Linjära rum

dimension
basbyten
tillämpningar inom:
signalbehandling och
differensekvationer

Linjära rum

Vi rekapitulerar definitionerna:

En mängd element (vektorer) $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ i ett linjärt rum V är linjärt beroende omm $c_1\,\mathbf{v_1} + c_2\,\mathbf{v_2} + \ldots\, c_p\,\mathbf{v_p} = 0$ har en icke-trivial lösning, alltså en där inte alla $c_i = 0$. Detta är ekvivalent med att åtminstone något $\mathbf{v_i}$ kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Om en mängd element i V inte är linjärt beroende så är den linjärt oberoende.

En mängd som innehåller nollvektorn **0** i V är linjärt beroende, ty $c\,\mathbf{0} = 0$ för varje c.

Att en mängd element (vektorer) $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_q}\}$ i ett linjärt rum V spänner upp V betyder att alla element **v** i V kan skrivas som en linjärkombination av $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_q}\}$, alltså som $\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{v_1} + c_2\,\mathbf{v_2} + \ldots\, c_p\,\mathbf{v_q}$.

En bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}\}$ i V är en mängd linjärt oberoende element i V som spänner upp V.

Linjära rum

Teorem: Antag att ett linjärt rum V har en bas med n element. Då är varje mängd I V med n+1 element linjärt beroende.

Bevis: Låt den givna basen vara $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ och betrakta mängden A = $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}, \mathbf{a_{n+1}}\}$ i V. Mängden $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_n}\}$ innehåller $\mathcal{B}$, så den spänner upp V. Eftersom $\mathcal{B}$ spänner upp V: $\mathbf{a_1} = \beta_1\mathbf{b_1} + \beta_2\mathbf{b_2} + \dots.\ \beta_n\mathbf{b_n}$. Om alla koefficienter är noll så är $\mathbf{a_1} = \mathbf{0}$ och A är linjärt beroende. I annat fall är något β_k skilt från noll och $\mathbf{b_k}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots \boldsymbol{b_{k-1}}, \mathbf{a_1}, \mathbf{b_{k+1}}, \dots \mathbf{b_n}\}$, dessa vektorer spänner upp V.

Nästa steg är att $\mathbf{a_2} = \alpha_1\, \mathbf{a_1} + \beta_1\mathbf{b_1} + \dots \beta_{k-1}\, \boldsymbol{b_{k-1}} + \beta_{k+1}\, \boldsymbol{b_{k+1}} + \dots\ \beta_n\mathbf{b_n}$**.** Om alla β är noll är A linjärt beroende, eftersom då $\alpha_1\, \mathbf{a_1} - \mathbf{a_2} = \mathbf{0}$**.** Om något β_p är skilt från noll kan vi byta ut $\mathbf{b_p}$ mot $\mathbf{a_2}$ på samma sätt som vi gjorde med $\mathbf{a_1}$. Proceduren upprepas, till slut kommer vi till att $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}\}$ antingen är linjärt beroende eller också spänner upp V och i det senare fallet kan ju $\mathbf{a_{n+1}}$ skrivas som en linjärkombination av $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}\}$ vilket också visar att A var linjärt beroende.

Linjära rum

Teorem: Om ett linjärt rum V har en bas med n element så har varje annan bas för V också n element.

Bevis: Antag att V har två baser, den ena med n element, den andra med m element. Om n < m är den andra mängden linjärt beroende enligt föregående teorem, och kan inte vara en bas. Om n > m är den första mängden linjärt beroende enligt det förra teoremet, och kan inte vara en bas. Alltså: m = n, v.s.b.

Definition: Dimensionen för ett linjärt rum V är antalet basvektorer. Om V inte spänns upp av ett ändligt antal basvektorer är V oändligdimensionellt.
Dimensionen för {**0**} definieras som noll.

