Egenvektorer
Egenvärden
Diagonalisering

Lay, kap. 5.1 – 5.4

Egenvektorer och egenvärden

Egenvektorer och egenvärden

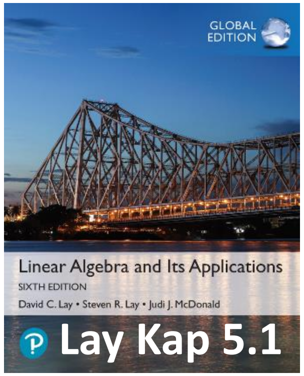
Låt L vara ett linjärt rum över $\mathbb{R}$ (eller över $\mathbb{C}$, det kommer vi till på nästa föreläsning) och låt T: L→ L vara en linjär avbildning av L på sig självt, **u** → T(**u**). Om det då finns något **u** i L sådant att T(**u**) = λ **u, u≠0**, kallar vi **u** för en egenvektor till avbildningen och λ för ett egenvärde. Idag ska vi hålla oss till reella egenvärden. A**u** = **0** motsvarar egenvärdet 0 men **0** är inte en egenvektor.

Om L är ett ändligdimensionellt rum finns där en bas med n basvektorer och koordinatvektorerna tillhör då $\mathbb{R}^n$ där n är rummets dimension, rummet är i så fall isomorft med $\mathbb{R}^n$. Då kan T representeras av en n x n matris A och om A**u**=λ**u** sägs **u** vara en egenvektor till A och λ ett egenvärde till A.

Eftersom T är linjär gäller att om **u** och **v** är egenvektorer hörande till samma egenvärde λ så är $T(c_1\mathbf{u} + c_2\,\mathbf{v}) = c_1\lambda\mathbf{u} + c_2\,\lambda\mathbf{v} = c_2\,T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v})$ så egenvektorerna till ett egenvärde spänner upp ett underrum till L, egenrummet till λ.

Vokabulären i detta fall kommer från tyska: Eigenvektor, Eigenwert etc
Engelska: eigenvector, eigenvalue.

Egenvektorer och egenvärden



$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Lösningen till systemet (egenvektorerna) är alltså nollrummet Nul (A-λI) och kallas ofta för egenrummet.

Exempel (Lay 5.1 övning 2):

$$\text{Är } \lambda = -2 \text{ ett egenvärde till matrisen } A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ?}$$

$$\text{I så fall är } (A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 7+2 & 3 \\ 3 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att det homogena systemet har en fri parameter så svaret blir: ja, λ = -2 är ett egenvärde.

$$\text{Lösningen till den homogena ekvationen (egenrummet för } \lambda = -2) \text{ är alla } c\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \; c \in \mathbb{R}$$

Egenvektorer och egenvärden

Exempel (Lay 5.1 övning 8):

Är $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor till A $= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$? Vilket är i så fall egenvärdet?

$$\mathrm{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ så } \mathrm{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \text{ med } \lambda = -3.$$

Teorem 1: Egenvärdena till en triangulär n x n matris är desamma som diagonalelementen.

Bevis: tag till exempel en 3 x 3 matris:

$$\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I} \text{ är då: } \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

och vi ser att vi får fria variabler om och endast om λ = något av diagonalelementen.

Egenvektorer och egenvärden

Teorem 2: Om {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ... $\mathbf{v_n}$} är egenvektorer svarande mot egenvärden λ_1 , λ_2 .... λ_n som alla är olika så är {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ... $\mathbf{v_n}$} linjärt oberoende.

Bevis:

Låt v_k vara någon av egenvektorerna, den med egenvärdet λ_k. $k \in \{1,\ldots n\}$.

$A\mathbf{v_k} = \lambda_k \mathbf{v_k}$

Om $n = 1$ är satsen uppenbart sann, eftersom $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$.

