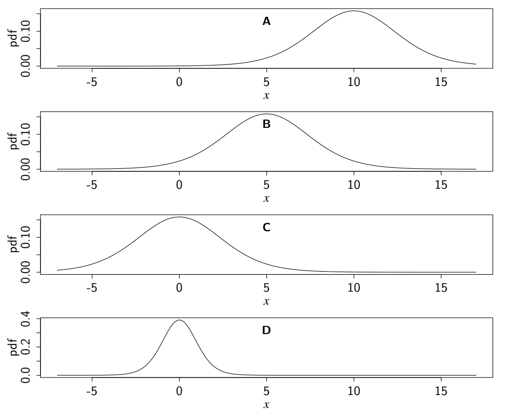
Hvilken af pdf'erne repræsenterer fordelingen af

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - \delta_0$$

*under*:

$$H_0 : \delta = 10$$

(sample sizes $n_1 = 7$ and $n_2 = 8$)
(sample std. dev. $s_1 = 18$ and $s_2 = 24$)




A B C eller D? Svar: C





## Spørgsmål til fordelingen af forskellen i stikprøvegennemsnit (socrative.com - ROOM:PBAC)

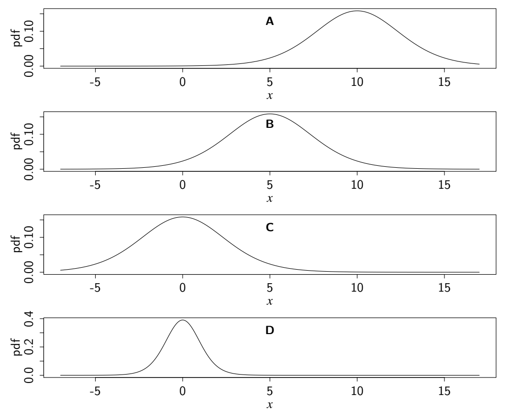
Hvilken af pdf'erne repræsenterer fordelingen af

$$T = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - \delta_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

*under*:

$$H_0 : \delta = 10$$

(sample sizes $n_1 = 7$ and $n_2 = 8$)
(sample std. dev. $s_1 = 18$ and $s_2 = 24$)




A B C eller D? Svar: D





## Eksempel - energiforbrug

**Hypotesen om ingen forskel ønskes undersøgt**

$$H_0 : \ \delta = \mu_2 - \mu_1 = 0$$

versus the alternative

$$H_1 : \ \delta = \mu_2 - \mu_1 \neq 0$$

**Først beregninger af $t_{\text{obs}}$ og $\nu$:**

$$t_{\text{obs}} = \frac{10.298 - 8.293}{\sqrt{2.0394/9 + 1.954/9}} = 3.01$$

and

$$\nu = \frac{\left(\frac{2.0394}{9} + \frac{1.954}{9}\right)^2}{\frac{(2.0394/9)^2}{8} + \frac{(1.954/9)^2}{8}} = 15.99$$





## Eksempel - energiforbrug

**Dernæst findes $p$-værdien:**

$$p\text{-value} = 2 \cdot P(T > |t_{\text{obs}}|) = 2 \cdot P(T > 3.01) = 2 \cdot 0.00415 = 0.0083$$

```
## p-værdi for nulhypotese om ingen forskel mellem sygeplejeskers energiforbrug
2 * (1 - pt(3.01, df = 15.99))

## [1] 0.0083
```

## Eksempel - energiforbrug - brug funktion i R:

```
################################
## t-test for forskel i middelværdi på sygeplejeskers energiforbrug
xA <- c(7.53, 7.48, 8.08, 8.09, 10.15, 8.4, 10.88, 6.13, 7.9)
xB <- c(9.21, 11.51, 12.79, 11.85, 9.97, 8.79, 9.69, 9.68, 9.19)
## Default i t.test() er H_0: mu_1 = mu_2 (ingen forskel i middelværdi)
t.test(xB, xA)

##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  xB and xA
## t = 3.009, df = 15.99, p-value = 0.00832
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.59228 3.41661
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  10.29778   8.29333
```





