KTH
School of EECS

Tentamen i Algebra och Geometri, IX1303

Fredag 2019-05-31

Tentamen ges kl 08.00 - 13.00 i salarna: Ka-208, Ka-210, Ka-301, Ka-303, Ka-304 och Ka-308. Tentamen ges för studentgrupperna TIDAB1, TIEDB1, TITEH2-TIDB, TITEH2-TIED.

Hjälpmedel: Endast skrivhjälpmedel som penna, papper och linjal.

Provet består av åtta uppgifter (1-8) som var och en kan ge upp till fyra poäng. Svaren får ges på engelska.

Skriv tydligt, motivera dina olika steg och formulera ett svar till varje uppgift. *Avdrag kan ges för svårläst och illa motiverad lösning*, även om svaret är rätt.

Preliminära betygsgränser för förstaårsstudenter, inskrivna HT2018, där tentan ger 6 hp:

< 16 poäng	F, Fx
$16 \le$ poäng < 19	E
$19 \le$ poäng < 23	D
$23 \le$ poäng < 26	C
$26 \le$ poäng < 29	B
≥ 29 poäng	A

För studenter från tidigare årskullar ger tentan 5 hp och preliminära betygsgränser är:

< 12 poäng	F, Fx
$12 \le$ poäng < 16	E
$16 \le$ poäng < 21	D
$21 \le$ poäng < 25	C
$25 \le$ poäng < 28	B
≥ 28 poäng	A

För akuta frågor om tentan: Mattias Hammar, tel 08-790 4375, e-mail: hammar@kth.se
Examinator: Anders Hallén, tel 08-7904358, e-mail: ahallen@kth.se

1. Inför höstterminen köpte Tord en matematisk formelsamling och en bunt kollegieblock för 64 SEK. Elvira lade ut 98 SEK på en exempelsamling i linjär algebra och den matematiska formelsamlingen, medan Joseph köpte exempelsamlingen i linjär algebra och även en bunt kollegieblock för totalt 76 SEK. Räkna ut vad formelsamlingen, kollegieblocken och exempelsamlingen kostade per styck genom att ställa upp problemet som en matrisekvation och sedan lösa det med radreducering.

   Kalla formelsamlingen FS, kollegieblocken KB och exempelsamlingen EX. Matrisekvationen kan då skrivas $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} FS \\ KB \\ EX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 98 \\ 76 \end{pmatrix}$. Den utökade koefficientmatrisen blir $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 64 \\ 1 & 0 & 1 & 98 \\ 0 & 1 & 1 & 76 \end{pmatrix}$ som reduceras till $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 43 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 55 \end{pmatrix}$.

   Svar: FS kostade 43, KB kostade 21 och EX kostade 55 SEK.

2. Bestäm nollrummet till den linjära transformen $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$.

   Radreducering ger $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Detta svarar mot ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$ eller $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Svar: Nollrummet utgörs av linjen $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$.

3. Betrakta den linjära transformen $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ där matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Visa med en skalenlig figur vad denna transform innebär och även vad den inversa transformen $T(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ gör.

   A utför skalning med en faktor 2 och horisontell skjuvning åt höger med 1. Kan visas t ex genom att låta matrisen verka på en kvadrat med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$. Inversen till *A* blir

   $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, dvs $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

   Inversen skalar ner med faktorn ½ och skjuvar horisontellt åt vänster med faktorn ¼.

4. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1,1,1)$ och $(2,0,3)$, samt är ortogonalt mot planet $x + 2y - 3z = 0$.

Normalvektorn till planet som innehåller punkterna (1,1,1) och (2,0,3) måste vara vinkelrät mot vektorn mellan punkterna $(2-1, 0-1, 3-1) = (1, -1, 2)$ eller $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Villkoret att det sökta planet, med normalvektor $\boldsymbol{n}$, också ska också vara vinkelrätt mot planet $x + 2y - 3z = 0$, med normalvektorn $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, ger oss då uttrycket $\boldsymbol{n} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = -\mathrm{i} + 5\mathrm{j} + 3\mathrm{k}$. Planets ekvation blir då t ex $-(x-1) + 5(y-1) + 3(z-1) = 0$ eller $x - 5y - 3z = 7$.