För en matris A gäller som vi tidigare sett att pivotkolumnerna är en bas för kolumnrummet Col A. Dimensionen för Col A kallas för matrisens rang, rank A, och är tydligen lika med antalet pivotkolumner. Vi har också sett att nollrummet Nul A för matrisen har en bas med en basvektor för varje fri variabel. Dimensionen för Nul A är alltså lika med antalet fria variabler. Om A är m x n är antalet kolumner n lika med antalet pivotkolumner plus antalet fria variabler, således:

rank A + dim Nul A = n

Inverterbara matriser

Ekvivalenta satser om $n \times n$ matrisen A (en gång till)

(antingen är alla satser sanna, eller så är alla falska).

- A är inverterbar.
- A är radekvivalent till I_n.
- A har n pivot-element.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har bara en trivial lösning.
- Kolumnerna i A bildar en linjärt oberoende uppsättning vektorer.
- Den linjära transformationen $\boldsymbol{x} \rightarrow A\boldsymbol{x}$ är ett-till-ett.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Kolumnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \rightarrow A\boldsymbol{x}$ avbildar A på $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.
- Det finns en $n \times n$ matris D sådan att $AD = I$.
- A^T är en inverterbar matris.
- Kolumnerna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- $Col\ A = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
- $dim(Col\ A) = n$
- $rank\ A = n$
- $Nul\ A = (\mathbf{0})$
- $dim(Nul\ A) = 0$
- $detA \neq 0$

Koordinatsystem

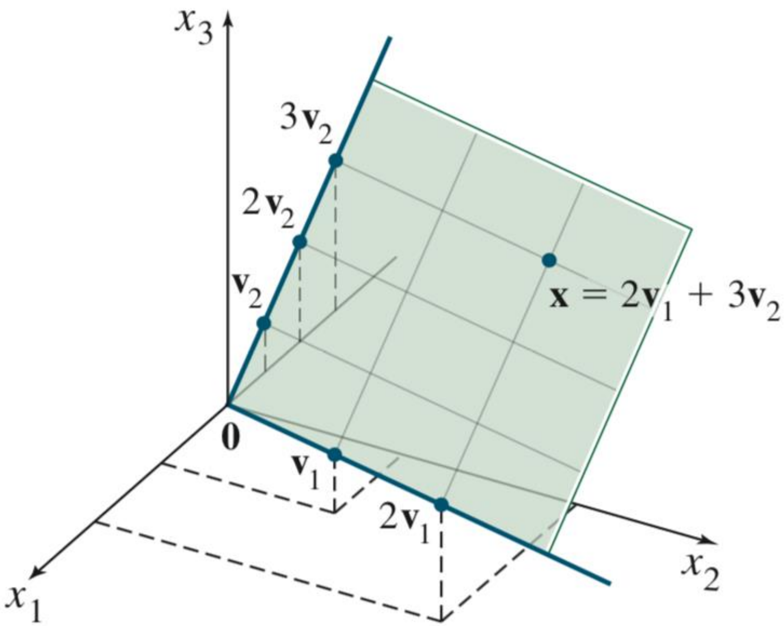


FIGURE 1 A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.

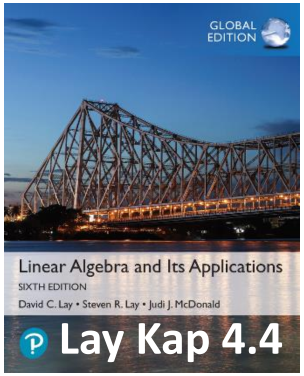
$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ är linjärt oberoende och spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$, ett underrum.

Som ett alternativ till standardbasen i $\mathbb{R}^3$ kan vektorn $\mathbf{x}$ i detta plan entydigt beskrivas med basen $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$:

$\mathbf{x} = 2\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}$

Koordinatsystem

Koordinater



Om $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1} \; \dots \; \boldsymbol{b_n}\}$ är en bas i V finns det för varje annan vektor $\boldsymbol{x}$ i V en linjär kombination basvektorer, skalade med $c_1, c_2, \dots, c_n$ som ger ett unikt uttryck för $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$$

Talen (vikterna) med vilka basvektorerna skalats $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ kallas *koordinater* för $\boldsymbol{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$, eller $\mathcal{B}$-koordinater.

Vektorn $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ kallas koordinatvektorn eller $\mathcal{B}$-koordinatvektorn, för $\mathbf{x}$.