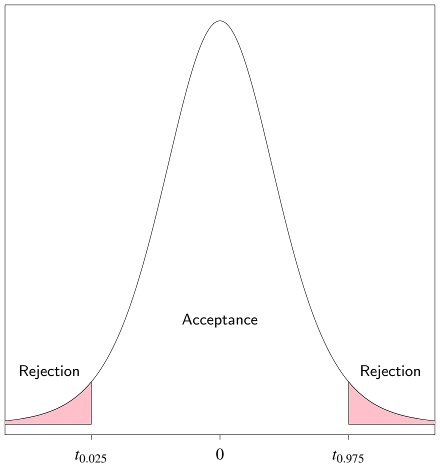
I pausen: Installer Angry Birds (den originale) på jeres device (Android, Windows phone eller iPhone)





## Kristiske værdier og hypotesetest

Acceptområdet er værdier for teststatistikken $t_{\text{obs}}$ som ligger indenfor de kritiske værdier:



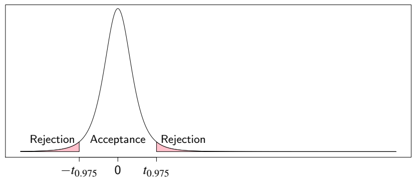



Acceptområdet er værdier for teststatistikken $t_{\text{obs}}$ som ligger indenfor de kritiske værdier:



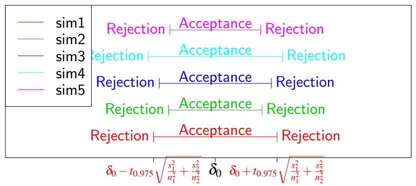
### Den standardiserede skala

Hvis $t_{\text{obs}}$ er i acceptområdet, så accepteres $H_0$




### Den egentlige skala

Hvis $\bar{x}-\bar{y}$ er i acceptområdet, så accepteres $H_0$



# Metode 3.46: Konfidensinterval for $\mu_1 - \mu_2$

### Konfidensintervallet for middelforskellen bliver:

For two samples $x_1, \ldots, x_{n_1}$ and $y_1, \ldots, y_{n_2}$ the $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for $\mu_1 - \mu_2$ is given by

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

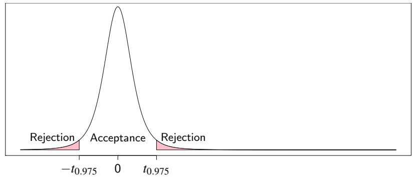
where $t_{1-\alpha/2}$ is the $100(1-\alpha/2)\%$-quantile from the $t$-distribution with $\nu$ degrees of freedom given from Equation (3-48).





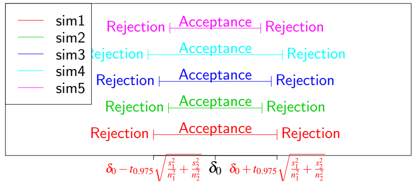
### Den standardiserede skala

Hvis $t_{\text{obs}}$ er i acceptområdet, så accepteres $H_0$



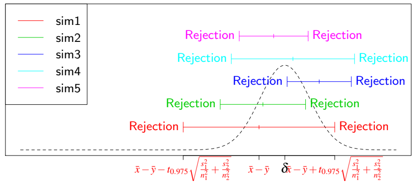

### Den egentlige skala

Hvis $\bar{x} - \bar{y}$ er i acceptområdet, så accepteres $H_0$




### Konfidensintervallet

Nulhypoteser med $\delta_0$ udenfor konfidensintervallet ville være blevet afvist