Antag att satsen är bevisad för $n = k$ -1. Betrakta ekvationen för linjärt beroende:

$$c_1\mathbf{v_1}+c_2\mathbf{v_2} + +\ldots+c_{k-1}\mathbf{v_{k\text{-}1}} + c_k\mathbf{v_k}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

Multiplicera med A: $c_1\lambda_1\mathbf{v_1}+c_2\lambda_2\mathbf{v_2} + +\ldots+c_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{v_{k\text{-}1}} + c_k\lambda_k\mathbf{v_k}=\mathbf{0} \qquad (2)$

Tag sedan (2) - $\lambda_k \times (1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v_1}+c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{v_2} + +\ldots+c_{k-1}(\lambda_{k\text{-}1} - \lambda_k)\mathbf{v_{k\text{-}1}}=\mathbf{0}$$

Eftersom alla λ_i är olika betyder det att $c_1, c_2, \ldots c_{k-1} = 0$

varur (1) ger att också $c_k = 0$.

Genom induktion står det alltså klart att {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ... $\mathbf{v_n}$} är linjärt oberoende.

Egenvektorer och egenvärden

Ekvivalenta satser om $n \times n$ matrisen A
(antingen är alla satser sanna, eller så är alla falska).

- A är inverterbar.
- A är radekvivalent till I_n.
- A har n pivot-element.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har bara en trivial lösning.
- Kolumnerna i A bildar en linjärt oberoende uppsättning vektorer.
- Den linjära transformationen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ är ett-till-ett.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Kolumnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ avbildar$A$ på $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.
- Det finns en $n \times n$ matris D sådan att $AD = I$.
- A^T är en inverterbar matris.
- Kolumnerna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- $Col\ A = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
- $dim(Col\ A) = n$
- $rank\ A = n$
- $Nul\ A = (\mathbf{0})$
- $dim(Nul\ A) = 0$
- $detA \neq 0$
- $\lambda = 0$ är inget egenvärde till A

Egenvektorer och egenvärden

Den karakteristiska ekvationen

Som vi har sett är λ ett egenvärde för matrisen A om och endast om (A-λI)**u**=0 har icke-triviala lösningar, vilket är ekvivalent med att (A-λI) inte är inverterbar etc. (se den långa listan i teoremet om inverterbara matriser).

Ett av sätten att undersöka om en matris är inverterbar är att beräkna determinanten. Om determinanten är lika med noll är matrisen ej inverterbar.
Vi får alltså en ekvation för att beräkna egenvärdena:

$\det\ (A-\lambda I) = 0$.

λ är alltså ett egenvärde till A om och endast om denna ekvation är uppfylld.
Den kallas för den karakteristiska ekvationen (eller sekularekvationen).

För en nxn matris blir den karakteristiska ekvationen en algebraisk ekvation av ordning n, att finna egenvärdena blir alltså liktydigt med att finna nollställena till ett polynom av grad n i λ.

Polynomet kallas för det karakteristiska polynomet (eller sekularpolynomet).
Lösningarna $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ kallas för matrisens spektrum.

Egenvektorer och egenvärden

Den karakteristiska ekvationen

Exempel (Lay 5,2 övning 4):
Finn det karakteristiska polynomet och egenvärdena för matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 10 = 0$$

dvs : $\lambda^2 - 5\lambda - 3\lambda + 15 - 10 \quad = \quad \lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$

vilket är det karakteristiska polynomet.

Vi drar oss till minnes hur man finner rötterna till denna ekvation, man kvadratkompletterar genom att lägga till och dra ifrån halva koefficienten för λ i kvadrat: $(\lambda - 4)^2 - 4^2 + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{4^2 - 5} = 4 \pm \sqrt{11}$.

Egenvärdena är således: $\lambda_1 = 4 + \sqrt{11}$ och $\lambda_2 = 4 - \sqrt{11}$

Egenvektorer och egenvärden

Den karakteristiska ekvationen

Exempel:

Matrisen som roterar vinkeln φ i positiv led runt z-axeln har vi skrivit

$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ hur går det att hitta egenvärden och egenvektorer

med vår metod? Den karakteristiska ekvationen blir $\begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\cos\varphi-\lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0$$

$\lambda = 1$ svarar tydligt mot vektorerna på z-axeln. Kan vi hitta fler egenvärden?

Den andra faktorn blir noll om $\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$

till vilken rötterna kan skrivas $\lambda = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}$, och är reella bara för

fallen $\cos\varphi = \pm 1$, alltså $\varphi = k\pi$, k=0, 1, 2.... Fallet $\lambda = -1$ för $\varphi = \pi$ kan vara lätt att glömma :-)

Egenvektorer och egenvärden

Som vi minns går det att byta koordinatsystem och koordinatvektorerna transformeras då med hjälp av inverterbara matriser som exempelvis

$[\mathrm{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$, där kolumnerna i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ utgörs av basvektorerna i $\mathcal{B}$ skrivna med $\mathcal{C}$ -koordinater.

