Ö5 2.5

(1) 2.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad A\bar{x} = \bar{b}$$

Faktorisera $A = LU$ och lös först $L\bar{y} = \bar{b}$.
Vi radreducerar A till trappstegsform och bokför multiplikatorerna så här:

L:

$$\begin{matrix} & & \\ -1 & & \\ 2 & 0 & \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} +1 \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lägg till ettor på diagonalen i L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$L\bar{y} = \bar{b}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} +1 \\ -2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \therefore \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$U\bar{x} = \bar{y}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} {+3} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2 \\ +1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ö5 2.5

(2) forts 2.

Lös också systemet utifrån $[A \; \bar{b}]$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ -4 & -5 & 7 & -4 \\ 8 & 6 & -8 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & +2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} +3 \\ -4 \end{matrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

L

-3

4 -1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} +1 \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L\bar{y} = \bar{b}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & +4 \end{bmatrix} \begin{matrix} +3 \\ -4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ö5 2.5

(3) $U\bar{x} = \bar{y}$:

forts (3.)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(8.) $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{-\frac{2}{3}}{\sim} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

L :

$+\frac{2}{3}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(12.) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ +3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -14 & 10 \end{bmatrix} +2$

L :

$\frac{1}{2}$

$-3 \quad -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(26.) nedan (3.5)

Ö 5
(3.5) 2.5 26.

$$A = P D P^{-1} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 = P D P^{-1} P D P^{-1} = P D^2 P^{-1}$$

$$A^3 = P D^2 P^{-1} P D P^{-1} = P D^3 P^{-1}$$

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

där $D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$, $D^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$

$$D^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^k} \end{bmatrix}$$

2.7 11.

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\varphi} & -\tan\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos\varphi} - \sin\varphi\tan\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ty $\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = \cos\varphi$

Ö5 2.6

(4) 1.

Konsumtion:

		Tillverkning	jordbruk	service
från:	T	0.1	0.6	0.6
	J	0.3	0.2	0
	S	0.3	0.1	0.1

Konsumtionsmatris:

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Jordbruk, 100 enheter,

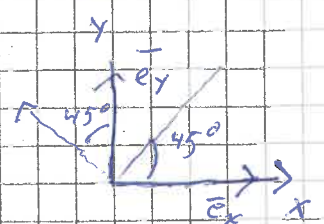
Det krävs $100 \cdot \bar{c}_2$ från de olika sektorerna,

alltså $\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$ enheter från $\begin{bmatrix} \text{tillverkning} \\ \text{jordbruk} \\ \text{service} \end{bmatrix}$

2.7

3. Translation $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3 \\ y+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotation. $\bar{a}_1$ är koordinaterna för bilden av $\bar{e}_x$

$\bar{a}_2$ är koordinaterna för bilden av $\bar{e}_y$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ö5 2.7

(5)

Den sammansatta avbildningen ges av

$$RT = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Att multiplicera två 2×2-matriser kräver bara ~~fyra multiplikationer~~ ~~två per rad~~ åtta multiplikationer, två per rad. Att däremot multiplicera en 2×2-matris med en 2×200 kräver 800 multiplikationer så det går snabbare att beräkna AB först, sedan (AB)D, vilket kräver 808 multiplikationer. Att beräkna BD först och sedan A(BD) kräver 1608 multiplikationer.

Ö5 2.7

(c) (10.)

Man inser nog geometriskt att D och R bör kommutera. Likaså att T och R inte kan kommutera, eftersom rotationen äger rum runt z-axeln kan det inte bli samma resultat med olika ordning.

Annars får man lov att beräkna matriserna för de sammansatta avbildningarna och kolla med matrismultiplikation om de kommuterar.

$$DT = \begin{bmatrix} s & 0 & sh \\ 0 & s & sk \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad TD = \begin{bmatrix} s & 0 & h \\ 0 & s & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så D och T kommuterar inte.

$$TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & h \\ \sin\varphi & \cos\varphi & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RT = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h\cos\varphi - k\sin\varphi \\ h\sin\varphi + k\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

kommuterar inte

etc.

(11.) nedan ovan (3.5

Ö5 2.8
(7)

5. $\bar{v}$ är en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ om och endast om

$$[\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3] \ \bar{x} = \bar{w} \text{ har en lösning.}$$

Gör radreduktioner i den utökade systemmatrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & -5 & 2 \\ -5 & 8 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

systemet är inkonsistent, så w ligger inte i underrummet

7. $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$

$\bar{p} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$, $A = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$

a) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ innehåller tre vektorer.

b) col A har oändligt många vektorer.

c) Vektorekvationen för att avgöra om $\bar{p}$ ligger i col A är

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Om vi inte ser någon lösning snabbt/direkt får vi ställa upp systemet $A\bar{x} = \bar{p}$ på det vanliga sättet.

