KTH
School of EECS

Tentamen i Algebra och Geometri, IX1303

Onsdag 2019-08-21

Tentamen ges kl 08.00 - 13.00 i salarna: Ka-203, Ka-204 och Ka-205. Tentamen ges för studentgrupperna TIDAB1, TIEDB1, TITEH2-TIDB, TITEH2-TIED.

Hjälpmedel: Endast skrivhjälpmedel som penna, papper och linjal.

Provet består av åtta uppgifter (1-8) som var och en kan ge upp till fyra poäng. Svaren får ges på engelska.

Skriv tydligt, motivera dina olika steg, gärna med en figur, och formulera ett svar till varje uppgift. *Avdrag kan ges för svårläst och illa motiverad lösning*, även om svaret är rätt!!

Preliminära betygsgränser för förstaårsstudenter, inskrivna HT2018, där tentan ger 6 hp:

$<$ 16 poäng	F, Fx
16 $\leq$ poäng $<$ 19	E
19 $\leq$ poäng $<$ 23	D
23 $\leq$ poäng $<$ 26	C
26 $\leq$ poäng $<$ 29	B
$\geq$ 29 poäng	A

För studenter från tidigare årskullar ger tentan 5 hp och preliminära betygsgränser är:

$<$ 12 poäng	F, Fx
12 $\leq$ poäng $<$ 16	E
16 $\leq$ poäng $<$ 21	D
21 $\leq$ poäng $<$ 25	C
25 $\leq$ poäng $<$ 28	B
$\geq$ 28 poäng	A

Examinator: Anders Hallén, tel 08-7904358, e-mail: ahallen@kth.se

1. En förmögen godsherre hade 100 anställda, män, kvinnor och barn. Deras arbete under en månad belönades på denna tid med 3 silvermynt för männen, 2 silvermynt för kvinnorna och ½ silvermynt för barnen. Varje månad betalade godsherren 100 silvermynt till sina anställda. Bland de 100 anställda fanns åtminstone 1 man, 1 kvinna och 1 barn.

   Ställ upp ett ekvationssystem i matrisform vars lösning ger antalet anställda män, kvinnor och barn på godset, och radreducera denna utökade matris (2 p). Bestäm de 6 möjliga lösningarna (2 p).

Två villkor fås ur texten:

- Antal anställda är 100 och består av män (M), kvinnor (K) och barn (B).
- Männen får 3 mynt, kvinnorna får 2 mynt och barnen får ½ mynt och totalt 100 mynt betalas ut per månad.

Dessa ger oss systemet: $\left.\begin{matrix} M+K+B=100 \\ 3M+2K+0.5B=100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M \\ K \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Radreducering av den utökade matrisen ger: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -100 \\ 0 & 1 & 5/2 & 200 \end{pmatrix}$. Systemet är dock inte lösbart eftersom vi bara har 2 ekvationer, men 3 obekanta. Med B som fri parameter kan vi ändå skriva vektorn $\begin{pmatrix} M \\ K \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2\,B-100 \\ -5/2\,B+200 \\ B \end{pmatrix}$. Eftersom $M \geq 1$ och $K \geq 1$ har vi ytterligare villkor: $\begin{cases} 3/2\,B-100 \geq 1 \Rightarrow B \geq 67.33\ldots \\ 200-5/2B \geq 1 \Rightarrow B \leq 79.6 \end{cases}$. Dessutom inser vi att B måste vara ett jämnt tal för att undvika halva barn. Möjliga värden för B blir då: $B = 68, 70, 72, 74, 76, 78$.

Svar: Dessa B-värden ger: $\begin{pmatrix} 2 \\ 30 \\ 68 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 70 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 72 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 74 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 76 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \\ 78 \end{pmatrix}$.

2. Bestäm normalvektorn till planet som innehåller de tre punkterna (1,1,0), (0,2,1) och (3,2,-1) (2 p). Ange planets ekvation på skalär form (2 p).