Antag nu att en linjär avbildning i koordinatsystemet $\mathcal{C}$ beskrivs av matrisen A:

$[\mathrm{x}]_{\mathcal{C}} \to [y]_{\mathcal{C}} = \mathrm{A}[\mathrm{x}]_{\mathcal{C}}$ Vilken matris B beskriver då samma avbildning i $\mathcal{B}-$systemet?

$\mathrm{A}[\mathrm{x}]_{\mathcal{C}} = \mathrm{A}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$ och $[y]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[y]_{\mathcal{B}}$ ger att

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[y]_{\mathcal{B}} = \mathrm{A}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}} \Rightarrow [y]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1}\mathrm{A}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$$

alltså B= $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1}\mathrm{A}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ eller för enkelhets skull B=$\mathrm{P}^{-1}AP$

Par av matriser, A,B, som har sambandet B=P^{-1}AP för någon inverterbar matris P kallas för similära och transformationen B=P^{-1}AP för en similaritetstransformation. Similära matriser kan tydligen t.ex. beskriva samma linjära avbildning i två olika koordinatsystem.

Egenvektorer och egenvärden

Teorem 3: Om två n x n matriser A och B är similära så har de samma karakteristiska polynom och därmed också samma egenvärden.

Bevis: Låt $B = P^{-1}AP$. Då är $B-\lambda I = P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP-\lambda P) = P^{-1}(A-\lambda I)P$
$\det(B - \lambda I) = (\det P^{-1})(\det(A-\lambda I))(\det P)=\det(A-\lambda I)$, ty $(\det P^{-1})(\det P)=1$.

Diagonalmatriser, alltså matriser av typen $D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$ är mycket åtråvärda,

dels för att egenvärdena som vi har sett är just d_{11}, d_{22}, d_{33}. Dels för att det är lätt

att beräkna potenser: $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^k \end{bmatrix}$. Då blir det också lätt att beräkna A^k

om $A=PDP^{-1}$: $A^k = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}....PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$

Egenvektorer och egenvärden

Diagonalisering

En matris A sägs vara diagonaliserbar om det finns någon inverterbar matris P sådan att $A=PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris.

Teorem 4: En n x n matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer. Om $A = PDP^{-1}$ så är kolumnerna i P i så fall just de linjärt oberoende egenvektorerna till A.

Bevis: Om $P = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\ \dots\ \mathbf{v_n}]$ så $AP = [A\mathbf{v_1}\ A\mathbf{v_2}\ \dots\ A\mathbf{v_n}]$

Låt D vara en diagonalmatris med elementen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$.

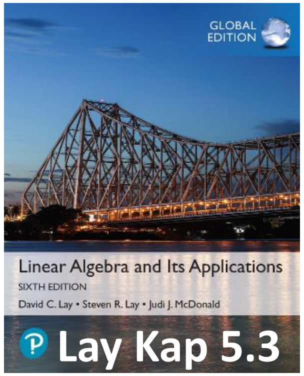
Då är $PD = [\lambda_1\mathbf{v_1}\ \lambda_2\mathbf{v_2}\ \dots\ \lambda_n\mathbf{v_n}]$.

Om nu $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_n}\}$ är linjärt oberoende egenvektorer till A med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ så är AP=PD enligt ovan, eftersom $A\mathbf{v_i} = \lambda_i \mathbf{v_i}\ \ \forall i$ och då ger högermultiplikation med P^{-1} att $A=PDP^{-1}$.

Om å andra sidan $A=PDP^{-1}$ gäller PD=AP och då måste $A\mathbf{v_i} = \lambda_i \mathbf{v_i}\ \ \forall i$, så att $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_n}\}$ måste vara egenvektorer med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$.

A har i så fall samma egenvärden som D, nämligen just diagonalelementen i D.

