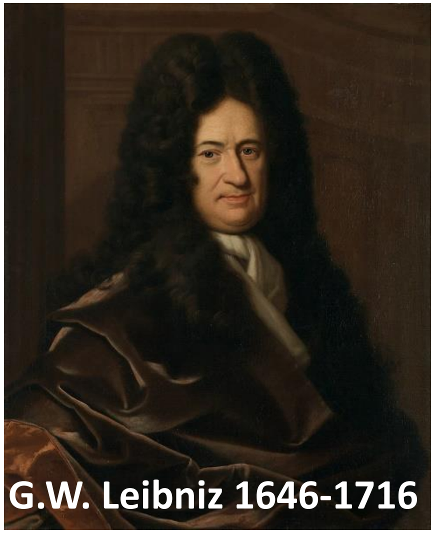
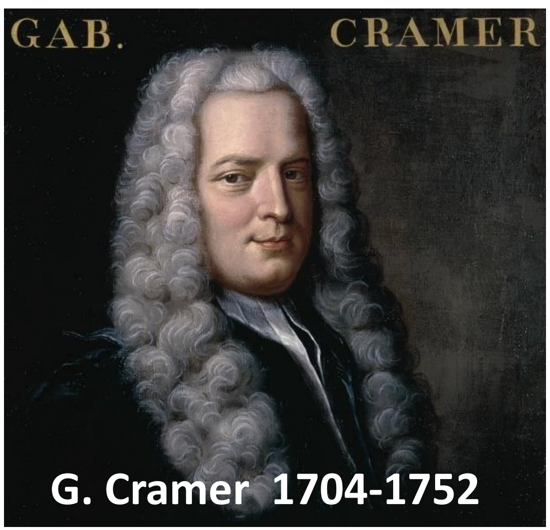
Determinanter

Determinanter





Historiska notiser:

Linjära ekvationssystem behandlades generellt i ”Nio kapitel” i Kina, c:a 200 f.Kr.

I Europa fram till 1500-talet hade man mest bara ägnat sig åt ekvationssystem med upp till 2 obekanta.
Leonardo da Pisa (Fibonacci) behandlade större omkring år 1200.

Takakazu Seki uppges ha behandlat vad vi kallar determinanter 1683 (iaf senast 1710).

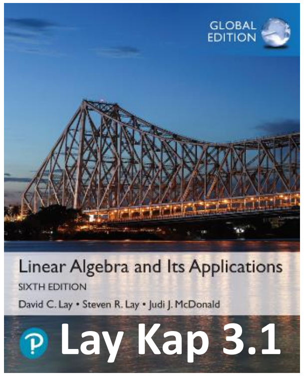
Leibniz använde 1693 determinanter av ordning 3 för att diskutera lösbarhet hos ekvationssystem.

Colin Maclaurin lär ha använt determinanter mer generellt från omkring 1729, arbetet publicerades dock postumt först 1748.

Gabriel Cramer utvecklade och använde teorin för determinanter av godtycklig ordning 1750.

Ordet determinant infördes av C. F Gauss 1801.

Determinanter (n ≤ 3)



Numera kopplar vi begreppet determinant till kvadratiska matriser nxn. En determinant av ordning n är en funktion som tillordnar en skalär, ett tal, till varje sådan matris. Vi har redan sett definitionerna för determinanter av ordning 2 och 3.

Determinant av ordning 1:

A är en 1x1-matris, $\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \text{A} = a_{11}$

Determinant av ordning 2:

A är en 2x2-matris, $\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \text{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Determinant av ordning 3:

A är en 3x3-matris, $\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \text{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Permutationer

En permutation φ är en avbildning av en ändlig ordnad mängd M på den själv, $\varphi : M \to$ M.