# Eksempel - energiforbrug - det hele i R:

### Let us find the 95% confidence interval for $\mu_2 - \mu_1$:

Since the relevant $t$-quantile is, using $\nu = 15.99$,

$$t_{0.975} = 2.120$$

the confidence interval becomes:

$$10.298 - 8.293 \pm 2.120 \cdot \sqrt{\frac{2.0394}{9} + \frac{1.954}{9}}$$

which then gives the result as also seen above:

$$[0.59;\, 3.42]$$

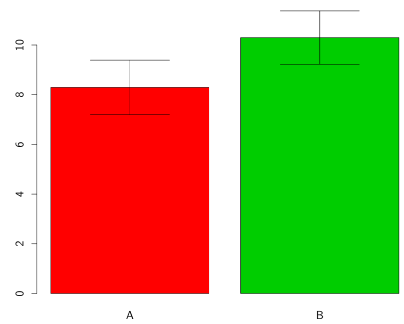




# Eksempel - energiforbrug - Præsentation af resultat

### Barplot med *error bars* ses ofte

Et grupperet barplot med nogle "error bars" - herunder er 95%-konfidensintervallerne for hver gruppe vist:



## Vær varsom med at bruge "overlappende konfidensintervaller"

Remark 3.73. Regel for brug af "overlappende konfidensintervaller":

When two CIs DO NOT overlap: The two groups are significantly different

When two CIs DO overlap: We do not know what the conclusion is





## Motiverende eksempel - sovemedicin

Forskel på sovemedicin?

I et studie er man interesseret i at sammenligne 2 sovemidler $A$ og $B$. For 10 testpersoner har man fået følgende resultater, der er givet i forlænget søvntid (i timer) (Forskellen på effekten af de to midler er angivet):

Stikprøve, $n = 10$:

| Person | $A$ | $B$ | $D = B - A$ |
|---|---|---|---|
| 1 | +0.7 | +1.9 | +1.2 |
| 2 | -1.6 | +0.8 | +2.4 |
| 3 | -0.2 | +1.1 | +1.3 |
| 4 | -1.2 | +0.1 | +1.3 |
| 5 | -1.0 | -0.1 | +0.9 |
| 6 | +3.4 | +4.4 | +1.0 |
| 7 | +3.7 | +5.5 | +1.8 |
| 8 | +0.8 | +1.6 | +0.8 |
| 9 | 0.0 | +4.6 | +4.6 |
| 10 | +2.0 | +3.4 | +1.4 |





## Parret setup og analyse: Brug one-sample analyse

```
## Det parrede setup: Tag forskellen og brug one-sample test
x1 <- c(.7,-1.6,-.2,-1.2,-1,3.4,3.7,.8,0,2)
x2 <- c(1.9,.8,1.1,.1,-.1,4.4,5.5,1.6,4.6,3.4)
dif <- x2-x1
t.test(dif)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  dif
## t = 5, df = 9, p-value = 0.001
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.86 2.48
## sample estimates:
## mean of x
##       1.7
```





## Parret setup og analyse: Brug one-sample analyse

```
## Eller angiv at testen er parret med "paired=TRUE"
t.test(x2, x1, paired=TRUE)

##
##  Paired t-test
##
## data:  x2 and x1
## t = 5, df = 9, p-value = 0.001
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.86 2.48
## sample estimates:
## mean of the differences
##                     1.7
```

# Parret versus independent eksperiment

### Completely Randomized (independent samples)

20 patients are used and completely at random allocated to one of the two treatments (but usually making sure to have 10 patients in each group). Hence: *different persons in the different groups*.

### Paired (dependent samples)

10 patients are used, and each of them tests both of the treatments. Usually this will involve some time in between treatments to make sure that it becomes meaningful, and also one would typically make sure that some patients do A before B and others B before A. (and doing this allocation at random). Hence: *the same persons in the different groups*.