Kalla punkterna $A = (1,1,0), B = (0,2,1)$ och $C = (3,2,-1)$. Två vektorer i planet blir t ex $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ och $\boldsymbol{AC} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. Normalvektorn till planet $\boldsymbol{n}$ ges då av kryssprodukten

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$$

Planets ekvation på skalär form blir med hjälp av en av punkterna $2x-y+3z=1$.

Svar: Planets ekvation är $2x-y+3z=1$.

3. Skriv, om möjligt, vektorn $\boldsymbol{w} = (1, -2, 2)$ som en linjär kombination av vektorer i uppsättningen $S = \{(1,2,3), (0,1,2), (-1,0,1)\}$ (4 p).

Vi söker skalärer c_1, c_2, c_3 som kan uppfylla ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Detta svarar mot den utökade matrisen: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Den tredje raden visar att systemet är inkonsistent och saknar lösning.

<u>Svar:</u> Vektorn $\boldsymbol{w}$ kan ej skrivas som en linjär kombination av vektorerna i S.

4. Visa först att inversen till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ existerar, utan att beräkna inversen (2 p). Beräkna sedan inversen (2 p).

Att A är inverterbar visas t ex genom $detA = -2 \neq 0$ eller att kolumnerna är linjärt oberoende, dvs radreducering ger enhetsmatrisen.

Inversen A^{-1} kan sedan beräknas genom radreducering av sammansatta matrisen

$$(A \quad I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$

5. Bestäm en diagonalmatris D till matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ så att $A = PDP^{-1}$.

Bestäm först egenvärdena ur den karakteristiska ekvationen $det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 12 \\ -2 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 1$ vilket ger

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Då fås $\begin{cases} \text{för } \lambda_1\text{: } A - 3I = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ och egenvektorn blir } \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{för } \lambda_2\text{: } -I = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ och egenvektorn blir } \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Detta ger $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Kontrollera svaret genom att beräkna $A = PDP^{-1}$.)

<u>Svar:</u> $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Bestäm en mista kvadratlösning till det inkonsistenta systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ där A ges av $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dvs lös normalekvationen $\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$ (2 p).

   Ge ett värde på felet associerat med denna minsta kvadratlösning (2 p).

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Minsta kvadratfelet ges av normen $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|$

$$A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

<u>Svar:</u> Minsta kvadratlösningen ges av $\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och minstakvadratfelet blir $\sqrt{11}$.

7. Låt rummet V utgöras av alla andragradspolynom $\mathbb{P}_2$ med inre produkten definierad av $\langle p, q \rangle = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2)$. Låt vidare $p(t) = 3t^2$ och $q(t) = 2t - 1$. För $t_0 = 0, t_1 = 1$ och $t_2 = 2$ beräkna inre produkten $\langle p, q \rangle$ (2 p) och normen av vektorn $p(t)$ (2 p).

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) = 0(-1) + 3 \cdot 1 + 12 \cdot 3 = 39$$

Normen av en vektor $\boldsymbol{v}$ ges av $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$. $\|p\| = \sqrt{0 + 9 + 144} = \sqrt{153}$

<u>Svar:</u> $\langle p, q \rangle = 39$ och $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{153}$

8. Ett underrum V till $\mathbb{R}^4$ är definierad genom ekvationen $x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 0$. Bestäm en linjär transform T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^4$ definierad av matrisen A, så att $Nul(T) = \{\boldsymbol{0}\}$ och $Col(T) = V$.

Skriv om ekvationen som $x_1 = 3x_2 - x_3 + 6x_4$ och inför fria parametrarna $x_2 = r$, $x_3 = s$ och $x_4 = t$. Hitta nu basen till:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r - s + 6t \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De tre linjärt oberoende vektorerna i högerledet utgör då en möjlig bas och matrisen A kan skrivas som en 4×3-matris: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Svar: Matrisen $= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ uppfyller de givna kriterierna.