Ekvationen för att byta koordinater från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen i $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n})$

$$\boldsymbol{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Koordinatbyten

Exempel (Lay 2.9 2):

Basen B i $\mathbb{R}^2$ är given som $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}$ och $[x]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

I standardbasen är $\mathbf{x} = -1\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}$

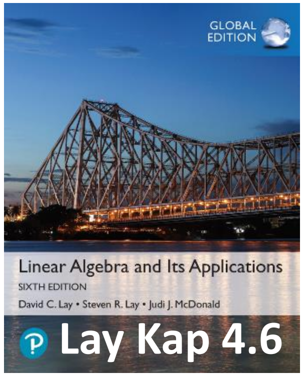
Allmänt $\mathbf{x} = P_{\mathrm{B}}[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}}$

Obs hur matrisen $P_{\mathcal{B}}$ (som beräknar koordinaterna i standardbasen från koordinaterna i $\mathcal{B}$) bildas av basvektorerna i $\mathcal{B}$ uttryckta i standardbasen.

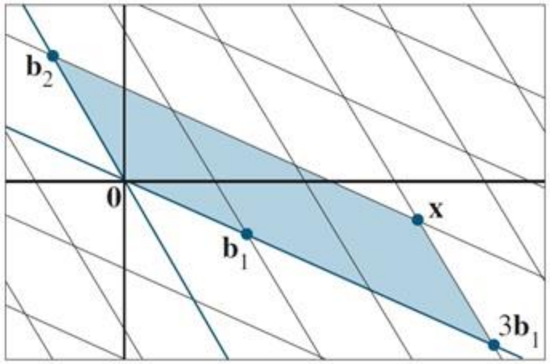
P_{B} har linjärt oberoende kolumner och är alltså inverterbar, ekvationen för att byta koordinater från standardbasen till basen B är $[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{B}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-1/5 & 3/5\\1/5 & 2/5\end{bmatrix}\mathbf{x}$

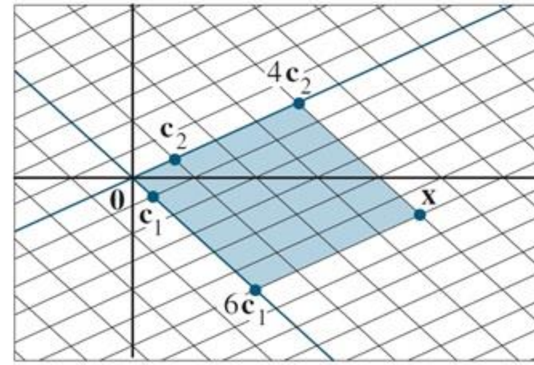
Basbytet är en ett-till-ett avbildning (bijektion) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Det avbildar också $\mathbb{R}^2$ på hela $\mathbb{R}^2$, sammantaget en isomorfism.

Koordinatbyten



På helt analogt sätt går det till att transformera koordinatvektorer vid byte mellan koordinatsystem som inte är standardsystemet.





I de båda figurerna visas hur vektorn **x** i $\mathbb{R}^2$ kan specificeras också med något av koordinatsystemen i $\mathcal{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ eller $\mathcal{C}=\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\}$.

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bara den informationen är inte tillräcklig för att specificera sambandet mellan baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ men om koordinatvektorerna för den ena basen uttryckta i den andra är känd framskrider koordinattransformationen på samma sätt som vid transformation till och från standardbasen.

Koordinatbyten

Exempel (Lay 4.6 1.):

Låt $\mathcal{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ eller $\mathcal{C}=\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\}$, där:
$\mathbf{b}_1=4\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$ och $\mathbf{b}_2=-6\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$.

Om $\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$, alltså: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, vad är $[\mathbf{x}]_C$?

$$[\mathbf{x}]_C = [3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2]_C = 3[\mathbf{b}_1]_C + [\mathbf{b}_2]_C = \left[[\mathbf{b}_1]_C \quad [\mathbf{b}_2]_C \right] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \underset{C \leftarrow B}{P} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Allmänt:

$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ där matrisen $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \quad \ldots \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$
bildas av basvektorerna i $\mathcal{B}$, givna i $\mathcal{C}$-koordinater.