# Eksempel - Sovemedicin - FORKERT analyse

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  x1 and x2
## t = -2, df = 20, p-value = 0.07
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -3.49  0.15
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##      0.66      2.33
```





# Undersøgelse af computerspil

### Undersøgelse om et computerspil er designet så man forbedrer sig når man spiller:

- Forsøg: Personer spiller samme bane i spillet tre gange i træk
- Nogle har spillet det før og er derfor erfarne. Alle angiver deres erfaring ved: 'nybegynder', 'mellem' og 'øvet'
- Scoren måles for hver person de tre gange de spiller banen

### Der testes for forskellen mellem *nybegyndere* og *øvede personer*:

Hvilket setup skal benyttes? A: Parret B: Ikke parret C: Ved ikke

Svar) B: Ikke parret

### Der testes for forskellen i score *fra første til tredje gang de spiller banen*:

Hvilket setup skal benyttes? A: Parret B: Ikke parret C: Ved ikke

Svar) A: Parret





# Undersøgelse af computerspil

### Gå ind i første level (POACHED EGGS) og spil BANE 2 tre gange i træk (hvis det er første gang så skal man lige først klare BANE 1). Noter score.

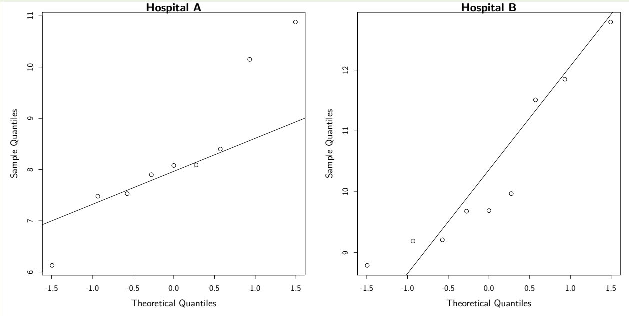
- Hvis man får 0 point en gang, så er det en ommer
- Gå ind på "game.html" (følg link under uge6 på "Course material") og indtast scores

### Download "analyserGame.R" (følg link under uge6 på "Course material"):

- Kan der påvises en signifikant forskel fra *nybegyndere* til *meget øvede* på $\alpha = 5\%$ niveau?
- Kan der påvises en signifikant forbedring mellem første og tredje gang banen spilles på $\alpha = 5\%$ niveau?

# Eksempel: q-q plot inden for hver stikprøve

```
## Check af normalitetsantagelsen med q-q plots
par(mfrow=c(1,2))
qqnorm(xA, main="Hospital A")
qqline(xA)
qqnorm(xB, main="Hospital B")
qqline(xB)
```

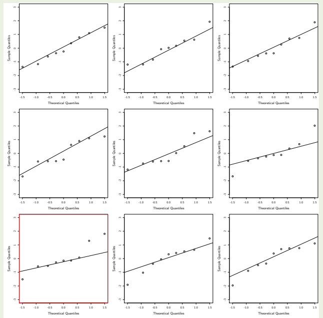







# Eksempel - Sammenligning med simulerede, A

```
## Define the plotting function
qqwrap <- function(x, y, ...){
  stdy <- (y-mean(y))/sd(y)
  qqnorm(stdy, main="", ...)
  qqline(stdy)}
## Do the Wally plot
wallyplot(xA, FUN=qqwrap, ylim=c(-3,3))
```

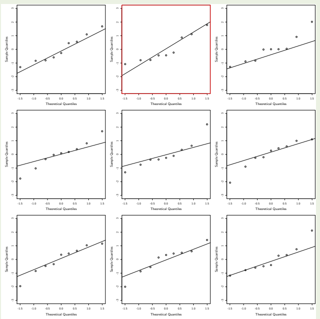






# Eksempel - Sammenligning med simulerede, B

