System av linjära ekvationer

Vi har sett hur linjära ekvationssystem kan ställas upp som vektorekvationer eller matrisekvationer och lösas genom elementära radoperationer på den utökade matrisen. Efter att ha omformat denna matris till trappstegsform kan man direkt se om systemet saknar lösning, eller har oändligt antal lösningar. Exempel:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \end{array}$$

pivotkolumner

Detta system har oändligt många lösningar.

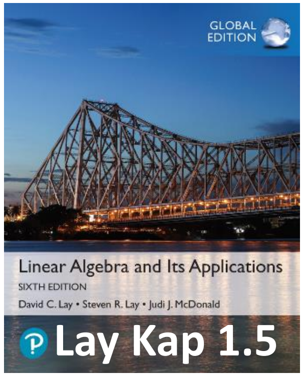
$\bullet$ markerar pivotpositionerna.

Kolumnerna med pivotpositioner är pivotkolumner.

Motsvarande variabler är "ofria" ("basic variables").

Variablerna motsvarande övriga kolumner är "fria variabler".

System av linjära ekvationer



Uppsättningar av lösningar till matrisekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

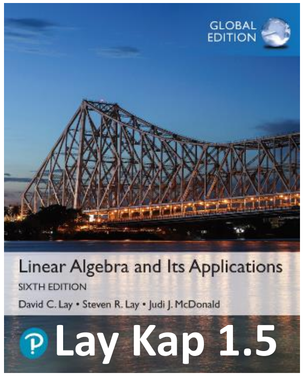
Ett system sägs vara homogent om $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
där $\mathbf{0}$ är nollvektorn i $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ (A är en $m \times n$ matris)

Ett homogent system har alltid en trivial lösning $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
Det har oändligt många icketriviala lösningar omm det finns minst en fri variabel.

Om $\mathbf{v}_{\mathrm{H}}$ är en lösning till det homogena systemet: $\mathrm{A}\mathbf{v}_{\mathrm{H}} = \mathbf{0}$
så är $\lambda\mathbf{v}_{\mathrm{H}}$ också en lösning om $\lambda \in \mathrm{R}$: $\mathrm{A}(\lambda\mathbf{v}_{\mathrm{H}}) = \lambda A\boldsymbol{v}_{H} = \mathbf{0}$.
P.s.s. , om $\mathbf{v}_{\mathrm{H1}}$ och $\mathbf{v}_{\mathrm{H2}}$ båda är lösningar till $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
så är $(\lambda\mathbf{v}_{\mathrm{H1}} + \mu\mathbf{v}_{\mathrm{H2}})$ också en lösning: $\mathrm{A}(\lambda\mathbf{v}_{\mathrm{H1}} + \mu\mathbf{v}_{\mathrm{H2}}) = \lambda A\boldsymbol{v}_{H1} + \mu A\boldsymbol{v}_{H2} = \mathbf{0}$.

Om $\mathbf{v}_{p}$ är en lösning till $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $\quad \mathrm{A}\mathbf{v}_{p} = \mathbf{b}$
och om $\mathbf{v}_{\mathrm{H}}$ är en lösning till det homogena systemet: $\mathrm{A}\mathbf{v}_{\mathrm{H}} = \mathbf{0}$
så är $(\mathbf{v}_{p} + \lambda\mathbf{v}_{\mathrm{H}})$ också en lösning till det inhomogena systemet:
$\mathrm{A}(\mathbf{v}_{p} + \lambda\mathbf{v}_{\mathrm{H}}) = A\mathbf{v}_{p} + \lambda A\boldsymbol{v}_{H} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$.

System av linjära ekvationer



Uppsättningar av lösningar till matrisekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

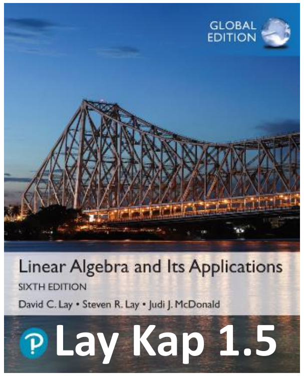
Alltså: vi har studerat motsvarande homogena system A**x**=**0** och funnit att det alltid har en trivial lösning $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, men också har oändligt många icketriviala lösningar omm det finns minst en fri variabel.

