Ö ~~[illegible]~~ Lay 2.1

(1) (2.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(P)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 7 & -2\cdot 5 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & -2\cdot 4 & -2\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -10 & 3 \\ 6 & -11 & -4 \end{bmatrix}$$

(addition sker elementvis)

$3C - E$ är inte definierad, eftersom C är 2×2 medan E är 2×1

CB Antalet kolumner i C måste vara detsamma som antalet rader i B.

Det stämmer här, så produkten är definierad. Vi kan utföra multiplikation med rad-kolumnregeln

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7+2 & -5-8 & 1-6 \\ -14+1 & +10-4 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -13 & -5 \\ -13 & +6 & -5 \end{bmatrix}$$

EB är inte definierad eftersom E är 2×1 och B är 2×3. För att $A_1 A_2$ ska vara definierad måste antalet kolumner i A_1 vara lika med antalet rader i A_2.

Ö5 (2) Lay 2.1

4.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -8 & 7 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 9-5 & -1 & 3 \\ -8 & 7-5 & -3 \\ -4 & 1 & 8-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5 I_3 A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -8 & 7 & -3 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9\cdot 5 & -5 & 3\cdot 5 \\ -8\cdot 5 & 7\cdot 5 & -3\cdot 5 \\ -4\cdot 5 & 5 & 8\cdot 5 \end{bmatrix}$$ om vi använder rad-kolumnformeln.

Enklare är dock att konstatera att $I_3 A = A$ så att $5 I_3 A = 5A = \begin{bmatrix} 45 & -5 & 15 \\ -40 & 35 & -15 \\ -20 & 5 & 40 \end{bmatrix}$

Detta är ett exempel på den associativa lagen $(5 I_3) A = 5 (I_3 A)$.

11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vi kan använda Lays definition av matrisprodukten:

$$AD = \left[A\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\; A\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \;\; A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right] =$$

P

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 15 \\ 2 & 12 & 25 \end{bmatrix}$$ AD multiplicerar varje kolumn i A med motsvarande diagonalelement i D.

$$DA = \left[D\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; D\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \;\; D\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 20 & 25 \end{bmatrix}$$ DA multiplicerar varje rad i A med motsvarande diagonalelement.

Ö 4 Lay 2.1

(3) Med ledning av det föregående resultatet och (4.) är det klart att $B = rI_3$ uppfyller kravet, eftersom $ArI_3 = rAI_3 = rA$ samt $rI_3A = rA$.

(25.) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

$AB = [A\bar{b}_1 \quad A\bar{b}_2 \quad A\bar{b}_3]$.

Det gäller alltså att $A\bar{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $A\bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Vi kan beräkna $\bar{b}_1$ och $\bar{b}_2$ genom att lösa de två systemen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$ samt

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 8 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \therefore \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ö4 Lay 2.1
(4)

35. $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\bar{u}^T \bar{v} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -2a + 3b - 4c$$

$$\bar{v}^T \bar{u} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = -2a + 3b - 4c = \bar{u}^T \bar{v}$$

$$\bar{u}\bar{v}^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \\ -4a & -4b & -4c \end{bmatrix}$$

$3 \times 1 \qquad 1 \times 3 \qquad 3 \times 3$

$$\bar{v}\bar{u}^T = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & 3a & -4a \\ -2b & 3b & -4b \\ -2c & 3c & -4c \end{bmatrix}$$

Lay 2.2

3. Finn inversen till $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

Samma radoperationer som överför A till I_2 överför I_2 till A^{-1}. Vi kan alltså beräkna inversen genom elementära radoperationer på $[A \;\; I_2]$:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{+\frac{7}{8}}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Ö4 Lay 2.2

(5) 4. Finn inversen till $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

Samma elementära radoperationer som överför en matris ~~A~~ till I överför I till A^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{4}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{21} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}_{\text{ok}} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{21}{6} & \frac{21}{14} \end{bmatrix} \underset{\text{ok}}{\overset{\frac{2}{3}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{36}{18} & \frac{42}{42} \\ 0 & 1 & -\frac{21}{6} & \frac{21}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\cancel{9}}{9} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{21}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\cancel{9}}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\cancel{9}}{\cancel{3}} & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} =$$