Egenvektorer och egenvärden



<u>Metod för diagonalisering</u>

1. Hitta egenvärden (lös karakteristiska ekvationen, eller på annat sätt).
1. Bestäm om möjligt n linjärt oberoende egenvektorer.
2. Bilda en P-matris av dessa egenvektorer.
3. Bilda en D-matris av egenvärdena.

Diagonalisering är alltså liktydigt med att finna ett koordinatsystem för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till den avbildande matrisen.

Om en n x n matris A har n distinkta (olika) egenvärden så är den diagonaliserbar, för som vi har sett finns då n linjärt oberoende egenvektorer till A.

Även om egenvärdena inte är distinkta kan det finnas n linjärt oberoende egenvektorer. Detta är möjligt om summan av dimensionerna av egenrummen för de olika egenvärdena är n. Om för varje k= 1,2…p gäller att $\mathcal{B}_k$ är bas för egenrummet hörande till egenvärdet λ_k så är i så fall mängden av alla basvektorer i $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ … $\mathcal{B}_p$ en egenvektorbas till $\mathbb{R}^n$.

Egenvektorer och egenvärden

Exempel med diagonalisering för ett dynamiskt system (Lay 5.2 exempel 5):

I Lay 1.10 gavs ett exempel på en differensekvation för ett problem där människor flyttar mellan innerstad och förort och hur det kan tänkas utvecklas med tiden. Den demografiska utvecklingen år för år beskrevs som $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ med

$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$. Startvektorn gavs som $x_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, 60% i innerstan, 40% i förorten.

För att modellera utvecklingen behöver vi beräkna egenvärdena för A och de tillhörande egenvektorerna. $\begin{vmatrix} 0.95-\lambda & 0.03 \\ 0.05 & 0.97-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ger sekularpolynomet $\lambda^2 - 1.92\lambda + 0.92 = 0$.

med lösningarna $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.92$.

Därur kan egenvektorerna $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ beräknas.

Sätt $\mathbf{x_0} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}]^{-1}\mathbf{x_0} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{vmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.225 \end{bmatrix}$

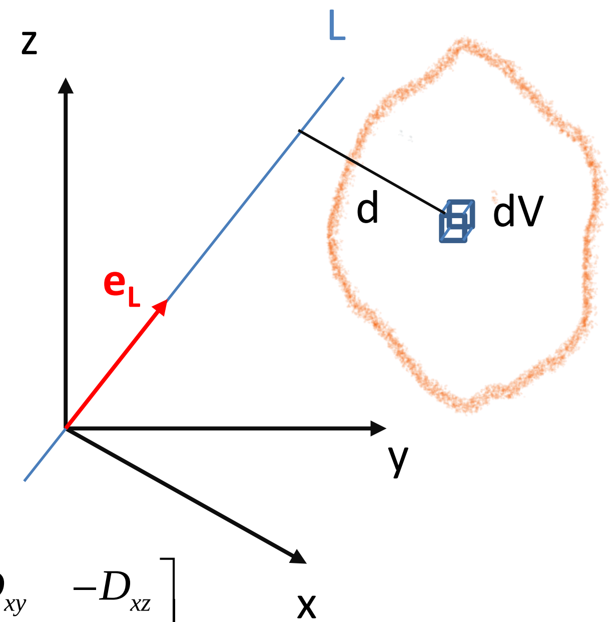
Den allmänna lösningen till differensekvationen blir $x_k = 0.125\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 0.225(0.92)^k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x_k} \to 0.125\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$ då $k \to \infty$.

Egenvektorer och egenvärden

Fler exempel på egenvärdesproblem:

1. Tröghetsmoment



En kropp är fäst vid en rotationsaxel L.

Rörelseekvationen är

$\mathrm{I}\dfrac{d\omega}{dt} = T_d - T_L$ där ω är vinkelfrekvensen,

T_d och T_L är vridmoment , drivmoment och last,

och I är tröghetsmomentet m.a.p. axeln L.

I beräknas som $\mathbf{e}_\mathsf{L}^\mathsf{T} I_{xyz} \mathbf{e}_\mathsf{L}$ med tröghetsmatrisen $\mathrm{I}_{xyz} = \begin{bmatrix} J_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yy} & J_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & J_z \end{bmatrix}$

med matriselement av typen $\mathrm{J}_x = \int_V \rho(y^2 + z^2)dV,\ \mathrm{D}_{xy} = \int_V \rho xy\, dV$, osv.