Om t.ex. M=(1,2) finns två möjliga permutationer, $\varphi_1(1)=1,\ \varphi_1(2)=2$ och $\varphi_2(1)=2,\ \varphi_2(2)=1.$

φ_1 här kallas för en jämn permutation eftersom den inte har någon transposition (något platsbyte jämfört med ursprungsordningen). φ_2 är däremot udda, eftersom den har en transposition (ett platsbyte).

Om t.ex. M=(1,2,3) finns sex möjliga permutationer, eftersom det första elementet kan väljas på 3 sätt, det andra på två sätt och det tredje sedan är givet. n element kan permuteras på n! sätt och $3! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3$=6.

Permutationerna av (1,2,3): (1,2,3), (3,1,2) och (2,3,1) kallas jämna, medan (1,3,2), (2,1,3) och (3,2,1) kallas udda.

sign φ definieras som +1 för jämna permutationer och -1 för udda permutationer.
Om en permutation har t transpositioner kan sign φ beräknas som sign $\varphi = (-1)^t$

Determinanter (n ≤ 3)

För ordning 2 och 3 är det ganska lätt att se några egenskaper hos determinanter som vi vill ska gälla även för determinanter av godtycklig ordning.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Determinanten består av en summa av produkter och varje produkt innehåller precis ett element från varje rad och ett element från varje kolumn i matrisen. Somliga termer har minustecken.

I definitionerna ovan har faktorerna i varje term skrivits i sådan ordning att andra index kommer i ordningen (1,2) respektive (1,2,3). Det som skiljer termerna åt är olika permutationer av första index för (1,2) respektive (1,2,3). För jämn permutation ska termen ha + tecken. För udda permutationer ska termen ha negativt tecken. En determinant av ordning 3 kan alltså definieras:

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_3} sign\ \varphi\ a_{\varphi(1)1}a_{\varphi(2)2}a_{\varphi(3)3}$$ där S_3 är mängden av permutationer av (1,2,3)

Determinanter (n ≤ 3)

Fler egenskaper för ordning 2 och 3 som är ganska lätta att se och som vi vill ska gälla även för determinanter av godtycklig ordning.

Om en rad eller kolumn i A består av bara nollor är det A = 0.
Bevis: eftersom varje term innehåller en faktor från varje rad och varje kolumn måste varje term bli noll om en kolumn eller rad består av nollor.

Om A är en triangulär matris är
det A = produkten av diagonalelementen.
Bevis: Produkten av diagonalelementen är den enda term som inte nödvändigtvis har någon nolla som faktor.

$$A = \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$$

Om två kolumner byter plats byter determinanten tecken.

Det följer att om två kolumner är lika är determinanten noll.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

det A^T = det A (så samma som sagts om kolumner ovan gäller också rader)

Determinanter (n ≤ 3)

Andra egenskaper för determinanter av ordning 2 och 3 som lätt kan verifieras direkt:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

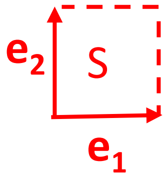
Determinanten är en linjär funktion av matrisens kolumner (och rader).

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Om en multipel av en kolumn adderas till en annan kolumn förblir determinanten oförändrad. Samma gäller om en multipel av en rad adderas till en annan rad.

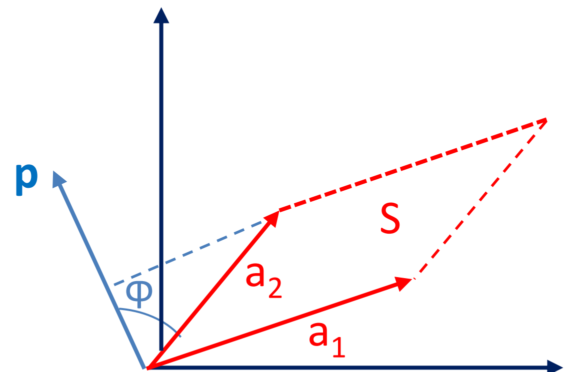
En matris A är inverterbar om och endast om det A ≠ 0.
Bevisidé: detta visas direkt i Lay för 2x2 och 3x3 –matriser genom radreducering till trappstegsform – inverterbara matriser har pivotpositioner i varje rad. Icke inverterbara matriser får en nolla i åtminstone något diagonalelement och i så fall är determinanten noll, som vi sett.