Koll:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

30. A, B, X är $n \times n$.

A, X och $(A - AX)$ är inverterbara

Det är också givet att $(A - AX)^{-1} = X^{-1}B$. (3)

multiplicera från vänster med X:

$X(A - AX)^{-1} = XX^{-1}B = B$.

a) Eftersom B är produkten av två inverterbara matrisen är B också inverterbar.

b) Invertera båda sidor: $A - AX = (X^{-1}B)^{-1} = B^{-1}X$

$\therefore (A + B^{-1})X = A$. $X = (A + B^{-1})A$

Ö4 2.2

(6) 35. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Visa att om $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0$
så har $A\bar{x} = 0$ mer än en lösning.

I så fall är A inte inverterbar. Detta inses
t.ex av att om A är inverterbar $\exists A^{-1} : \bar{x} = A^{-1}\bar{0} = \bar{0}$
men det är bara en lösning (den triviala).

Först fallet $a = b = 0$. $ad - bc = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \bar{x} = 0 \Rightarrow cx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{d}{c} x_2$

En fri variabel! många lösningar.

36. Visa att om $\det A \neq 0$ så stämmer
formeln $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & bd - bd \\ ac - ac & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$

$\therefore \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - cd & -bc + ad \end{bmatrix} = (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a, b ej båda 0. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ab + ba \\ -cd + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ ad - bc \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ac & bc & -bc \\ 0 & ad - bc & ac + bc \end{bmatrix}$ unik lösning om $ad - bc \neq 0$

Ö4 (7)   2.3

1. $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ kolumnvektorerna är linjärt oberoende, så inverterbar.

4. Är $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ inverterbar?

Vi vet t.ex. att den inte är inverterbar om kolumnerna är linjärt beroende. Det är de eftersom en av vektorerna är nollvektorn.

3. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

matrisen har tre pivotpositioner, $A\bar{x} = \bar{b}$ har unik lösning för varje $\bar{b}$ och A är inverterbar.

21. När är en övertriangulär matris inverterbar?

$\begin{bmatrix} ■ & * & * & * \\ 0 & ■ & * & * \\ 0 & 0 & ■ & * \\ 0 & 0 & 0 & ■ \end{bmatrix}$ om diagonalelementen alla är $\neq 0$ visar trappstegsformen att den har pivotelement i alla rader, $A\bar{x} = \bar{b}$ har unik lösning för alla $\bar{b}$.

men så är inte fallet om något diagonalelement $= 0$, då blir det en fri variabel, lösningen är inte unik och matrisen inte inverterbar. Om något diagonalelement är $\neq 0$ är också $\det A = 0$.

Ö4 2.3
(8)

44.

T är en linjär avbildning från R^n på R^n. Det betyder att kolumnerna i motsvarande matris spänner upp R^n. För att göra det måste de också vara linjärt oberoende etc. Alltså är A inverterbar och $T^{-1}: \bar{x} \to A^{-1}\bar{x}$ existerar och avbildningen är ett till ett.

2.4 10.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ A & B & I \end{bmatrix} \text{ har inversen } \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ Z & I & 0 \\ X & Y & I \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ A & B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ Z & I & 0 \\ X & Y & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} II & 0 & 0 \\ CI + IZ & II & 0 \\ A + BZ + IX & B + IY & II \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C+Z & I & 0 \\ A+BZ+X & B+Y & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Detta ger:

$$\begin{aligned} C + Z &= 0 \\ A + BZ + X &= 0 \\ B + Y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\underline{Z} = -C \\ &\underline{Y} = -B \\ &A + BZ + X = 0 \Rightarrow \underline{X} = -A - BZ \\ &\qquad = -A + BC \end{aligned}$$

04 2.4

(9) 23.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & -A \end{bmatrix}$

$M^2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$