Då är det av intresse att hitta andra axelriktningar $\mathbf{e}_\mathsf{K}$ sådana att $\mathrm{I}_{xyz}\mathbf{e}_\mathsf{K} = J\mathbf{e}_\mathsf{K}$.

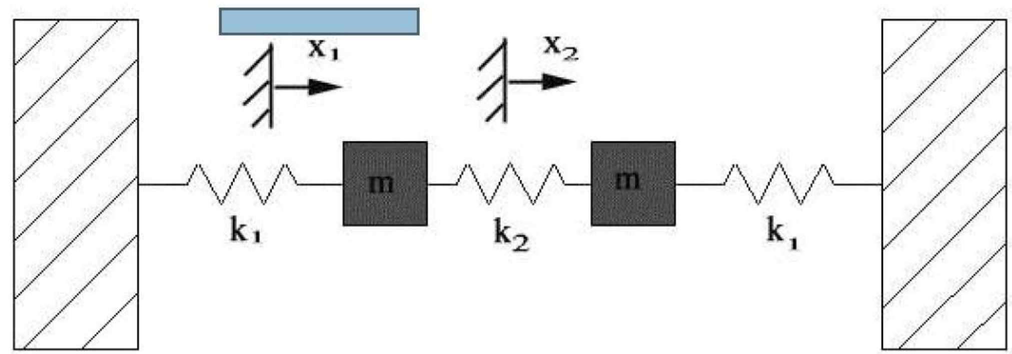
Egenvärdena J_1, J_2, J_3 kallas huvudtröghetsmoment och motsvarande egenvektorer för huvudtröghetsaxlar.

Egenvektorer och egenvärden

Egenvärdesproblem:

2. Svängningar och vibrationer.

Egenvärdesproblem förekommer ofta gällande svängningar och vibrationer. Som enkelt exempel, tag ett fall med diskreta massor, enklast bara 2.



$$\text{Rörelseekvationer:}\begin{cases} m\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m\ddot{x}_2+(k_2+k_1)x_1-k_2x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m} & \dfrac{k_2}{m} \\ \dfrac{k_2}{m} & -\dfrac{k_1+k_2}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x}=\ddot{\mathbf{x}}$$

Med ansatsen $\mathbf{x}=\mathbf{v}e^{i\omega t}$ fås $\begin{bmatrix} -\dfrac{k_1+k_2}{m} & \dfrac{k_2}{m} \\ \dfrac{k_2}{m} & -\dfrac{k_1+k_2}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x}=-\omega^2\mathbf{x}$, alltså $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ med $\lambda=-\omega^2$

Lösningen blir två distinkta egenvärden, med linjärt oberoende egenvektorer.

Egenvektorer och egenvärden

Egenvärdesproblem:

3. Schrödingerekvationen och väteatomen.

För en enda partikel, som en elektron, gäller enligt vågmekaniken:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi$$

Där för elektronen i en väteatom: $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Ansatsen $\psi = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ ger för den radiella delen egenvärdesekvationen:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\mathrm{R}_{n\ell}(r) = E\mathrm{R}_{n\ell}(r) \qquad (\text{randvillkor } \mathrm{rR}_{n\ell} \to 0 \text{ för r} \to 0,\infty)$$

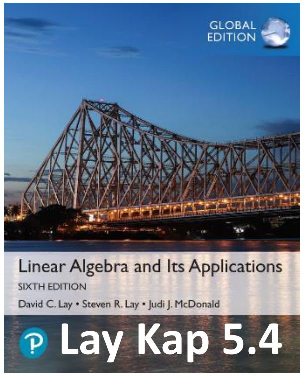
som löstes analytiskt av Schrödinger in 1926:

Egenvärden $E = -\frac{1}{n^2}\mathrm{Ry},\ n = 1,2,\ldots\ ,\mathrm{Ry}{=}13.6\,\mathrm{eV},\quad \ell = 0,1,\ldots n-1$

Därmed hade formeln för våglängder i vätespektrum $\lambda = \frac{m^2}{m^2 - 2^2}$, $m = 3,4\ldots.$ (Balmerserien)

som publicerats av Balmer 1885 fått en solid förklaring.