Om $\boldsymbol{v_p}$ är en lösning till systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ och $\{\boldsymbol{v_{h1}}, \boldsymbol{v_{h2}}, \boldsymbol{...v_{hn}}\}$ utgör lösningar till det homogena systemet, blir hela uppsättningen lösningar till systemet $\mathbf{w} = \mathbf{v_p} + Span\,\{\boldsymbol{v_{h1}}, \boldsymbol{v_{h2}}, \boldsymbol{...v_{hn}}\}$

Parametrisk vektorform $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v_1} + \ ... + x_n\mathbf{v_n}$

1. Radreducera utökade matrisen till rref (”row reduced echelon form”).
2. Uttryck varje ”ofri” variabel i konstanter eller fria variabler.
3. Skriv lösningen som en kolumnvektor $\boldsymbol{x}$, vars element beror på fria variabler och konstanter.
4. Bryt ut fria variablerna och skriv $\boldsymbol{x}$ som en linjär kombination av fria vektorerna {v_i} med de fria variablerna som parametrar.

System av linjära ekvationer



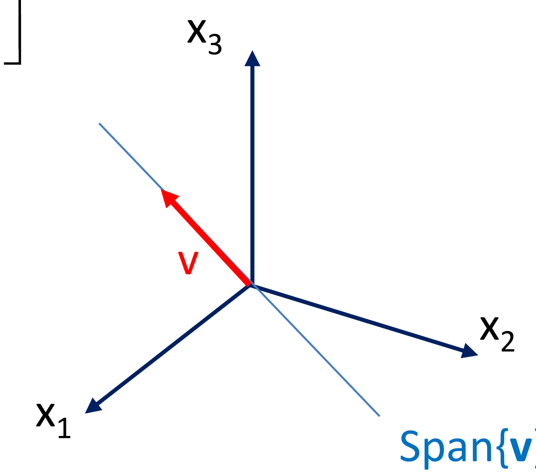
Exempel på homogent system:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 + \ \ x_2 - \ 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

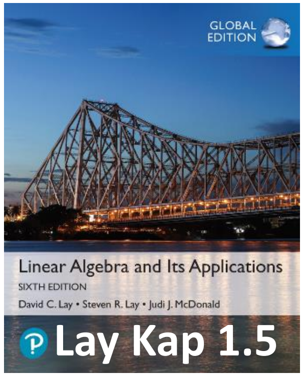
$$\sim \begin{bmatrix} \color{red}{3} & 5 & -4 & 0 \\ 0 & \color{red}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \color{red}{3} & 5 & -4 & 0 \\ 0 & \color{red}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lösningsmängd: } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{v}}$$



en linje i x_1x_3-planet

System av linjära ekvationer

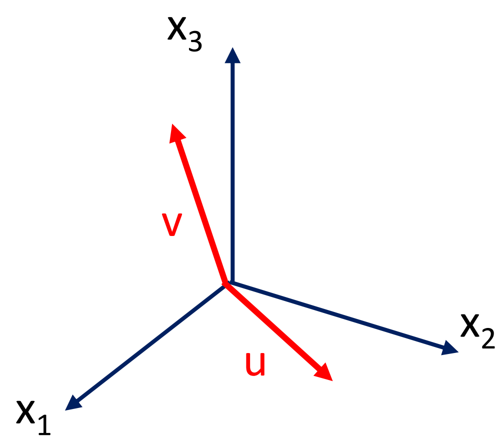


Exempel på homogent system:

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{u}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \mathbf{v}}$$

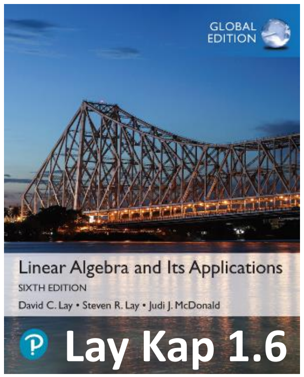


Lösningsmängden är ett plan Span{**u**,**v**} genom Origo, som spänns upp av **u** och **v**.

x_2 och x_3 är fria variabler.

Exempel på linjära modeller

Tillämpningar av linjära system



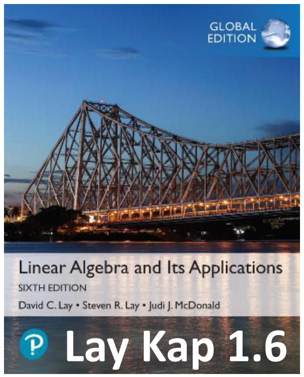
Exempel 1, nationalekonomi: En stat med stål, elektricitet och kol som ekonomiska huvudsektorer.

