KTH
School of EECS

Tentamen i Algebra och Geometri, IX1303, 6 hsp

Torsdag 2022-06-02

Tentamen ges kl 08.00 - 13.00 i salarna: Ka-203, Ka-204 och Ka-205. Tentamen ges för studentgrupperna TIDAB1, TIEDB1, TITEH2-TIDB, TITEH2-TIED.

Hjälpmedel: Endast skrivhjälpmedel som penna, papper och linjal.

Provet består av åtta uppgifter (1-8) som var och en kan ge upp till fyra poäng. Svaren får ges på engelska.

Skriv tydligt, motivera dina olika steg, gärna med en figur, och formulera ett svar till varje uppgift. *Avdrag ges för svårläst och illa motiverad lösning*, även om svaret är rätt!!

Preliminära betygsgränser:

<16 poäng	F, Fx
$16 \leq$ poäng < 19	E
$19 \leq$ poäng < 23	D
$23 \leq$ poäng < 26	C
$26 \leq$ poäng < 29	B
≥ 29 poäng	A

Examinator: Anders Hallén, tel 08-7904358, e-mail: ahallen@kth.se

1. Bestäm möjliga värden på x och y ur ekvationssystem nedan genom att ansätta en matrisekvation och lösa denna med hjälp av radreduktion.

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ 3y^2 - xy + 2x^2 = 13 \\ 3xy + x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Systemet skrivs om till ett nytt system, där variablerna ges av $x_1 = x^2$, $x_2 = xy$ och $x_3 = y^2$ och reduceras:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alltså blir $x^2 = 4$ och $y^2 = 1$, eller $x = \pm 2$ och $y = \pm 1$. Men då $xy = -2$, måste de enda lösningarna vara $(x, y) = (2, -1)$ eller $(x, y) = (-2,1)$.

<u>Svar:</u> $(2, -1)$ eller $(-2,1)$.

2. Bestäm en ekvation på skalär form till planet som innehåller de tre punkterna $(1,3,-2)$, $(1,1,5)$ och $(2,-2,3)$.

Två vektorer i planet ges då t ex av $\boldsymbol{u} = (0,-2,7)$ och $\boldsymbol{v} = (1,-5,5)$, mellan första och andra, respektive första och tredje punkten. Kryssprodukten ger då en normalvektor till planet:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (25,7,2)$$

Planets ekvation på skalär form ges av $Ax + By + Cz = D$. Insättning av normalvektorn och t ex den första punkten ger $25(x-1) + 7(y-3) + 2(z+2) = 0$, eller $25x + 7y + 2z = 42$.

<u>Svar:</u> Planets ekvation blir $25x + 7y + 2z = 42$.

3. Bestäm en egenbas till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Egenvärden ur $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

PQ-formeln ger egenvärdena $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer

λ_1: $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sätt $x_2 = 5$ ger vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

λ_2: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, sätt $x_2 = 1$ ger vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Svar:</u> En egenbas är $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Anpassa ett andragradspolynom till följande tre mätvärden, (-1,1), (0,1), (1,2), genom att göra en minsta kvadratanpassning med hjälp av normalekvationen $\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$. Uppskatta också felet i denna approximation.

Andragradspolynom har formen $y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$.

De givna mätvärdena ger då matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ och vektorn $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Beräkna $(A^T A)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

Beräkna $A^T b = \cdots = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Så blir $\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Felet ges av $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 0$

<u>Svar:</u> Punkterna anpassas exakt till ekvationen $y(t) = 1 + {}^{t}/_{2} + {}^{t^2}/_{2}$. (Felet blir 0.)

5. En övergångsmatris $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$ beskriver ett stokastiskt system, där startvektorn ges av $\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ och beskriver procentuella andelen av leoparder och lejon i en del av Serengeti vid en viss månad. Ge en formel för hur populationerna av dessa kattdjur utvecklas och ange speciellt vad som händer med populationerna efter ett antal år.

Börja med att lösa karakteristiska ekvationen

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 0.4 - \lambda & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.1 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.1)$$

$det(A - \lambda I) = 0$ ger egenvärdena $\lambda_{1,2} = 1$ och 0.1.

Sedan bestäms egenvektorer ur $Nul(A - \lambda I)$.

För $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 \\ 0.6 & -0.3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} x_2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

För $\lambda_2 = 0.1$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Startvektorn ger ett villkor för att lösa ut konstanterna i formeln:

$$\boldsymbol{x_0} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/3 \\ c_2 = 1/6 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> Populationerna efter k månader blir $\boldsymbol{x_k} = {}^1\!/_3\, 1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + {}^1\!/_6\, 0.1^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och efter många månader inställer sig jämvikten $\boldsymbol{x}_\infty = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, alltså 1/3 leoparder och 2/3 lejon.

6. Inre produkten för rummet $\mathbb{P}_3$ definieras av $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Visa att funktionerna $f(t) = 5t - 3$ och $g(t) = t^3 - t^2$ är ortogonala och normalisera sedan funktionerna.

Beräkna $\langle f, g \rangle = \int_0^1 (5t-3)(t^3-t^2)dt = \int_0^1 (5t^4 - 8t^3 + 3t^2)dt = 0$, vilket visar att f och g är ortogonala.

Normen: $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left[\int_0^1 (5t-3)(5t-3)dt\right]^{1/2} = \sqrt{7/3}$

$\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \left[\int_0^1 (t^3-t^2)^2 dt\right]^{1/2} = 1/\sqrt{105}$

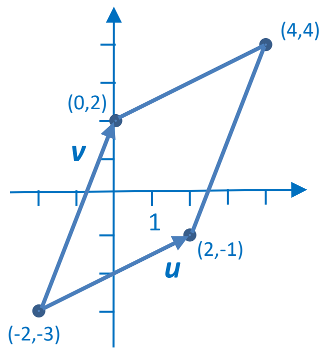
<u>Svar:</u> Normaliserade funktionerna blir $\frac{f}{\|f\|} = \frac{5t-3}{\sqrt{7/3}}$ och $\frac{g}{\|g\|} = \sqrt{105}(t^3 - t^2)$

7. Beräkna ytan av parallellogrammet som har hörn i punkterna (-2,-3), (2,-1), (4,4) och (0,2). Ett parallellogram är en fyrhörning vars motstående sidor är parallella och lika långa.

Ytan kan då beräknas genom $|det\ A|$ där matrisen A ges av vektorerna $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$|detA| = \left| det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right| = 16$$

(Ytan kan förstås också bestämmas med hjälp av kryssprodukt, som i uppgift 2, där $\boldsymbol{v_z} = \boldsymbol{u_z} = 0$.)



<u>Svar:</u> Ytan är 16 areaenheter.

8. Bestäm matrisen X i matrisekvationen $2I + XA = B$, där I är identitetsmatrisen och matriserna A och B ges av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lös först ut matrisen X: $2I + XA = B \Leftrightarrow X = (B - 2I)A^{-1}$.

Beräkna sedan $B - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}: \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/2 & -7/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -7/2 & -3/2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = {}^1\!/_2 \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} {}^1\!/_2 \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$