5. För vilka värden på konstanten p har matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 3 & 0 \end{pmatrix}$ tre reella egenvärden?

Den karakteristiska ekvationen blir $-\lambda^3 + 3\lambda + p = 0$ eller $\lambda^3 - 3\lambda = p$. Med våra analyskunskaper vet vi att detta är en tredjegradsekvation med lokalt maximum i $(-1,2)$ och lokalt minimum i $(1,-2)$. Detta betyder att det finns tre lösningar (egenvärden) till karakteristiska ekvationen om $-2 < p < 2$. (För $p = \pm 2$ finns två lösningar och om $|p|>2$ finns bara en lösning.

6. Gör en linjär mista kvadratanpassning till punkterna (0,3), (1,3) och (1,6), dvs bestäm en lösning $\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$, bestående av en rät linje. Rita figur!

Den anpassade funktionen har formen $y = a_0 + a_1 x$. De givna punkterna ger oss matrisekvationen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. De anpassade koefficienterna fås ur ekvationen $\hat{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_0 \\ \mathrm{a}_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Svar: Linjen ges av $y = 3 + 3x/2$

7. Matrisen för en linjär transform $T(x) = Ax: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Bestäm en bas $\mathcal{B}$ så att A kan diagonaliseras enligt $A = PDP^{-1}$, där D är den diagonalmatris som utgörs av basbytarmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$.

Diagonalisera A. Karakteristiska ekvationen blir $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ ger oss egenvärdena 5 och 0.

$\underline{\lambda = 5}$: $A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ och ekvationen $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ ger oss $x_1 = -2x_2$ där är x_2 fri. En basvektor kan då bli $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda = 0}$: $A - 0I = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och ekvationen $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ ger oss $x_1 = 3x_2$ där är x_2 fri. Nästa basvektor kan då bli $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Matrisen P kan nu konstrueras som $P = [\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2}] = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Kontrollera genom att beräkna PDP^{-1}: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \cdots = A$.

Svar: Basen $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

8. Bestäm en ortonormerad bas till det inre produktrummet $\mathbb{P}_1$ (förstagradspolynom). Definitionen av inre produkt ges av $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

   Tips: Gram-Schmidts rekursiva formel för ortogonalisering säger att ortogonala vektorer från en allmän bas $\{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_p}\}$ kan genereras genom att sätta $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{x_2} - \frac{\boldsymbol{x_2} \cdot \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p} = \boldsymbol{x_p} - \frac{\boldsymbol{x_p} \cdot \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} \boldsymbol{v_1} - \frac{\boldsymbol{x_p} \cdot \boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_2}} \boldsymbol{v_2} - \cdots - \frac{\boldsymbol{x_p} \cdot \boldsymbol{v_{p-1}}}{\boldsymbol{v_{p-1}} \cdot \boldsymbol{v_{p-1}}} \boldsymbol{v_{p-1}}$

   Ansätt standardbasen för förstagradspolynom $\{1, t\}$. Gram-Schmidts metod ger då $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{x_1} = 1$ och $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{x_2} - \frac{\boldsymbol{x_2} \cdot \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} \boldsymbol{v_1} = t - \frac{\langle 1, t \rangle}{1 \cdot 1} 1 = t - \int_0^1 1 \cdot t dt = t - 1/2$.

   Normen $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$ av dessa ”vektorer” är $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} = 1$ och $\|t - 1/2\| = \sqrt{\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 dt} = \sqrt{1/12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Slutligen erhålls den ortonormerade basen $\boldsymbol{v_1^{ON}} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = 1$ och $\boldsymbol{v_2^{ON}} = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\|\boldsymbol{v_2}\|} = \sqrt{3}(2t - 1)$.

   Svar: En ON-bas till $\mathbb{P}_1$ är $\{1, \sqrt{3}(2t - 1)\}$