Relativ produktion			
Kol	**El**	**Stål**	**Konsumeras av**
0.0	0.4	0.6	Kol-sektorn
0.6	0.1	0.2	El-sektorn
0.4	0.5	0.2	Stål-sektorn

Exemplet är förstås extremt förenklat men bygger på linjära nationalekonomiska modeller som började användas så tidigt som 1949 av Wassily Leontief. Han delade in den amerikanska ekonomin i 500 sektorer och kunde med sin modell bl.a. beräkna jämviktspriser för utbytet av varor och tjänster mellan olika sektorer. Den första beräkningen, förenklad till 42 ekvationer med 42 obekanta krävde flera månaders programmeringsarbete och sedan 56 timmars körtid på den tidens bästa dator. Leontief fick Riksbankens pris till Alfred Nobels minne i Ekonomisk vetenskap 1973.

Exempel på linjära modeller

Tillämpningar av linjära system



Exempel 2, Balansering av formler för kemiska reaktioner.

Om vi vet att reaktionen

$$H_2 + O_2 \to H_2O$$

äger rum men vill veta hur mycket av vardera gasen

som går åt är det lätt att se att den balanserade formeln är

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O$$

Blandningsförhållandet 2:1 för väte och syre kallas "knallgas".

Men i mer komplicerade fall, som:

$$Na_3PO_4 + Ba(NO_3)_2 \to Ba_3(PO_4)_2 + NaNO_3$$

kan man känna behov av en mer systematisk metod,

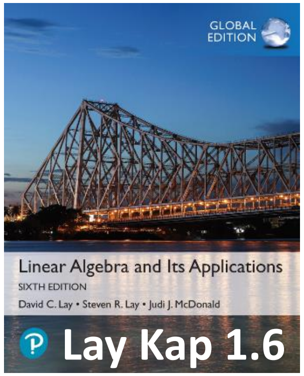
som resulterar i ett linjärt ekvationssystem.

Exemplet är Lay 1.6 övning 6.

Vi kan gå igenom det vid ett övningstillfälle och

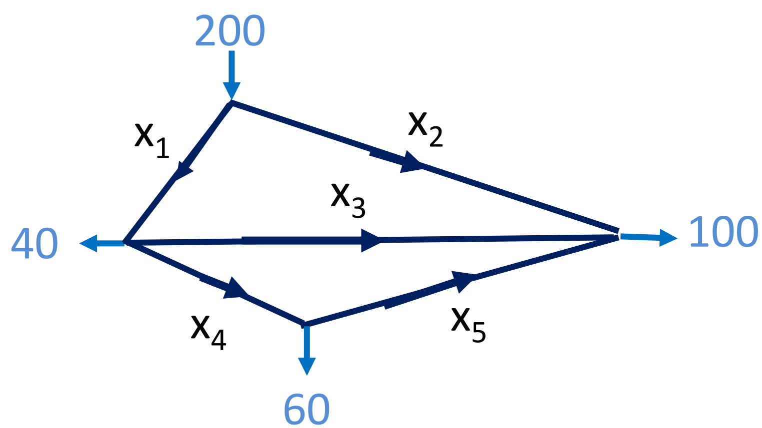
fler exempel finns i Lay 1.6.

Exempel på linjära modeller



Tillämpningar av linjära system

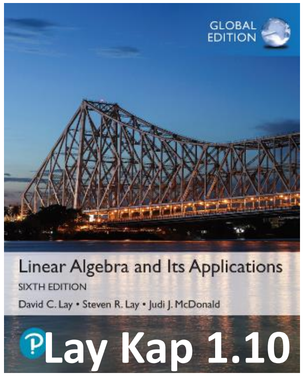
Exempel 3, Flödesproblem i nätverk.



Lay 1.6
Övning 12.

Man behöver en modell för trafikströmmarna i ett motorvägsnät. Siffrorna anger bilar per minut och x_i är trafikströmmen i gren i. Med hjälp av modellen kan man förutse sådant som hur stora trafikflöden det maximalt kan bli i de olika grenarna eller Vad som händer i de andra grenarna om gren 4 stängs pga vägarbete. Sambanden är linjära och modellen blir ett linjärt ekvationssystem.

Exempel på linjära modeller



Tillämpningar av linjära system

Exempel 4, Dietplanering.