ö5
(8) 2.8 7. c,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 6 \\ -8 & 8 & 6 & -10 \\ 6 & -7 & -7 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 14 \\ 6 & 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet är konsistent, alltså har $A\bar{x} = \bar{p}$ lösning och $\bar{p}$ ligger i Col A.

2.8 8. $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$,

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Om vi inte ser någon lösning direkt löser vi systemet med den utökade systemmatrisen

$$[A \ \bar{p}] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 14 \\ 6 & 3 & 3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet är konsistent, så $\bar{p}$ ligger i Col A

2.8 15.

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är inte proportionella, de är alltså linjärt oberoende.

Två linjärt oberoende vektorer i R^2 spänner upp R

Ö5
(9) alltså är $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en möjlig bas i R^2.

16. $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Här är $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ linjärt beroende:

$\bar{v}_1 = -2\bar{v}_1$, så de duger inte som bas.

2.8 32.

$$A = \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \end{array} = B$$

pivotkolumner. Pivotkolumner

I den reducerade matrisen* är det lätt att se att kolumn 1 och kolumn 3 är linjärt oberoende, medan kolumn 2 och kolumn 4 kan skrivas som linjärkombinationer av kolumn 1 och 2:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{5}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Radoperationerna påverkar inte det linjära beroendet mellan kolumnerna, så pivotkolumnerna

Ö5 (10)

forts 2.8 32.

i A är en bas i Col A.

Vi kan verifiera detta:

$$-3\bar{a}_1 = -3\begin{bmatrix}-3\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\-6\\-9\end{bmatrix} = \bar{a}_2 .$$

$$\frac{3}{2}\bar{a}_1 + \frac{5}{4}\bar{a}_3 = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}-3\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{5}{4}\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\8\\2\end{bmatrix} = \bar{a}_4$$

$\therefore$ $\{\bar{a}_1, \bar{a}_3\} = \left\{\begin{bmatrix}-3\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}\right\}$ är en bas i Col A.

Generellt: pivotkolumnerna i A är en bas i Col A.

Lösningsmängden för $A\bar{x} = \bar{0}$ utgör nollrummet för A.

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 3/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Av den reducerade trappstegsformen framgår att lösningen för det homogena ekvationssystemet är

$x_1 = 3x_2 - \frac{3}{2}x_4$

x_2 fri

$x_3 = -5/4\, x_4$

x_4 fri

$$\therefore \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}-3/2\\0\\-5/4\\1\end{bmatrix}$$

Ö5

(II) En bas för Nul A är alltså

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -5/4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