$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ kallas för basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$.

Koordinatbyten

Det kan också hända att basvektorerna i baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ är givna i standardbasen. Exempel (Lay 4.6 2.):

Låt $\mathcal{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C}=\{\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2\}$, där $\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}-9\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$

Hur kan $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ beräknas i detta fall?

Ett sätt är att gå via standardbasen: $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}=\mathbf{x}$, $\mathrm{P}_{\mathcal{C}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}=\mathbf{x}$ och $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}=P_{\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{x}$

så: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}=P_{\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{x}=P_{\mathcal{C}}^{-1}P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$

Ett annat sätt är att ansätta $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$

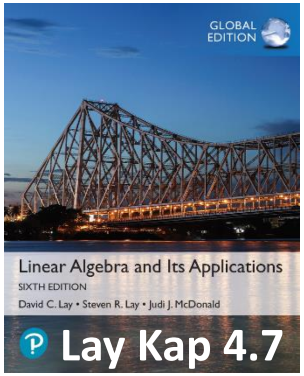
Då gäller: $[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\mathbf{b}_1$ och $[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\mathbf{b}_2$

och man kan lösa systemet för båda samtidigt genom radoperationer på

$$[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]=\begin{bmatrix}1&3&-9&-5\\-4&-5&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&6&4\\0&1&-5&-3\end{bmatrix}\Rightarrow[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}6\\-5\end{bmatrix}\text{ och }[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=\begin{bmatrix}6&4\\-5&-3\end{bmatrix}\qquad [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]\sim\left[\mathrm{I}\ \ \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right]$$

Signalbehandling



Låt oss studera det linjära rum $\mathbb{S}$ som består av dubbelt oändliga talföljder $\{y_k\} = (\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots..)$. De kan representera t.ex. samplingar av signaler vid diskreta tidpunkter.

Att $\mathbb{S}$ uppfyller kraven för ett linjärt rum är klart om addition definieras som $\{y_k\} + \{z_k\}=\{y_k+z_k\}$ och multiplikation med skalär som $c\{y_k\}=\{c\, y_k\}$.

Exempel på signaler:

- delta $\delta = (\ldots,\ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$
- enhetssteg $\upsilon = (\ldots,\ 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots)$
- konstant $\chi = (\ldots,\ 1,\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$
- alternerande $\alpha = (\ldots\ , 1, -1\ , 1, -1\ , 1, \ldots)$
- Fibonacci $F = (\ldots,\ 2,\quad , 1, 0, 1, 1, 2, \ldots)$
- exponentiell $\epsilon = (\ldots,\quad , c^{-1}, c^0, c^1, c^2, \ldots)$

$\uparrow$

$k = 0$

Signalbehandling

Skiftoperatorn S är en linjär transformation som skiftar en talföljd ett steg åt höger:
$S(\{x_k\}) = \{y_k\}$, $y_k = x_{k-1}$, eller $S(\{x_k\}) = \{x_{k-1}\}$.

$\delta = (\ldots, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$
$S(\delta) = (\ldots, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$
$S^2(\delta) = (\ldots, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots)$
$S^{-1}(\delta) = (\ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$

$\uparrow$

$k = 0$

osv

$S^{-1}S = S^0 = I$, identitetsavbilningen.

S är en linjär transformation eftersom $S(\{x_k\} + \{y_k\}) = \{x_{k-1}\} + \{y_{k-1}\} =$
$= S(\{x_k\}) + S(\{y_k\})$ och $S(\{cx_k\}) = c\{x_{k-1}\} = c\,S(\{x_k\})$.

Det gäller också att $S(\{x_{k+q}\}) = \{x_{k-1+q}\}$ för alla q, vilket tillsammans med lineariteten gör S till en linjär tidsinvariant transformation (LTI).

Signalbehandling

Ett annat exempel på en LTI är det glidande medelvärdet:.

$$M_m(\{x_k\}) = \{y_k\} \;, \qquad y_k = \frac{1}{m} \sum_{j=k-m+1}^{k} x_j$$

som är användbart för att jämna ut tillfälliga fluktuationer i en signal och göra det lättare att se längre trender och mönster.