Mängd näringsämne (g) per 100g av livsmedlet				
Livsmedel	**Lättmjölk**	**Soyamjöl**	**Vassla**	**krav (g)**
Protein	**36**	**51**	**13**	**33**
Kolhydrat	52	34	74	45
Fett	0	7	1.1	3

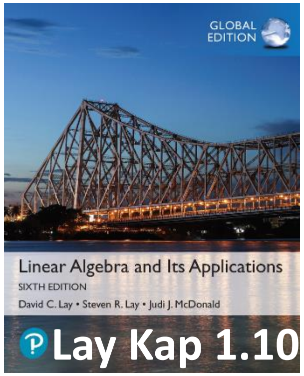
Vektorekvation:

$$x_1 \begin{bmatrix} 36 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 51 \\ 34 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 13 \\ 74 \\ 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Utökad systemmatris:

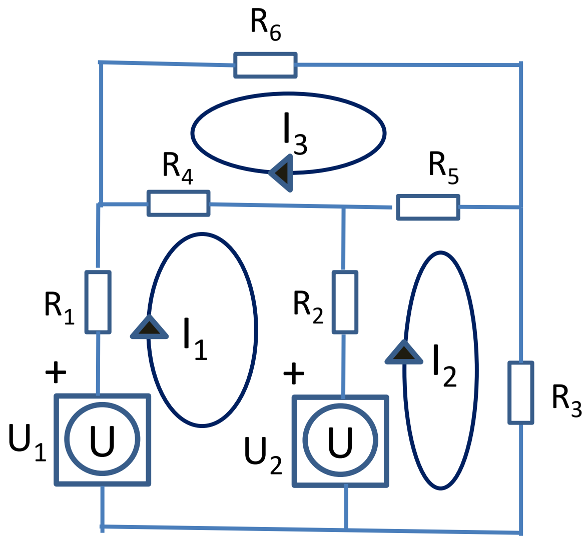
$$\begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1.1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.277 \\ 0 & 1 & 0 & 0.392 \\ 0 & 0 & 1 & 0.233 \end{bmatrix}$$

Exempel på linjära modeller



Tillämpningar av linjära system

Exempel 5, Elkretsanalys av resistiva nät.



Vi vill beräkna strömmar och potentialer i olika delar av nätet.
Ohms lag: U=RI
Kirchhoffs spänningslag:
Om man går runt längs en sluten loop i nätet blir den resulterande potential-förändringen noll.

Maskanalys: ansätt maskströmmar I_i i alla maskor och använd Kirchhoffs spänningslag runt varje maska.

$$R_1 I_1 + R_4(I_1 - I_3) + R_2(I_1 - I_2) = U_1 - U_2$$
$$R_2(I_2 - I_1) + R_5(I_2 - I_3) + R_3 I_2 = U_2$$
$$R_6 I_3 + R_5(I_3 - I_2) + R_4(I_3 - I_1) = 0$$

Matrisekvation:

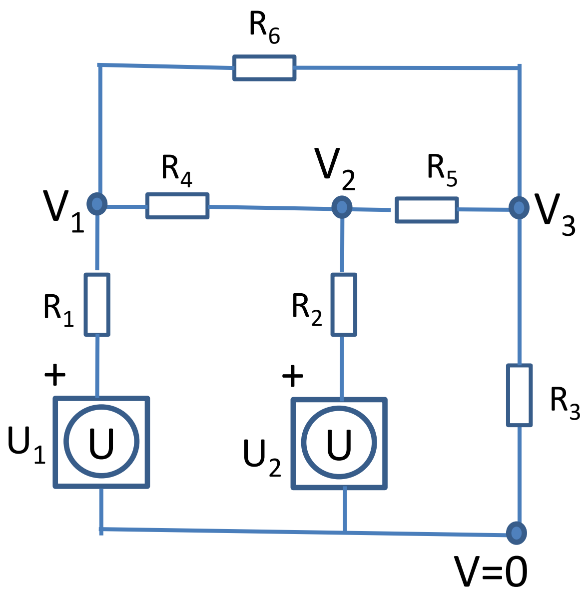
$$\rightarrow \qquad R\,\mathbf{I} = \mathbf{U}$$

Exempel på linjära modeller

Tillämpningar av linjära system

Exempel 5, Elkretsanalys av resistiva nät.

Alternativt:



Vi vill beräkna strömmar och potentialer i olika delar av nätet.
Ohms lag: U=RI
Kirchhoffs strömlag:
Summan av strömmar till/från en nod är noll.

