Ö8

(1) Lay 4.5

1. $\left\{ \begin{bmatrix} s-2t \\ s+t \\ 3t \end{bmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$ Finn en bas och ange dimensionen.

Mängden kan skrivas $s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$ och anger ett underrum i $\mathbb{R}^3$.

$\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix} \right\}$ är en bas och dimensionen är 2.

4. $\left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ 2a \\ 3a-b \\ -b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$ kan skrivas $a\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}}_{\bar{b}_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}}_{\bar{b}_2}$,

ett underrum i $\mathbb{R}^4$ med basen $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$. Dimensionen är 2.

10. Finn dimensionen för Span$\left\{ \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\6\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\\7\end{bmatrix} \right\}$.

Låt oss reducera $[\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3\ \bar{v}_4]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & -3 \\ 0 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tre pivot-kolumner: dimensionen är 3

Ö8

(2) Lay 4.5

27. Hermitepolynom: $1,\ 2t,\ -2+4t^2,\ -12t+8t^3$.

Polynomen är 4, $\dim P_3 = 4$, så om polynomen är linjärt oberoende utgör de en bas. Finns c_1, c_2, c_3, c_4, som inte alla är noll, så att

$$c_1 + 2c_2 t - 2c_3 + 4c_3 t^2 - 12c_4 t + 8c_4 t^3 = 0 \quad ?$$

Om vi jämför VL och HL potensvis så:

$$\begin{aligned} c_1 \quad - 2c_3 \quad &= 0 \\ 2c_2 \quad - 12c_4 &= 0 \\ 4c_3 \quad &= 0 \\ 8c_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow c_4 = 0,\ c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = 0,\ c_1 = 0$

Alltså är polynomen linjärt oberoende och utgör en bas.

Vi kan också ställa upp polynomen som kolumner uttryckta i standardbasen $\{1, t, t^2, t^3\}$ och radreducera den resulterande matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

matrisen har 4 pivotkolumner och spänner alltså upp det fyrdimensionella rummet P_3. kolumnerna är linjärt oberoende.

Ö8

(3) Lay 4.6

2. $\mathcal{B} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2\}$

är baser för ett linjärt rum V.

$\bar{b}_1 = -\bar{c}_1 + 4\bar{c}_2$ och $\bar{b}_2 = 5\bar{c}_1 - 3\bar{c}_2$

a) finn koordinatbytesmatrisen $\underset{C \leftarrow B}{P}$ för byte från B-koordinater till C-koordinater.

$$[\bar{x}]_C = \underset{C \leftarrow B}{P} [x]_B$$

koordinaterna i basen C måste bli

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_C = \begin{bmatrix} -x_{1B} & +5x_{2B} \\ 4x_{1B} & -3x_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{C \leftarrow B}{P} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_B$$

Alltså: kolumnerna i $\underset{C \leftarrow B}{P}$ utgörs av basvektorerna $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, givna i C-koordinater

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = \left[[\bar{b}_1]_C \; [\bar{b}_2]_C \right]$$

Svar a) $$\underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $$[\bar{x}]_C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ö8 Lay 4.6

(4) 5. $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ och $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$

är baser för ett linjärt rum V.

$\bar{a}_1 = 4\bar{b}_1 - \bar{b}_2$; $\bar{a}_2 = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3$; $\bar{a}_3 = \bar{b}_2 - 2\bar{b}_3$

kolumnerna i $\underset{B \leftarrow A}{P}$ är basvektorerna $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$

givna i B - koordinater :

$$[\bar{x}]_B = \left[[\bar{a}_1]_B \; [\bar{a}_2]_B \; [\bar{a}_3]_B \right] [\bar{x}]_A$$

$$\therefore \underset{A \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(svar a)}$$

b) $$[\bar{x}]_A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7. $\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\bar{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Finn $\underset{C \leftarrow B}{P}$ och $\underset{B \leftarrow C}{P}$

Det går att använda något olika metoder:

metod

radreducera $[\bar{c}_1 \; \bar{c}_2 \; \bar{b}_1 \; \bar{b}_2]$ till $[I \; \underset{C \leftarrow B}{P}]$ (a)

och $[\bar{b}_1 \; \bar{b}_2 \; \bar{c}_1 \; \bar{c}_2]$ till $[I \; \underset{B \leftarrow C}{P}]$

eller beräkna $\underset{B \leftarrow C}{P} = P_C^{-1} P_B$ (b)

~~eller beräkna~~ $\cancel{\underset{B \leftarrow C}{P} = P}$

eller beräkna $\underset{B \leftarrow C}{P} = \underset{C \leftarrow B}{P}^{-1}$ efter första steget i (a) (c)

Ö8 (5)

Lay 4.6

7. metod (c)

$$[\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \bar{b}_1\ \bar{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -3 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{så} \quad \underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B \leftarrow C}{P} = \underset{C \leftarrow B}{P}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B \leftarrow C}{P} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

13. Jävligt!

Lay 4.8 1.

Verifiera att $\{2^k\}$ och $\{(-4)^k\}$ är

lösningar till $y_{k+2} + 2y_{k+1} - 8y_k = 0$.

Sätt in dem i ekvationen:

2^k : $2^{k+2} + 2 \cdot 2^{k+1} - 8 \cdot 2^k =$

$= 2^k(2^2 + 2 \cdot 2 - 8) = 2^k \cdot (4+4-8) = 0$ v.s.b.

$(-4)^k$: $(-4)^{k+2} + 2 \cdot (-4)^{k+1} - 8 \cdot (-4)^k =$

$= (-4)^k((-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8) =$

$= (-4)^k(16 - 8 - 8) = 0$ v.s.b.

Ö8 Lay 4.8

(6) 3. Visa att $\{\{2^k\},\{(-4)^k\}\}$ är en

bas för lösningsmängden till $y_{k+2}+2y_{k+1}-8y_k=0$.

Vi behöver visa dels att de båda vektorerna i S

är linjärt oberoende, dels att lösningsmängden

har dimensionen 2.

- Vektorerna är linjärt oberoende eftersom de inte är proportionella: det finns ingen skalär c sådan att $2^k = c(-4)^k$ för alla k. $k=0$ ger $c=1$ men $k=1$: $2 \neq -4$ osv.

- Enligt kap 4, teorem 20 är lösningsmängden till $y_{k+2}+2y_{k+1}-8y_k=0$ tvådimensionell, alltså är de två vektorerna en bas för lösningsmängden.

Beviset för teorem 20 fungerar i det specifika fallet såhär: om y_0 och y_1 är givna ger ekvationen $y_2 = 8y_0 - 2y_1$

och generellt rekursivt för $k>1$: $y_k = 8y_{k-2} + 2y_{k-1}$.

Alltså är hela $\{y_k\}$ entydigt och ett till ett motsvarande vektorn $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$ i R^2,

lösningsmängden har därför dimensionen 2 liksom R^2.