1 Linjen kan även skrivas

$$t = x-2 = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = t \\ \frac{y+3}{2} = t \\ \frac{z-1}{4} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t-3 \\ z = 4t+1 \end{cases}$$

eller i vektor form

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\text{riktningsvekt. } \bar{d}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{punkt på linjen } \bar{p}_o}$$

En normal $\bar{n}$ kan identifieras från planets ekvation $2y - z = 1$ $\quad \bar{n} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

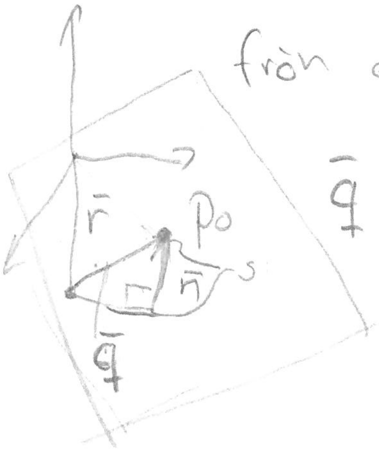
Planet och linjen är parallella om riktnings vektorn och normal vektorn är vinkelräta

$$\Rightarrow \bar{n} \circ \bar{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0 \qquad \bar{n} \circ \bar{d} = \underset{\neq 0}{|\bar{n}|}\underset{\neq 0}{|\bar{d}|} \cos\theta$$

$$\Rightarrow 0 = \cos\theta \Rightarrow \theta = \pm 90^\circ$$ d.v.s. planet och linjen är vinkelräta.

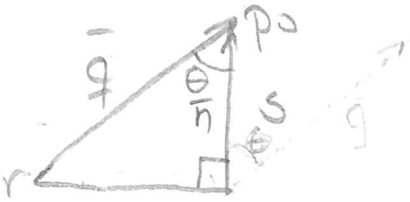
Avstånde är samma för alla punkter

För t.ex. punkten $p_o \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ som ligger på linjen från en annan punkt $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{r}$ i planet



$$\bar{q} = \overrightarrow{r p_o} = \bar{p}_o - \bar{r}_o \qquad (1)$$

q:s projektion på $\bar{n}$ är avståndet från planet till p_o längs normalen



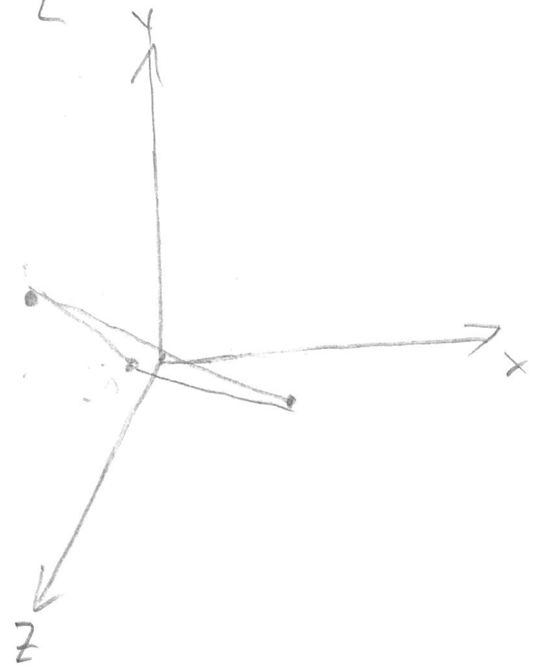
$s = \left|\dfrac{\bar q \cdot \bar n}{|\bar n|}\right|$ " $\bar q$ projektion längs $\bar n$ "

$$s = \left|\frac{\bar q \cdot \bar n}{|\bar n|}\right| \overset{(1)}{=} \left|\frac{(\bar p_0 - \bar r)\circ \bar n}{|\bar n|}\right| = \left|\frac{p_0 \circ \bar n - \bar r \circ \bar n}{|\bar n|}\right|$$

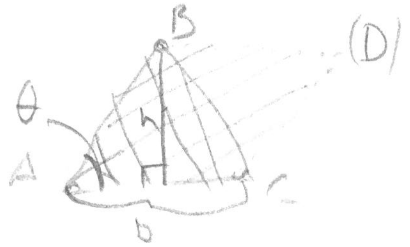
$$= \left|\frac{\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}}}\right| = \left|\frac{-7-(2y-z)}{\sqrt{5}}\right| =$$

$$= \left[\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \text{ är punkt i planet } 2y-z=1\right] = \left|\frac{-7-1}{\sqrt{5}}\right| = \underline{\underline{\frac{8}{\sqrt{5}}}}$$

2



I planet med de tre punkterna



$A = (1,2,3)$

$B = (-2,1,0)$

$C = (2,0,1)$

Arean för parallellogramet:

$$b \cdot h = |\vec{AC}||\vec{AB}| \cdot \sin\theta \overset{\text{def } \times \text{ produkt}}{=} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

Arean för triangeln $\frac{1}{2}$ arean för parallellgramet

$$\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \\ 2-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((2-6)\hat{e}_x + (-3-6)\hat{e}_y + (6+1)\hat{e}_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 9^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{146}$$

b Vinkeln θ kan beräknas direkt från skalär produkten:

$$\vec{AB} \circ \vec{AC} = |\vec{AB}||\vec{AC}| \cos\theta \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -3 + 2 + 6 = 5, \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$(1) \Rightarrow \quad 5 = \sqrt{19} \cdot 3 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{3\sqrt{19}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{3\sqrt{19}}\right) \approx 67{,}5^\circ$$

3 B och C är i trappstegsform

För A och D kan rad 2 reduceras d.v.s börja med 0 m.h.a rad 1.