Nodanalys: Ansätt potentialer V_i för varje nod i nätet, sätt V=0 för en nod och tillämpa sedan Kirchhoffs strömlag på varje nod.

$$(V_1 - U_1)/R_1 + (V_1 - V_2)/R_4 + (V_1 - V_3)/R_6 = 0$$
$$(V_2 - V_1)/R_4 + (V_2 - V_3)R_5 + (V_2 - U_2)/R_2 = 0$$
$$(V_3 - V_1)R_6 + (V_3 - V_2)R_5 + V_3/R_3 = 0$$

Matrisekvation:

$$\rightarrow \qquad \mathrm{G}\,\mathbf{V} = \mathbf{I}$$

Exempel på linjära modeller

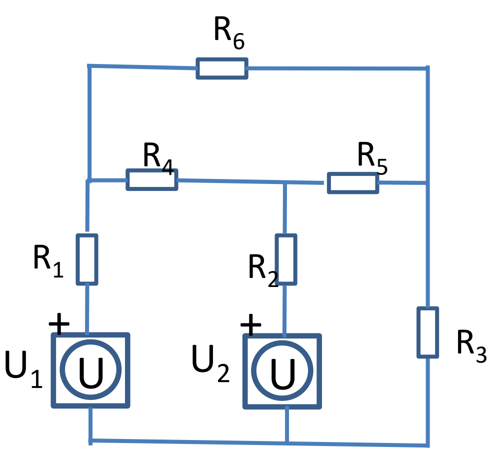
Tillämpningar av linjära system

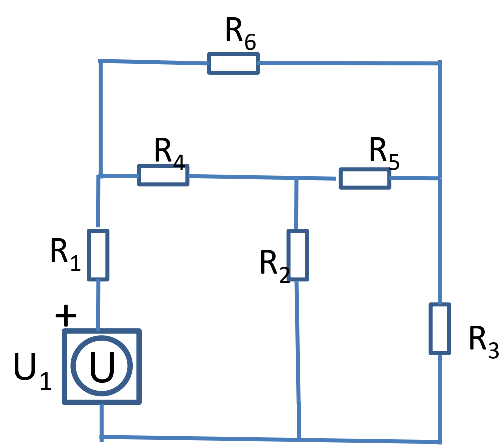
- Att ett system är linjärt har många fördelar. Så t.ex kan superpositionsprincipen komma väl till pass. Eftersom:

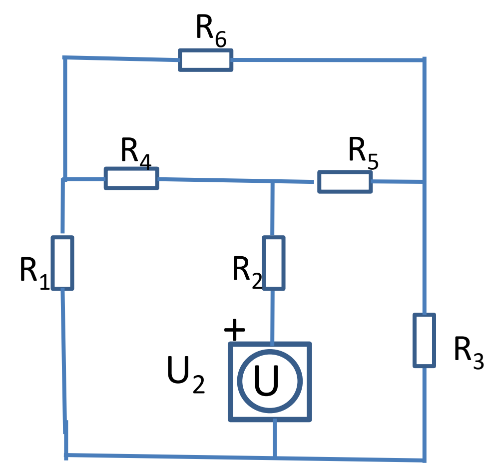
$$A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

gäller att om $A\mathbf{u} = \mathbf{b_1}$ och $A\mathbf{v} = \mathbf{b_2}$ så är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}$ Så är t.ex.

Lösningen till = lösningen till + lösningen till







- Vi har behandlat likström. Med växelström, induktanser och kapacitanser fungerar det på samma sätt, med komplexa impedanser Z istället för resistanser R.

Exempel på linjära modeller

Tillämpningar av linjära system

Exempel 6. Differensekvationer.

Antag att ett system utvecklas över tiden.

Data över systemets tillstånd kan vid tillfälle k samlas i en vektor $\mathbf{x}_k$.

Om det finns en matris A sådan att för alla k : $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ kallas detta för en linjär differensekvation eller rekursionsrelation.

Givet ett utgångsläge $\mathbf{x}_0$ kan systemets utveckling beräknas, $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$ osv.

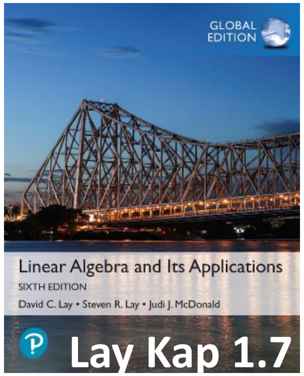
Om det t.ex. visat sig att 5% av innerstadens befolkning varje år flyttar ut till förort, medan 3% av förortsbefolkningen flyttar in till centrala stadsdelar och övriga bor kvar där de är, så kan utvecklingen antas bli

$$\begin{bmatrix} c_{k+1} \\ f_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k \\ f_k \end{bmatrix}$$

om

c_k betecknar innerstadsbefolkningen år k och f_k får stå för förortsbefolkningen år k.

Linjärt (o)beroende



Definition
En uppsättning av vektorer $(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ är *linjärt oberoende* omm $x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$ bara har triviala lösningar ($x_i = 0$ för alla i).
Uppsättningen är *linjärt beroende* omm det finns $x_i \neq 0$ så att $x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$.