Signalbehandling

Ett underrum till $\mathbb{S}$ är $\mathbb{S}_n$, mängden av alla signaler med längden n. Exempelvis alla $\{y_k\}$ sådana att $y_k = 0$ när $k<0$ eller $k>n-1$.

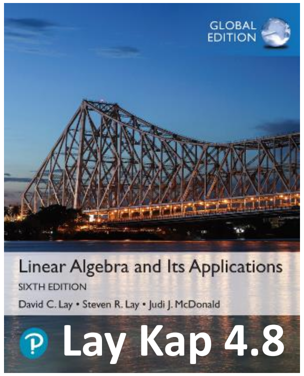
En bas för $\mathbb{S}_n$ är $\mathcal{B}_n = \{\delta , S(\delta) , S^2(\delta),\ldots S^n(\delta) \}$
och $\mathbb{S}_n$ är isomorft med $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\{y_k\} = \sum_{j=0}^{n} y_j S^j(\delta)$$

Ett underrum till $\mathbb{S}$ är också $\mathbb{S}_f$, mängden av alla talföljder med ett ändligt antal komponenter som är skilda från noll. $\mathbb{S}_n$ är ett underrum till $\mathbb{S}_f$.

Differensekvationer

Linjärt oberoende



Tidsdiskreta signaler fås t ex genom att mäta (sampla) en analog signal med jämna tidsintervall. Det ger en mängd värden $\{\dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots\}$ där k utgörs av alla heltal.

Antag att 3 olika signaler samplas på detta vis, $\{u_k\}, \{v_k\}$ och $\{w_k\}$. Dessa signaler är linjärt oberoende då $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (c_i är skalärer) är enda lösningen till

$$c_1 u_k + c_2 v_k + c_3 w_k = 0 \text{ för alla } k.$$

För 3 på varandra följande värden, t ex vid tidpunkterna $k, k+1$ och $k+2$, kan man då ställa upp matrisen

$$\begin{pmatrix} u_k & v_k & w_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} & w_{k+1} \\ u_{k+2} & v_{k+2} & w_{k+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ för alla } k.$$

Denna koefficientmatris kallas ibland *Casorati*-matrisen.

Om matrisen är inverterbar för något värde på k, så är signalerna linjärt oberoende.

Differensekvationer

Exempel (Lay 4.8 1,):

Visa att $\{1^k\}$, $\{(-2)^k\}$ och $\{3^k\}$ är linjärt oberoende signaler.

Casoratimatrisen är:

$$C = \begin{bmatrix} 1^k & (-2)^k & 3^k \\ 1^{k+1} & (-2)^{k+1} & 3^{k+1} \\ 1^{k+2} & (-2)^{k+2} & 3^{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-2)^k & 3^k \\ 1 & (-2)^{k+1} & 3^{k+1} \\ 1 & (-2)^{k+2} & 3^{k+2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & (-2)^k & 3^k \\ 0 & (-2)^k(-3) & 3^k 2 \\ 0 & (-2)^k 3 & 3^k 8 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & (-2)^k & 3^k \\ 0 & (-2)^k(-3) & 3^k 2 \\ 0 & (-2)^k 3 & 3^k 8 \end{vmatrix} = (-2)^k 3^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-2)^k 3^k \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} \neq 0$$

så C är inverterbar för alla k och talföljderna är därmed oberoende.
Men det räcker att sätta in ett värde på k, t.ex. k = 0, och visa det linjära oberoendet för det fallet.

Differensekvationer

En ekvation $a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots a_n y_k = z_k$ som ska gälla för alla k kallas för en linjär differensekvation av ordning n.

Om $\{z_k\} = 0$ kallas den för homogen.

Inom signalbehandling kallas en sådan differensekvation för ett linjärt tidsinvariant (LTI) filter och koefficienerna $\{a_i\}$ kallas filterkoefficienter.

En *n*-te ordningens differensekvation kan reduceras till ett system av första ordningens differensekvationer:

$\boldsymbol{x_{k+1}} = A\boldsymbol{x_k}$ för alla k, $\boldsymbol{x_k}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, A=$(n \times n)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$