Determinanter (n ≤ 3)



$$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$$

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

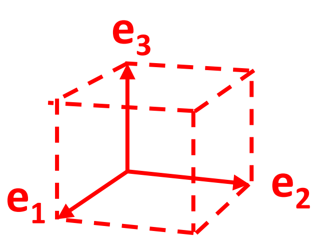


$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \;,\; \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} \equiv \begin{bmatrix} -a_{21} \\ a_{11} \end{bmatrix} \;,\; |\mathbf{p}| = |\mathbf{a_1}|$$

$$S = |\mathbf{a_1}||\mathbf{a_2}|\cos\varphi =$$
$$= |\mathbf{p}||\mathbf{a_2}|\cos\varphi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{a_2} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$$

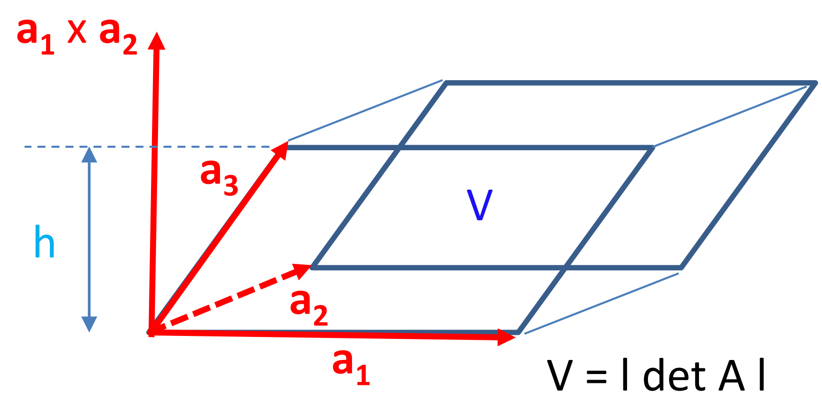
Enhetskvadraten i $\mathbb{R}^2$ avbildas på en parallellogram med arean $|\det A|$.



$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Enhetskuben i $\mathbb{R}^3$ avbildas på en parallellepiped med volymen $|\det A|$.



Determinanten anger förändringen i area/volym när ett föremål avbildas av T.

Determinanter (n ≤ 3)

Slutligen kan vi ganska lätt verifiera att det i en determinant av ordning 3 går att bryta ut elementen i en rad eller kolumn i varje term, exempelvis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Vi säger att vi har utvecklat determinanten efter första raden och har skrivit en determinant av ordning 3 som en kombination av determinanter av ordning 2. Samma möjlighet finns faktiskt för determinanten av ordning 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det[a_{22}] - a_{12} \det[a_{21}]$$

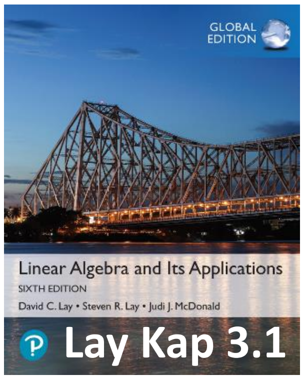
Samtliga uppräknade egenskaper för determinanter av ordning 2 och 3 ska visa sig gälla för godtycklig ordning n, inklusive utveckling efter rad eller kolumn.