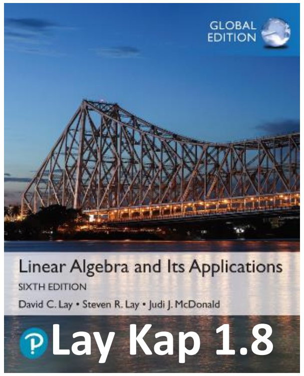
Ett annat sätt att formulera detta är: om det går att konstruera en av vektorerna vektorerna i en viss uppsättning vektorer som en linjär kombination av andra vektorer i uppsättningen, är vektorerna i den uppsättningen inte linjärt oberoende.

Geometriskt sett är två vektorer linjärt beroende omm en av vektorerna kan konstrueras som en skalär av den andra vektorn (pekar utefter samma linje i $\mathbb{R}^3$).

En uppsättning vektorer $(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_p})$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ är linjärt beroende om $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{n}$.

På matrisform blir kriteriet för linjärt oberoende: kolumnerna i en matris A är linjärt oberoende omm ekvationen
$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ endast har triviallösning.

Linjära avbildningar

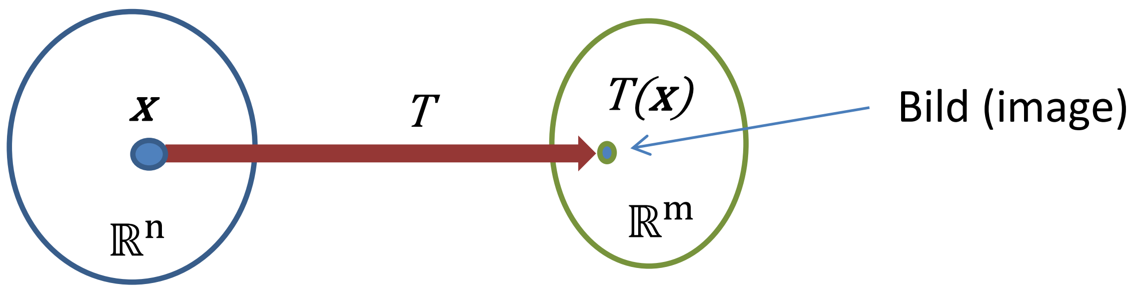


Ett helt annat sätt att se på uttrycket A**x** är att det definierar en linjär avbildning eller en linjär transformation.

Matrisen A transformerar vektorn $\boldsymbol{x}$ till en ny vektor. (Jfr *f(x)=y)*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

A kan ses som en avbildning T ("transformation", funktion), som avbildar $\boldsymbol{x}$ på $\boldsymbol{b}$.



Definitionsmängd ("Domain")

Värdemängd ("Range", target space)

För en linjär avbildning T gäller allmänt:

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$$

$$T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$$

$$T(\boldsymbol{O}) = \boldsymbol{0}$$

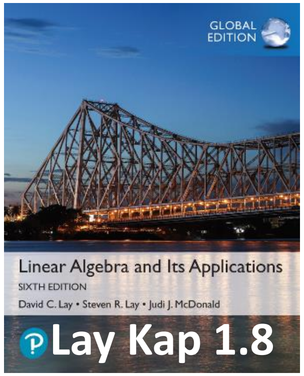
Motsvarande för A**x**:

A(**u**+**v**) = A**u** + A**v**

A(c**u**)=cA**u**

A**0**=**0**

Linjära avbildningar



Uttrycket A**x,** där A är m x n motsvarar alltid en linjär avbildning T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
Det finns också linjära avbildningar som inte kan representeras av matriser på det sättet. En linjär avbildning T tillordnar varje element i definitionsmängden ett element i värdemängden.

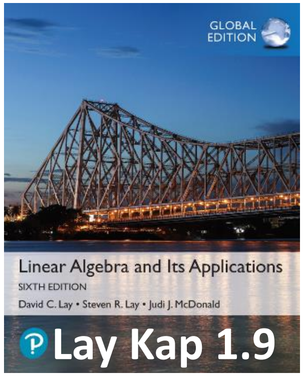
Om dessutom T är sådan att två element i definitonsmängden aldrig har samma bild i värdemängden sägs avbildningen vara omvändbar (injektiv).

Om $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är sådan att varje element i $\mathbb{R}^m$ är en bild av något element i $\mathbb{R}^n$ sägs T vara "på" ("onto") $\mathbb{R}^m$ (surjektiv).

Om varje element i definitionsmängden avbildas på exakt ett element i värdemängden sägs avbildningen vara ett-till-ett. (bijektiv).