Egenvektorer och egenvärden



Om avbilningar i allmänna vektorrum

Från kapitel 1.9: varje linjär avbildning T från $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ till $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ kan genomföras genom multiplikation från vänster med en *standardmatris* $A = [T(\boldsymbol{e_1}) \cdots T(\boldsymbol{e_n})]$.

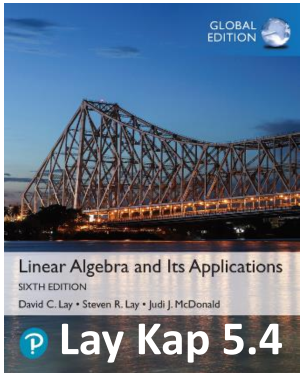
Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum med basen $\mathcal{B}$ och låt T vara en linjär transformation från V till V. Då kan avbildningen $T(\boldsymbol{x})$ från V till V skrivas

$$[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} = M(\boldsymbol{x})_{\mathcal{B}} \text{ där } M = \big[[T(\boldsymbol{b_1})]_{\mathcal{B}} \cdots [T(\boldsymbol{b_n})]_{\mathcal{B}}\big]$$

Matrisen M är alltså matrisen för *T i* basen $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[rr, "T"] \arrow[d] & & T(\mathbf{x}) \arrow[d] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[rr, "\text{Multiplication}", "\text{by } M=[T]_{\mathcal{B}}"'] & & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}}}
\end{tikzcd}$$

Egenvektorer och egenvärden



Exempel (Lay 5.4 2):

En avbildning T: $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ (från rummet av polynom av grad högst n på sig självt) definieras av att $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + 2a_2 t$ (alltså derivation!).

Basen i $\mathbb{P}_n$ är standardbasen för polynom: $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

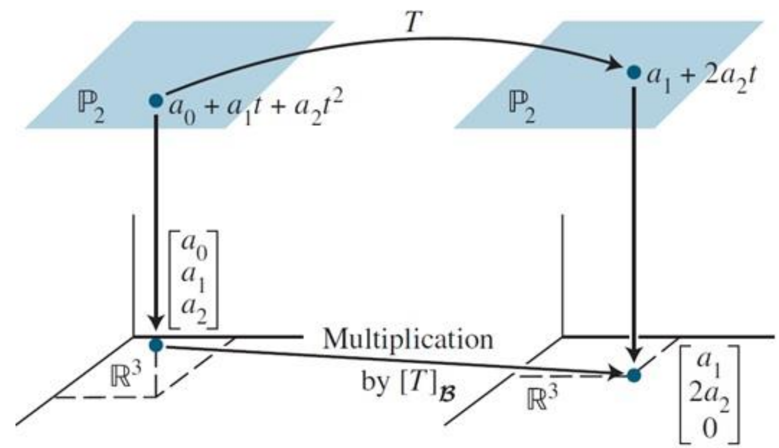
$$[\mathrm{T}(\mathbf{p})]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{T}]_{\mathcal{B}} [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} \text{ för alla } \mathbf{p} \in \mathbb{P}_n$$

$$\mathrm{T}(1) = 0,\ \mathrm{T}(t) = 1,\ \mathrm{T}(t^2) = 2t$$

$$\text{Alltså: } [\mathrm{T}(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathrm{T(t)}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathrm{T(t^2)}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[\mathrm{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } [\mathrm{T}(\mathbf{p})]_{\mathcal{B}} [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



för ett allmänt $\mathbf{p} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$.

Sammanfattning

Vi har:

- Definierat egenvärde och egenvektor för linjära avbildningar och matriser.
- Sett metoder för att beräkna egenvärden och egenvektorer för matriser
- Visat att egenvektorer svarande mot olika egenvärden är linjärt beroende.
- Uppdaterat teoremet om inverterbara matriser ännu en gång.
- Härlett den karakteristiska ekvationen och definierat sekularpolynomet.
- Definierat simulära matriser, som har sambandet $A=PBP^{-1}$.
- Visat att simulära matriser har samma egenvärden och att de kan beskriva samma linjära avbildning i olika baser.
- Definierat diagonaliserbarhet och sett metoder för diagonalisering.
- Tittat på några exempel på egenvärdesproblem, där metoderna är användbara.