Determinanter (alla n)

Analogt med uttrycket tidigare för en determinant av ordning 3 kan en allmän definition för ordning n skrivas:

$$\det\ \mathrm{A} = \sum_{\varphi \in S_n} sign\ \varphi\ a_{\varphi(1)1} a_{\varphi(2)2} \ldots a_{\varphi(n)n}$$

med S_n= mängden permutationer av (1,2....n)

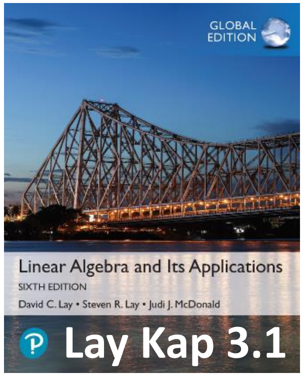


Men det är också behändigt att definiera determinanten av ordning n rekursivt, genom utveckling efter t.ex första raden i determinanter av ordning n-1. Givet nxn-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

definierar vi först de (n-1)x(n-1)-undermatriser A_{ij} som vi får genom att ta bort rad i och kolumn j i matrisen A.

Determinanter (alla n)



Nu kan vi definiera determinanten för en $n \times n$ −matris A så att den skrivs som en summa av underdeterminanter det A_{1j} av storlek $(n-1) \times (n-1)$.

$$detA = a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} + \cdots (-1)^{1+n}a_{1n}A_{1n} =$$

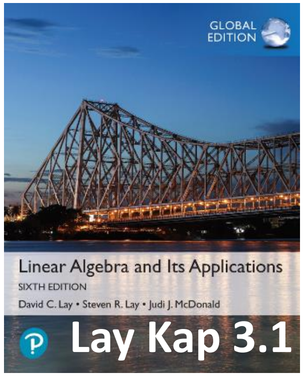
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\, detA_{1j}$$

Med hjälp av *kofaktorn* $C_{ij} = (-1)^{i+j}detA_{ij}$ kan determinanten skrivas

$$detA = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Vi har gjort en *kofaktorutveckling* (längs första raden).
C_{ij} kallas också för ”det algebraiska komplementet till elementet a_{ij}”

Determinanter



Kofaktorutveckling kan göras längs godtycklig rad eller kolumn:

$$detA = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$ Rad i

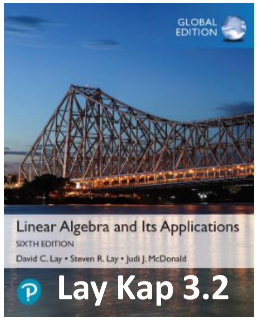
$$detA = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$ Kolumn j

Teckenhjälp vid kofaktorutveckling $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & \ddots & \\ \vdots & & & + \end{pmatrix}$ eller $(-1)^{i+j}$

Utveckling efter rad eller kolumn är mycket användbar för att beräkna determinanter av högre ordning, i fall där många element i matrisen är noll.

Utveckling efter rad eller kolumn gör det också möjligt att ganska lätt att bevisa satser om determinanter av högre ordning genom att återföra dem till vad vi redan vet om determinanter av ordning 2 och 3.

Determinanter



Nu kan vi se över hur några av de egenskaper vi noterat för determinanter av ordning n ≤ 3 kan generaliseras till högre ordningar n.

Flera egenskaper följer fortfarande ganska direkt ur att determinanten består av en summa av termer som alla innehåller element från varje kolumn och varje rad som faktorer exakt en gång. Så till exempel:

a) Om en rad eller en kolumn består av bara nollor är determinanten noll.

b) Om en rad eller en kolumn i A multipliceras med en konstant k blir determinanten $k\, detA$.

c) För en kvadratisk triangulär matris A är det A = produkten av diagonalelementen

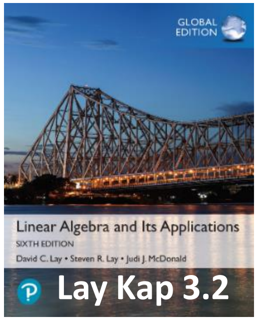
d)

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1}+a''_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a''_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

och motsvarande för varje rad eller kolumn.

b) och c) innebär att determinanten är en linjär funktion av varje rad eller kolumn.