Nollrummet $N(T)$ utgörs av alla element i definitionsmängden som avbildas på $\mathbf{0}$ i värderummet.

Linjära avbildningar



För en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ finns en unik matris A sådan att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ \forall \ \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^n$.

Till yttermera visso är A den $m \times n$ matris vars j'te kolumn utgörs av vektorn $T(\boldsymbol{e_j})$, där $\boldsymbol{e_j}$ är j'te kolumnen av *identitetsmatrisen* i $\mathbb{R}^n$.

$$A = \left[T(\mathbf{e}_1) \ T(\mathbf{e}_2) \ \ldots \ T(\mathbf{e}_n) \right]$$

Identitetsmatrisen är en $n \times n$ matris med bara ettor på diagonalen och nollor på övriga positioner:

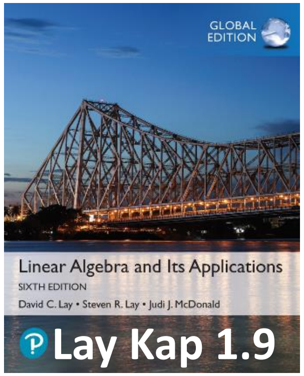
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

för n rader och n kolumner.

Detta gör att $I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ för alla $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{j:te raden}$

Matrisen A ovan kallas *standardmatrisen* för avbildningen.

Linjära avbildningar

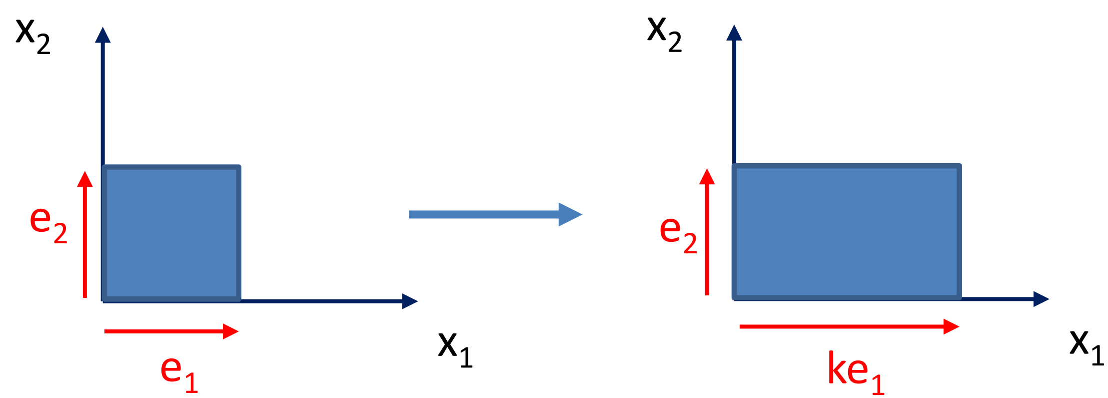


För en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ finns en unik matris A sådan att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \;\forall\; \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^n$.
Matrisen är m x n, har m rader och n kolumner.

Exempel på avbildningar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

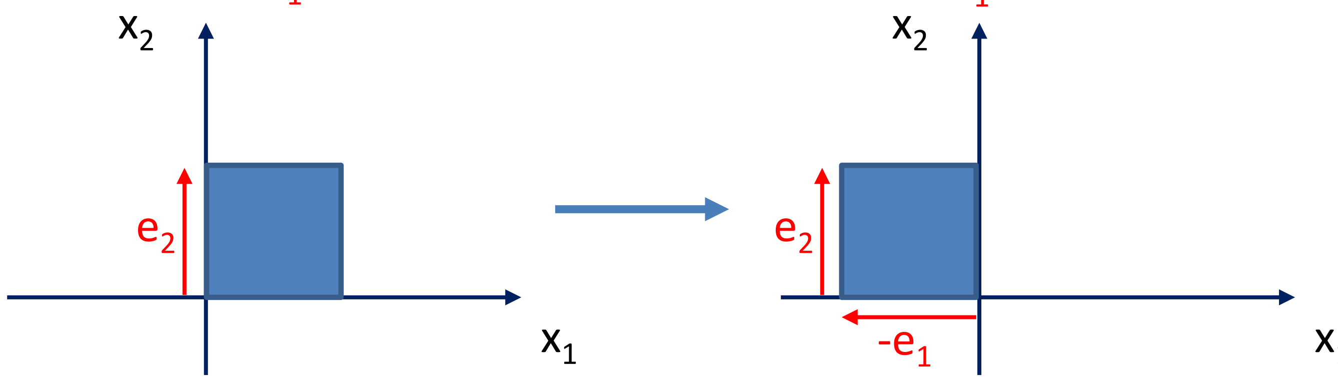
Sträckning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