```
## Check af normalitetsantagelsen med q-q plots og Wally-plot
## Do the Wally plot
wallyplot(xB, FUN=qqwrap, ylim=c(-3,3))
```







# Metode 3.51: The pooled two-sample estimate of variance

### Det poolede variansestimat

Under the assumption that $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ the *pooled* estimate of variance is the weighted average of the two sample variances

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

## Metode 3.52: The pooled two-sample $t$-test statistic

### Beregning af den poolede teststørrelse

When considering the null hypothesis about the difference between the means of two *independent* samples

$$\delta = \mu_2 - \mu_1$$

$$H_0: \ \delta = \delta_0$$

the pooled two-sample $t$-test statistic is

$$t_{\text{obs}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta_0}{\sqrt{s_p^2/n_1 + s_p^2/n_2}}$$





## Theorem 3.53: Fordelingen af den poolede test-størrelse

### er en $t$-fordeling

The pooled two-sample statistic seen as a random variable

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \delta_0}{\sqrt{S_p^2/n_1 + S_p^2/n_2}}$$

follows, under the null hypothesis and under the assumption that $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, a $t$-distribution with $n_1 + n_2 - 2$ degrees of freedom if the two population distributions are normal.





## Vi bruger altid "Welch" versionen (den "ikke-poolede")

### Nogenlunde (idiot)sikkert at bruge Welch-versionen altid

- if $s_1^2 = s_2^2$ the Welch and the Pooled test statistics are the same.
- Only when the two variances become really different the two test-statistics may differ in any important way, and if this is the case, we would not tend to favour the pooled version, since the assumption of equal variances appears questionable then.
- Only for cases with a small sample sizes in at least one of the two groups the pooled approach may provide slightly higher power if you believe in the equal variance assumption. And for these cases the Welch approach is then a somewhat cautious approach.





## Planlægning af studie med krav til præcision

### Man vil gerne tænke sig om inden eksperimentet udføres:

- Brug for at vide hvor præcise resultater (f.eks. konfidensinterval) forventes at blive med et fremtidigt eksperiment
- Hvor stor en effekt forventes at kunne opdages (e.g. hvis sovemedicinen virker 2 timer bedre, hvad er sandsynligheden for at det opdages?)
- Spørgsmål om at optimere økonomiske ressourcer og etik!

## Method 3.62: The one-sample CI sample size formula

**Beregn den forventede (halve) bredde af konfidensintervallet**

When $\sigma$ is known or guessed at some value, we can calculate the sample size $n$ needed to achieve a given margin of error, $ME$, with probability $1-\alpha$ as

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{ME}\right)^2$$

- Margin of error $ME$ er den *halve bredde* af det konfidensintervallets forventede bredde





## Eksempel på to mulige fejl ved hypotesetest – sovemedicin (repetition)

**To mulige sandheder vs. to mulige konklusioner:**

| **Virkelighed** | **Test udfald**<br>Reject $H_0$ | **Test udfald**<br>Fail to reject $H_0$ |
|---|---|---|
| *Sand* $H_0$:<br>Ingen forskel på A og B | Type I fejl ($\alpha$) | Korrekt accept af $H_0$ |
| *Falsk* $H_0$:<br>Forskel på A og B | Korrekt afvisning af $H_0$ | Type II fejl ($\beta$) |





## Mulige fejl ved hypotesetests (repetition)

**Der findes to slags fejl (dog kun een af gangen!)**

Type I: Rejection of $H_0$ when $H_0$ is true
