1 Beräkna inversen till B

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Använder algoritm enligt sid 140 i Lay

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{3}{2}(1) \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2}(2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{2}{5} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{3}{2}(3) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5-3}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} -2 \cdot (2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{10} & \frac{\overset{-13}{5-18}}{10} & \frac{12}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{6}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right] \qquad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4 & -13 & 12 \\ 2 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

2 LU faktorisera A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Använder algoritm för LU faktorisering enligt s. 159 i Lay

L är 3x3 matris eftersom A har 3 rader

Första columnen i $L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1(1) \\ -2(1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & -7 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(2) \end{matrix}$$

normerat med 2

Andra column i L $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

normalised med -8

Tredje column i L $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Svar

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Test

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

stämmer

3 Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

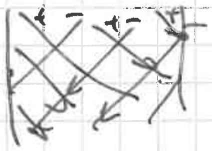
utveckler efter rad 5

$$= (-1)^{5+5} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

utveckler efter kolum 1

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

kan beräknes med formel



utveckler efter kolum 2

$$= (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

kan beräknas med formel

$7 \cdot 8 - 5 \cdot 6 = 26$

utveckler enligt kolumn 1

$$= (-1)^{1+1} \cdot 7 \, |8| + (-1)^{1+2} \cdot 6 \, |5| = 7 \cdot 8 - 5 \cdot 6 = 26$$

obs determinanter ej absolut belopp

4

Skriv en matris A för den linjära avbildningen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som avbilden enhetssfären på sfäroiden (elipsoiden) enligt figur.

Kolumnvektorerna i A är avbildning av elementen i enhetsmatrisen Teorem 10 i kap 1 av Lay

$$A = [T(e_1), T(e_2), T(e_3)]$$

$=$ [I detta fall skalas $\bar{e}_1$ med a, $\bar{e}_2$ med b och $\bar{e}_3$ med c

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} \text{ etc.}$$]

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

a Enligt teorem 10 s. 217 med tillägget på s. 219 att det gäller för ändliga volymer

Volym av sfäroiden = |det A| volym av enhetsfären

diagonal matris

det A $= a \cdot b \cdot c$ Volym enhetssfär $= \frac{4}{3}\pi$ ($\frac{4}{3}\pi r^2$ r=1) $\Rightarrow$ Volym $= \frac{4}{3}\pi abc$

b För att volymen ska vara samma ska det A = 1

$\Rightarrow abc = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 2}}$

5 Problemet kan lösas på samma sätt som ett Leontief Input-Output problem. (kap 2.6 i Lay)

Behov för att producera 1 enhet från andra delar av systemet

	vatten	kemikalie	el	
vatten	0,1	0,6	0,6	m^3
kemikalie	0,3	0,2	0	ℓ
el	0,3	0,1	0,1	kWh

Detta ger förbruknings matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,6 & 0,6 \\ 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$ Låt $\bar{x}$ vara hur

mycket som produceras internt och

$\bar{d}$ hur mycket som levereras $= \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ enligt uppgift

$\bar{x} = C\bar{x} + \bar{d} \Leftrightarrow (I - C)\bar{x} = \bar{d}$

Löses med utökad systemmatris och Gauss eliminering.

enklare att räkna

$$[I - C \mid \bar{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1-0,1 & -0,6 & -0,6 & 18 \\ -0,3 & 1-0,2 & 0 & 0 \\ -0,3 & -0,1 & 1-0,1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times 10 \cdot \frac{1}{3} \\ \times 10 \\ \times 10 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & 60 \\ -3 & 8 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ +(1) \\ +(1) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & 60 \\ 0 & 6 & -2 & 60 \\ 0 & -3 & 7 & 60 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{2} \cdot (2) \end{array}$$

5 forts

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & 60 \\ 0 & 3 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & 6 & 90 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\frac{2}{6}\cdot(3) \\ +\frac{1}{6}(3) \\ \cdot\frac{1}{6} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 90 \\ 0 & 3 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} +\frac{2}{3}(2) \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 3 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{3} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 40 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} m^3 \text{ vatten} \\ L \text{ kemikalie} \\ \text{kWh el} \end{matrix} \right.$$

För att leverera 18 m^3 vatten krävs internt en produktion på 40 m^3 vatten 15 l av kemikalierna och 15 kWh el.

6 För att både kunna translatera och rotera används homogen kordinater se Lay s. 172 kap 2.7.

Se s. 172 i Lay

Matris för att flytta (2,1) till (0,0)

$$A_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{tar } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ till } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ok} \right)$$

Se s. 173 i Lay

Matris för att rotera 90 grader moturs

$$A_2 \begin{bmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{test tar } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ till } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ok} \right)$$

Flytta tillbaka

$$A_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(\text{tar } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ till } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ok} \right)$$

Den totala rörelsen

$$A_3 A_2 A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Svar
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Test
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avbildar } \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ på } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{samt } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ på } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7 Finn en bas för kolumnrummet och en för nollrumet hos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

rad reducera A

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2\cdot(2) \\ \\ -3(2) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ +(2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De två pivo kolumnerna fungerar som basvektorer i kolumnrummet: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nollrummet är alla lösningar till det homogena systemet

För den utökade system matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\text{med samma operationer som ovan}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -(2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i kordinat form $\iff$ $x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ $\quad x_2, x_4$ fria

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 2x_4 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned} \iff \bar{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är basvektorer

8 Låt $\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Man kan visa att $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende på många sätt ett är om determinanten av den matris som bildas med $\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3$ som kolumnvektorer är nollskild.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Utveckla efter kolumn 1}}{=} (-1)^{1+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(5-6) + 2\cdot(3-4) = 1-2 = -1$$

$\mathbb{R}^3$ har 3 dimensioner och enligt bas teoremet (Teorem 13 i kap 4 s. 267 i Lay) så är 3 linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum med 3 dimensioner en bas för det vektorrummet.
Eftersom $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende är de alltså en möjlig bas för $\mathbb{R}^3$

I standardbasen $2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

se 4.4 i Lay

Alternativ metod $P_B = [\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\bar{x} = P_B [x]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$