IX1303 Tentamen 2020 05 25, Del 2: räknetal

1. För vilka värden på konstanterna p och q är matrisen A nedan inte inverterbar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & q \\ 1 & 2 & 3 \\ p & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisen är inte inverterbar om (t ex) determinanten är noll, $detA = 0$.

$$detA = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot p + q \cdot 1 \cdot 0 - p \cdot 2 \cdot q - 0 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 =$$

$$= p(6 - 2q) = 0$$

<u>Svar:</u> A är inverterbar om $p = 0$ och/eller $q = 3$.

2. Vid en otrevlig olycka i Schweiz en gång i tiden, spreds 100 kg giftigt cesium ut i sjön Sils. Sils är förbunden via floden Inn med Silvaplana-sjön, som i sin tur är anknuten till St Moritzsjön. Cesiumet spred sig med tiden i detta system och tillståndet (mängden i kg av cesium) i var och en av sjöarna efter t veckor kunde beskrivas med tillståndsvektorn

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Mängden kg cesium i sjön Sils, som funktion av tiden, ges alltså av $x_1(t)$, i Silvaplana av $x_2(t)$ och i St Moritzsjön av $x_3(t)$. Förändringen per vecka kunde då bestämmas genom ekvationen

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{x}(t)A, \text{ där matrisen } A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Bestäm egenvärden, λ_i, och egenvektorer, $\boldsymbol{v}_i$, för matrisen A (2p) och bestäm ett slutet uttryck för $\boldsymbol{x}(t)$ enligt $\boldsymbol{x}(t) = \sum_i \ c_i \lambda_i^t \boldsymbol{v_i}$ (2p).

Exempel på ett dynamiskt system där $\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{x}(t)A$ eller $\boldsymbol{x}(t) = A^t \boldsymbol{x}(0)$, där $\boldsymbol{x}(0)$ är startvektorn.

Egenvärden fås direkt från diagonalelementen i den triangulära matrisen A: $\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.6$ och $\lambda_3 = 0.8$.

Egenvektorer fås ur nollrummet till matrisen $(A - \lambda_i I)$ för de olika egenvärdena.

λ_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{pmatrix}$. Välj $x_1 = 1$ så erhålls egenvektorn $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

λ_2: $\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_3 = -x_2 \end{pmatrix}$. Välj $x_2 = -1$ så erhålls egenvektorn $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

λ_3: $\begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}$. Välj $x_3 = 1$ så erhålls egenvektorn $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Kolla genom sambandet $AP = PD$!

Sluten form: $\boldsymbol{x}(t) = c_1\lambda_1^t\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^t\boldsymbol{v}_2 + c_3\lambda_3^t\boldsymbol{v}_3$

Startvektorn ges av $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dvs vid tiden $t = 0$ finns 100 kg cesium i sjön Sils och inget i de andra sjöarna. Detta ger oss sambandet $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, eller på matrisform (utökad koefficientmatris): $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{pmatrix}$, dvs $c_1 = c_2 = c_3 = 100$.

<u>Svar:</u> Egenvärden är $\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.6$ och $\lambda_3 = 0.8$ och tillhörande egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sambandet kan skrivas $\boldsymbol{x}(t) = 100\left[0.7^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0.6^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.8^t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

3. Funktionerna f och g tillhör det linjära rummet av kontinuerliga funktioner i det slutna intervallet $[a, b]$, $C[a, b]$. Låt $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ utgöra en ON-bas till underrummet W av ett inre produktrum V, då gäller för alla i V

$$proj_W f = \langle g_1, f\rangle g_1 + \langle g_2, f\rangle g_2 + \cdots + \langle g_n, f\rangle g_n$$

Bestäm utgående från denna sats den linjära funktion på formen $g(t) = a + bt$, tillhörande rummet $\mathbb{P}_1$, som utgör den bästa minsta kvadratanpassningen av funktionen $f(t) = e^t$ i intervallet -1 till 1. (4p)

Ledning: från analyskursen vet vi att $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$

Standardbasen till rummet av polynom av graden n utgörs av $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Det betyder att dessa polynom är ortogonala, men man måste normalisera, dvs dividera med normen (”längden”), för att få ON-basen. För $\mathbb{P}_1$ är (den icke normerade) basen $\{1, t\}$.

Normen för en funktion f ges av $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$, där den inre produkten ges av $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2 dt$.

Här fås alltså $\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1dt} = \sqrt{2}$ och $\|t\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt} = \sqrt{2/3}$. En ON-bas till $\mathbb{P}_1$ är således $\{g_1, g_2\} = \left\{1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}\, t\right\}$.

Den bästa minsta kvadratanpassningen utgörs av $proj_W f$. Enligt den givna satsen ovan blir detta $proj_W f = \langle g_1, f\rangle g_1 + \langle g_{2,} f\rangle g_2$

Insättning ger nu $proj_W f = \langle 1/\sqrt{2}, e^t\rangle\, 1/\sqrt{2} + \langle \sqrt{3/2}\, t, e^t\rangle \sqrt{3/2}\, t =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^t dt + \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} te^t dt = \cdots = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1}t$$

<u>Svar:</u> Den räta linjen $g(t) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1}t$ är den bästa minsta kvadratanpassningen till $f(t) = e^t$ i intervallet $[-1,1]$.