Type II: Non-rejection of $H_0$ when $H_1$ is true

**Risikoen for de to typer fejl kaldes sædvanligvis:**

$$P(\text{Type I error}) = \alpha$$

$$P(\text{Type II error}) = \beta$$





## Testens styrke (power)

**Hvad er styrken for et kommende studie/eksperiment:**

- Sandsynligheden for at opdage en effekt (af en vis størrelse $|\mu_0 - \mu_1|$)
- Probability of correct rejection of $H_0$
- $P$("Accept af $H_0$") når $H_1$ er sand

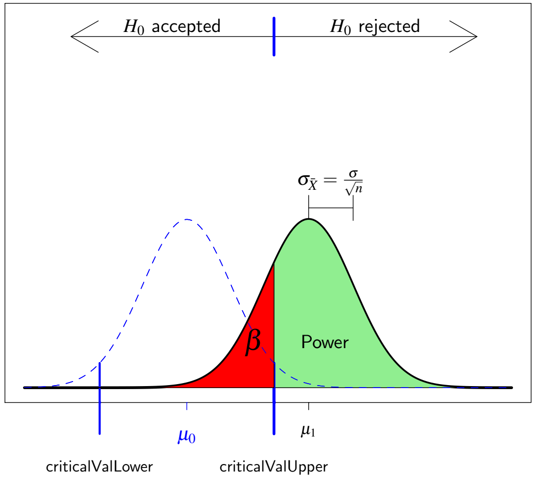
**Udfordring: Nulhypotesen kan være forkert på mange måder!**

I praksis, scenarie-baseret approach:

- F.eks. "Hvis nu sovemedicinen *rent faktisk virker 2 timer bedre*, hvor godt vil mit studie være til at opdage dette? "
- Eller, jeg vil gerne *hvis min sovemedicin virker 3 timer bedre*, opdage dette med en bestemt sandsynlighed (power)

$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ er den antagede fordeling (dvs. om $\mu_1$), $H_0: \mu = \mu_0$ er nulhypotesen

Vi kan se hvad $\beta$ er: $P(H_0$ accepteres forkert$) = P(\text{Type II}) = \beta$





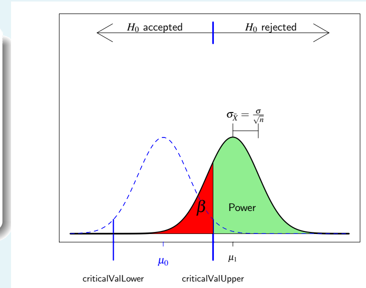



## Spørgsmål om power (socrative.com - ROOM:PBAC)

Vi antager at $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ (dvs. fordelt om $\mu_1$, som er effekten vi vil kunne påvise), $H_0: \mu = \mu_0$ er nulhypotesen

Hvordan kan vi opnå en større power *uden at kompromitere noget ved testen (dvs. ikke ændre på hypotesen eller risikoen for type I fejl)*?

- A: Mindske $\mu_0$ så afstanden $|\mu_0 - \mu_1|$ øges
- B: Øge $\alpha$ (på figur vil 'critvalUpper' mindskes)
- C: Øge $n$ antallet af observationer
- D: Desværre kan det ikke lade sig gøre
- E: Ved ikke



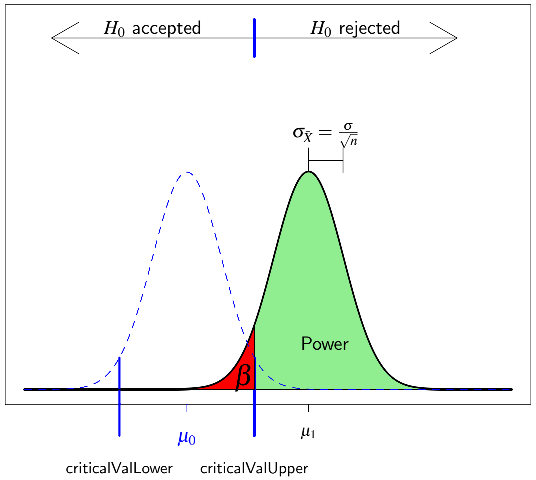

Svar C: Hvis antallet af observationer øges så stiger power uden at kompromitere andet ved





Vi antager $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ (dvs. fordelt om $\mu_1$, som er effekten vi vil kunne påvise), $H_0: \mu = \mu_0$ er nulhypotesen

Flere observationer, dvs. større $n$

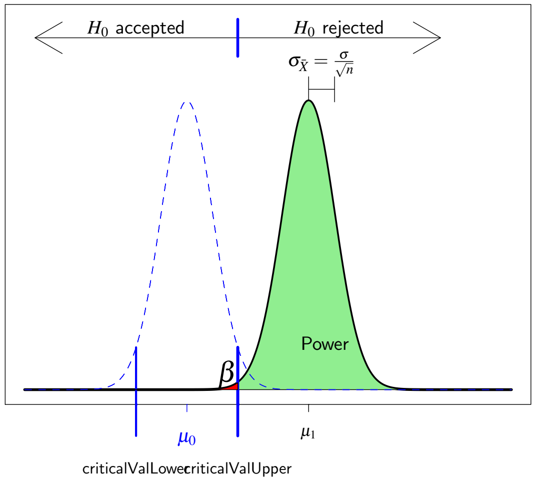







Vi antager $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$ (dvs. fordelt om $\mu_1$, som er effekten vi vil kunne påvise), $H_0: \mu = \mu_0$ er nulhypotesen

Endnu flere observationer, dvs. endnu større $n$



# Planlægning, find sample size $n$

**Det store spørgsmål i praksis: HVAD skal $n$ være?**

Forsøget skal være stort nok til at kunne opdage en relevant effekt med stor power (som regel mindst $80\%$):

**Metode 3.64: Tilnærmet svar for en one-sample $t$-test:**

For the one-sample $t$-test for given $\alpha$, $\beta$ and $\sigma$

$$n = \left( \sigma \frac{z_{1-\beta} + z_{1-\alpha/2}}{(\mu_0 - \mu_1)} \right)^2$$

where $\mu_0 - \mu_1$ is the difference in means that we would want to detect and $z_{1-\beta}$, $z_{1-\alpha/2}$ are quantiles of the standard normal distribution.





# Planlægning, sæt 4 prm. og beregn den sidste

**Når man har fastlagt hvilket test, der skal bruges:**

Kender man (eller fastlægger/gætter på) fire ud af følgende fem oplysninger, kan man regne sig frem til den femte:

- $n$ Sample size
- $\alpha$ Significance level of the test
- $\delta$ A difference in mean that you would want to detect (effect size) *(dvs. $\mu_2$ er her den middelværdi med afstand til $\mu_1$ som vi "mindst" vil kunne påvise)*
- $\sigma$ The population standard deviation
- $1-\beta$ The power





# Eksempel - The sample size for power$= 0.80$