Determinanter



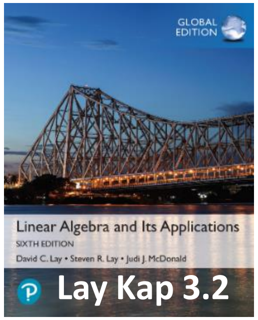
Andra egenskaper kan visas genom induktion: vi vet att de gäller för ordning $n \leq 3$ och visar genom utveckling längs rad eller kolumn att de också måste gälla för ordning n+1, och därmed för alla n. Så till exempel:

e) Om två rader eller kolumner i matrisen A är identiska är det A = 0.
Bevis: Utveckla determinanten längs en annan rad eller kolumn, determinanten blir en kombination av underdeterminanter av ordning n-1, alla med två identiska rader eller kolumner. Fortsätt processen tills underdeterminanterna blir av ordning 3, så att vi vet att satsen gäller, då är den visad för ordning n.

f) Om två rader eller kolumner i matrisen A byter plats ändras determinantens tecken.
Bevis: Det gäller för n =3. För n = 4, utveckla längs en annan rad eller kolumn, så följer det att satsen gäller även för n= 4, och så vidare.

g) Om en multipel av en kolumn (eller rad) adderas till en annan kolumn (eller rad) förblir determinanten oförändrad.
Bevis: Satsen följer av b), d) och e).

Determinanter



h) det A^T = det A.

Bevis: Satsen är uppenbart sann för n = 1. Antag att den gäller för determinanter av ordning k. Betrakta fallet n = k+1, alltså när A är (k+1) x (k+1). Kofaktorn till a_{1j} i A är densamma som kofaktorn a_{j1} i A^T, eftersom satsen gäller för ordning k. Kofaktorutveckling längs kolumn 1 i A^T motsvarar nu exakt kofaktorutvecklingen längs rad 1 i A. Induktion över determinantordning medför att satsen måste gälla för alla n.

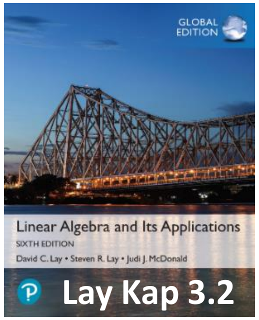
i) En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om det A = 0.

Bevis: Reducera A till trappstegsform. Om A är inverterbar finns en pivotposition I varje rad, den reducerade matrisen är triangulär och enligt c) är det A = produkten av diagonalelementen, som alla är skilda från noll. Om A inte är inverterbar blir minst ett diagonalelement noll och determinanten är därför noll.

j) det AB = (det A)(det B).

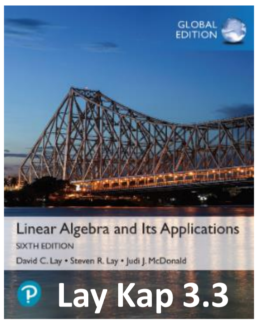
Bevis: Om A inte är inverterbar är AB inte det heller, och enligt i) är högerledet och vänsterledet då båda noll. Om A är inverterbar är den radekvivalent med I_n, $A = E_p E_{p-1} \ldots E_1$ för någon serie elementära matriser E_i, i=1,2....p . Enligt b) och g) får vi det AB = det $E_p E_{p-1} \ldots E_1 B$ =(det E_p)(det $E_{p-1} \ldots E_1 B$) = … (det A) (det B).