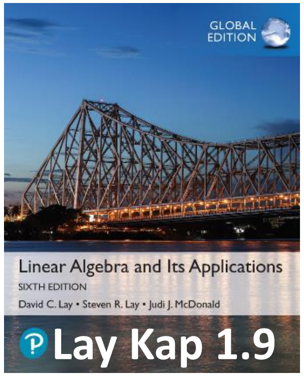


Spegling i x_2-axeln:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Linjära avbildningar

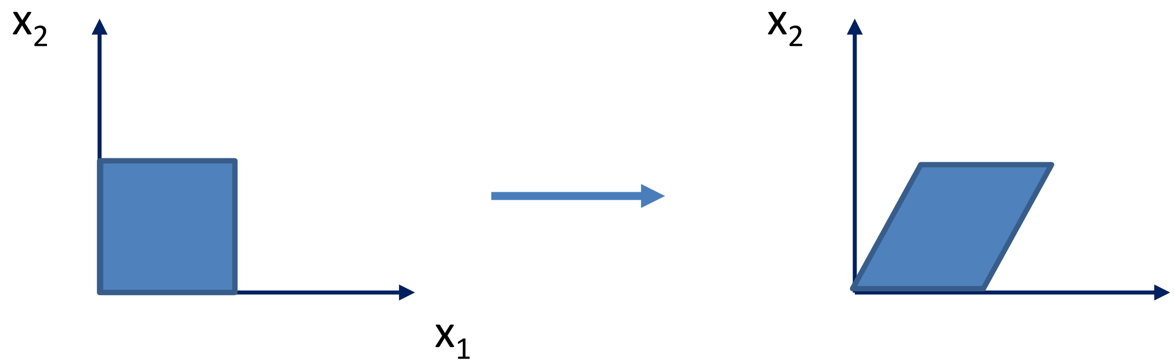


För en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ finns en unik matris A sådan att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \;\forall\; \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^n$.
Matrisen är m x n, har m rader och n kolumner.

Exempel på avbildningar $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

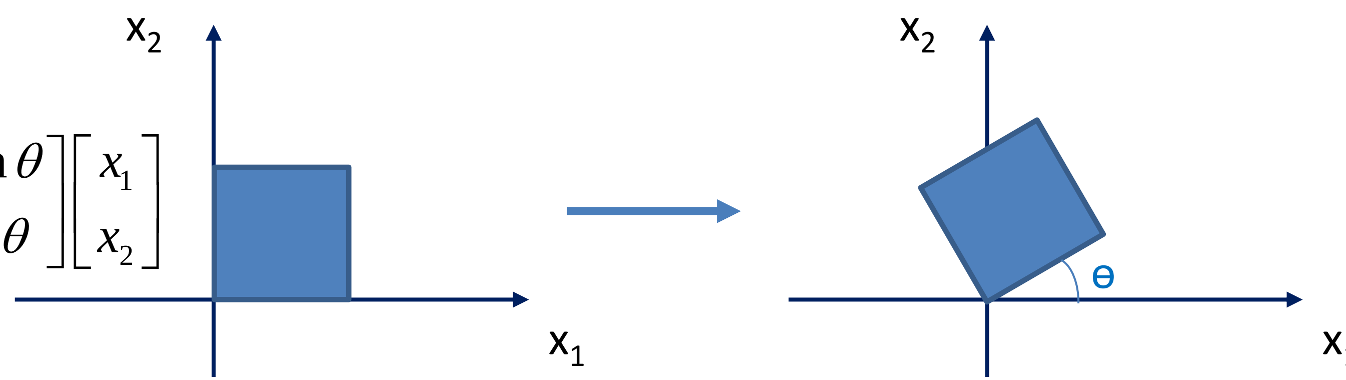
Skjuvning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

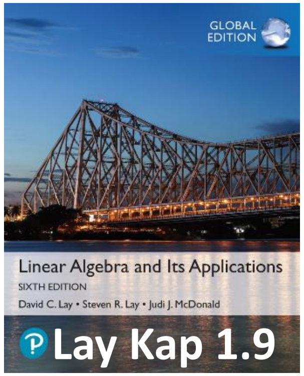


Rotation:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Linjära avbildningar



För en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ finns en unik matris A sådan att $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \;\forall\; \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^n$.
Matrisen är m x n, har m rader och n kolumner.

Exempel på en avbildning $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

Projektion på x_1x_2-planet:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2,$$
$$A\mathbf{u} = \mathbf{v}$$