%. 2.8 3Z. ok

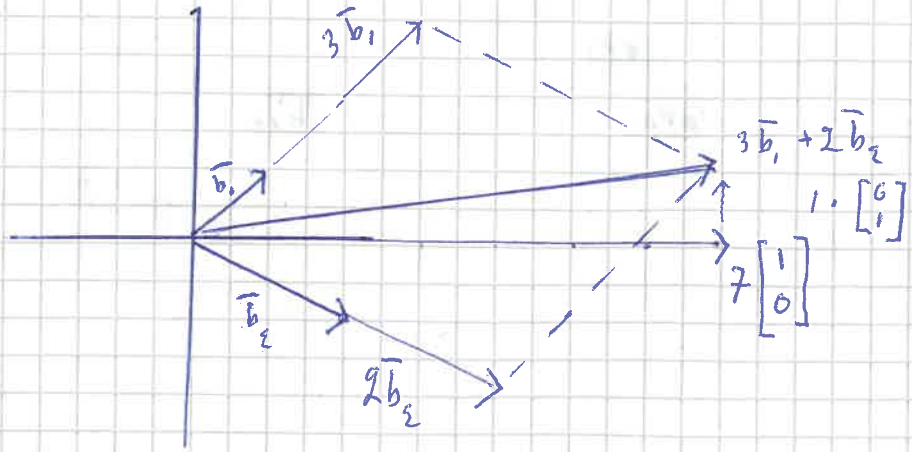
2.9

1. bas $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

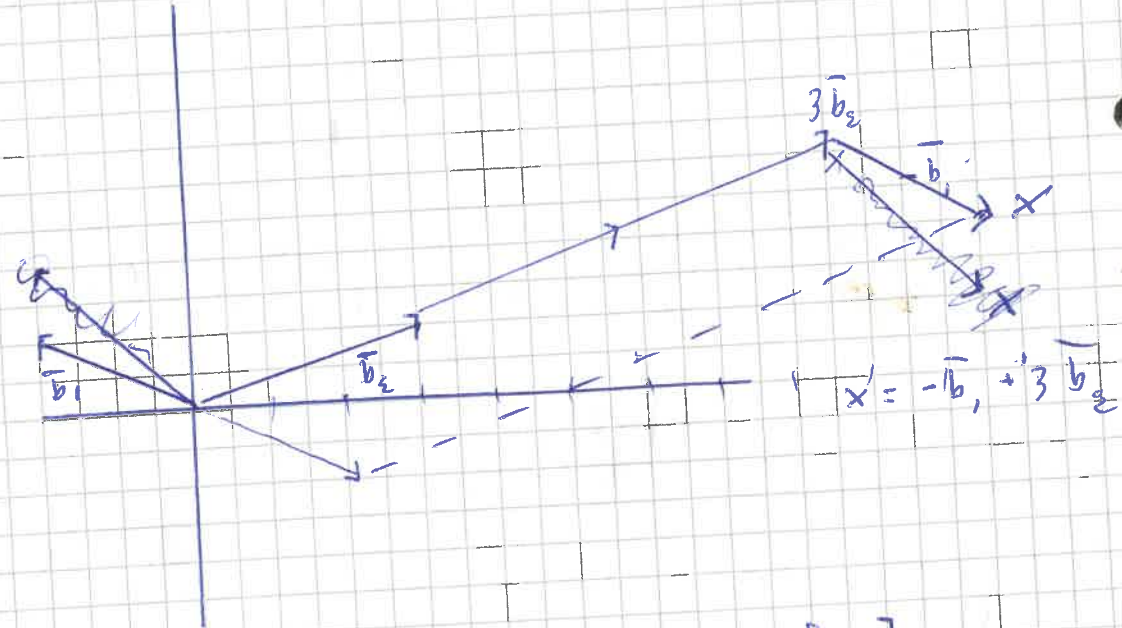
~~2~~



ö5 (12) 2.9 2.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$



4. $\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \end{bmatrix}$

Pröva först att se lösningen direkt, x ska vara en linjärkombination av $\bar{b}_1$ och $\bar{b}_2$.
Om det är för svårt, lös systemet

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \sim$$

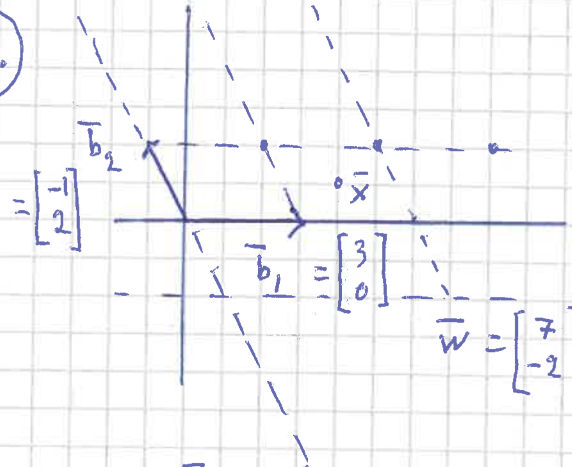
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Koll: $4 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 12 \\ -12 + 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \end{bmatrix}$

Ö5

(13.) 7.



$\bar x \approx \cancel{\tfrac{4}{3}}\ 1.5\,\bar b_1 + 0.5\,\bar b_2$

$\bar w = \begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix} = 2\bar b_1 - \bar b_2$

$$\begin{bmatrix}\bar b_1 & \bar b_2 & \bar x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & 1/2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 3/2\\ 0 & 1 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$x = \frac{3}{2}\bar b_1 + \frac{1}{2}\bar b_2$$

$$\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 7\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}3 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$x = 2\bar b_1 - \bar b_2$$

9.

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & -4\\ -3 & 9 & -1 & 5\\ 2 & -6 & 4 & -3\\ -4 & 12 & 2 & 7\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 5 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

pivotkolumner   Pivotkolumner

Pivotkolumnerna i A utgör en bas för Col A

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\5\\-3\\7\end{bmatrix}\right\}$$

$x_1 = +3x_2$
$x_2 = x_2$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$

$\bar x = x_2\begin{bmatrix}3\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

För att finna basen för Nul A måste det homogena systemet lösas helt:

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & -34/5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

dim Col A = 3

dim Nul A = 1