Determinanter



k) Om A är inverterbar så är $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Bevis: $A^{-1}A = I \Rightarrow (\det A^{-1})(\det A) = 1$



Cramers regel:

Om A är n x n och $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

låt $A_i(\mathbf{b})$ vara den matris man får om man ersätter kolumn i i A med **b**:

$$A_i(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

kolumn i

lösningen till ekvationssystemet kan då skrivas:

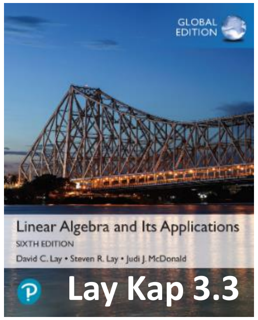
$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A} \quad , \quad i=1,2,\ldots n$$

Bevis: $I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \cdots & \mathbf{e_n} \end{bmatrix}$, $AI_i(x) = \begin{bmatrix} A\mathbf{e_1} & \cdots & A\mathbf{x} & \cdots & A\mathbf{e_n} \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a_n} \end{bmatrix} = A_i(\mathbf{b})$

$\because (\det A)(\det\ I_i(\mathbf{x})) = (\det A)x_i = \det A_i(\mathbf{b})$

Determinanter



En formel för A^{-1}

Om $A\mathbf{x}=\mathbf{e}_j$ så representerar $\mathbf{x}$ den j:te kolumnen i A^{-1} : $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{e}_j$

Enligt Cramers regel är då (i,j)-elementet i $A^{-1} = x_i = \dfrac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A}$

Kofaktorutveckling längs kolumn i av $A_i(\mathbf{e}_j)$ ger:

$$\det A_i(\mathbf{e}_j) = (-1)^{i+j} \det\ A_{ji} = C_{ji}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{21} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\, adj\ A$$

där den transponerade kofaktormatrisen kallas för adjunkten till A.

Detminanter

Ekvivalenta satser om $n \times n$ matrisen A (forts)
(antingen är alla satser sanna, eller så är alla falska).

- A är inverterbar.
- A är radekvivalent till I_n.
- A har n pivot-element.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har bara en trivial lösning.
- Kolumnerna i A bildar en linjärt oberoende uppsättning vektorer.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ är ett-till-ett.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^n$.
- Kolumnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ avbildar A på $\mathbb{R}^n$.
- Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.
- Det finns en $n \times n$ matris D sådan att $AD = I$.
- A^T är en inverterbar matris.
- *Kolumnerna i A bildar en bas för* $\mathbb{R}^n$*.*
- $Col\ A = \mathbb{R}^n$
- $dim(Col\ A) = n$
- $rank\ A = n$
- $Nul\ A = (\mathbf{0})$
- $\dim(Nul\ A) = 0$
- $detA \neq 0$

Detminanter

I atomfysiken vill man kanske t.ex. beräkna energinivåerna för en atom med N elektroner. Grundantagandet i kvantmekaniken är att atomens tillstånd representeras av en vågfunktion $\Psi(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},....\mathbf{r_N})$. Men i praktiken vill man representera Ψ med basfunktioner byggda på produkter av enpartikeltillstånd, $\psi_1(\mathbf{r_1})\psi_2(\mathbf{r_2})...\psi_N(\mathbf{r_N})$. Dock vet man från allmänna principer att $\Psi(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},...,\mathbf{r}_i,...\mathbf{r}_j,...\mathbf{r_N}) = -\Psi(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},...,\mathbf{r}_j,...\mathbf{r}_i,...\mathbf{r_N})$ krävs. Därför använder man "antisymmetriserade" basfunktioner:

$$\Psi \simeq \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} \varphi_1(\bar{r}_1, s_{z_1}) & \varphi_1(\bar{r}_2, s_{z_2}) & \dots & \varphi_1(\bar{r}_N, s_{z_N}) \\ \varphi_2(\bar{r}_1, s_{z_1}) & \varphi_2(\bar{r}_2, s_{z_2}) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_N(\bar{r}_1, s_{z_1}) & \dots & \dots & \varphi_N(\bar{r}_N, s_{z_N}) \end{vmatrix} \qquad \text{(Slaterdeterminanter)}$$

Alltså, om två φ_i, φ_j är lika, $\Psi = 0$. Om två $\bar{r}_i, s_{z_i}$, $\bar{r}_j, s_{z_j}$ är lika är också $\Psi = 0$.

Detta förhållande ("Pauliprincipen") ligger till grund för grundämnenas periodiska system.