```
## Stikprøvestørrelse for t-test
power.t.test(power = .80, delta = 4, sd = 12.21, sig.level=0.05,
      type = "one.sample")

##
##      One-sample t test power calculation
##
##               n = 75.1
##           delta = 4
##              sd = 12.2
##       sig.level = 0.05
##           power = 0.8
##     alternative = two.sided
```

Svar: $n = 76$ *(husk at runde op)*





# Eksempel - The power for $n = 40$

```
## Beregn power for t-test
power.t.test(n = 40, delta = 4, sd = 12.21, sig.level=0.05,
      type = "one.sample")

##
##      One-sample t test power calculation
##
##               n = 40
##           delta = 4
##              sd = 12
##       sig.level = 0.05
##           power = 0.52
##     alternative = two.sided
```

## Styrke og stikprøvestørrelse - two-sample

Finding the sample size for detecting a group difference of 2 with $\sigma = 1$ and power$= 0.9$:

```
## Beregn stikprøvestørrelsen
power.t.test(power = 0.90, delta = 2, sd = 1, sig.level = 0.05)

##
##      Two-sample t test power calculation
##
##               n = 6.4
##           delta = 2
##              sd = 1
##       sig.level = 0.05
##           power = 0.9
##     alternative = two.sided
##
## NOTE: n is number in *each* group
```

Svar: $n = 7$ *(husk at runde op)*





## Styrke og stikprøvestørrelse - two-sample

Finding the power of detecting a group difference of 2 with $\sigma = 1$ for $n = 10$:

```
## Power beregning
power.t.test(n = 10, delta = 2, sd = 1, sig.level = 0.05)

##
##      Two-sample t test power calculation
##
##               n = 10
##           delta = 2
##              sd = 1
##       sig.level = 0.05
##           power = 0.99
##     alternative = two.sided
##
## NOTE: n is number in *each* group
```





## Styrke og stikprøvestørrelse - two-sample

Finding the detectable effect size (delta) with $\sigma = 1$, $n = 10$ and power$= 0.9$:

```
## Beregn margin of error
power.t.test(power = 0.90, n = 10, sd = 1, sig.level = 0.05)

##
##      Two-sample t test power calculation
##
##               n = 10
##           delta = 1.5
##              sd = 1
##       sig.level = 0.05
##           power = 0.9
##     alternative = two.sided
##
## NOTE: n is number in *each* group
```





Husk også at sige at Exercise 3.10 spørgsmål i) er ret svær og man kan springe den over.

# Oversigt