B beskriver en homogent system där sista kolumnen är endast nollor.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3\cdot① \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & -11 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ konsistent system

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ konsistent system

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ konsistent system

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3\cdot① \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ ej konsistent

4

Skriver om $A\bar{x}=\bar{b}$ utökad system matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2\cdot ① \\ -1\cdot ① \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\times ② \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 \text{ fri} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{1-x_3}{2} \\ x_3 \text{ fri} \end{cases}$$

Detta beskriver en linje och för varje x_3 finns en lösning d.v.s ∞ antal lösningar.

5

$$x_4\, C_2H_5OH + x_3\, H_2O_2 \to x_2\, H_2O + x_1\, CO_2$$

neg eftersom högerled

$$\begin{array}{l} \text{Number} \quad C \\ O \\ H \end{array} \quad x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

utökad system matris

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times -1 \\ -2\times① \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \times -1 \\ -2\cdot② \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_3 + 12x_4 = 0 \\ x_4 \text{ fri} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = 12x_4 - 3x_4 = 9x_4 \\ x_3 = 6x_4 \\ x_4 \text{ fri} \end{cases}$$

lösning med lägsta heltal för $x_4 = 1$

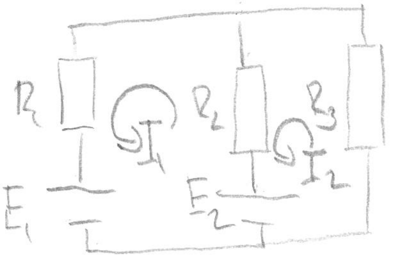
$x_4 = 1 \quad x_3 = 6 \quad x_2 = 9 \quad x_1 = 2$

$$C_2H_5OH + 6\, H_2O_2 \to 9\, H_2O + 2\, CO_2$$

Kontroll 2C 18H 13O i bägg leden

6

För "loop 1" i I_1 riktning



$$R_2I_1 + R_1I_1 - R_2I_2 = E_2 - E_1$$

För "loop 2" i I_2 riktning

$$R_3I_2 + R_2I_2 - R_2I_1 = -E_2$$

i matris form

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2-E_1 \\ -E_2 \end{bmatrix}$$

med $R_1 = R_2 = 1k\Omega$ $R_3 = 2k\Omega$ $E_1 = 6V$ $E_2 = 4V$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$ skrivet som en utökad matris

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} +\tfrac{1}{2}① \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3-\tfrac{1}{2} & -4-1 \end{bmatrix}$$

i ekvations form $\Leftrightarrow$

$$2I_1 - I_2 = -2$$

$$2{,}5 I_2 = -5$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} I_1 = -2 \\ I_2 = -2 \end{matrix}$$

Spänning över R_3: $R_3 \cdot I_2 = 4V$

kontroll: $4 - (-2+2) + 2 - 6 = 0$

$-(-4) + (-2+2) - 4 = 0$

7 $\bar{u}$ $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är linjärt beroende om en kan skrivas som summan av de övriga

$$x_1\bar{u} + x_2\bar{v} = \bar{w} \sim \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

eller som utökad system matris med siffror

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & h \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -①\cdot\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3}① \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & h \\ 0 & 1-\frac{4}{3} & 2-\frac{4}{3}h \\ 0 & 4-\frac{2}{3} & 1-\frac{2}{3}h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & h \\ 0 & -1/3 & 2-4/3h \\ 0 & \frac{10}{3} & 1-\frac{2}{3}h \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +10② \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & h \\ 0 & -1/3 & 2-4/3h \\ 0 & 0 & 1-\frac{2}{3}h+10-\frac{20}{3}h \end{bmatrix}$$

$*$

Om $* \neq 0$ så saknas lösningar

$0 = 11 - \frac{22}{3}h \Rightarrow \frac{22}{3}h = 11 \Leftrightarrow \underline{\underline{h}} = \frac{33}{22} = \underline{\underline{1{,}5}}$

Systemet blir $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 1{,}5 & x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}$

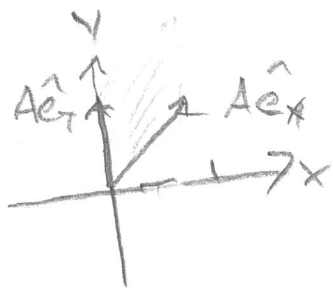
Test: $\frac{1}{2}\bar{u} = \bar{w}$ så det är en linjär kombination

8 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

a

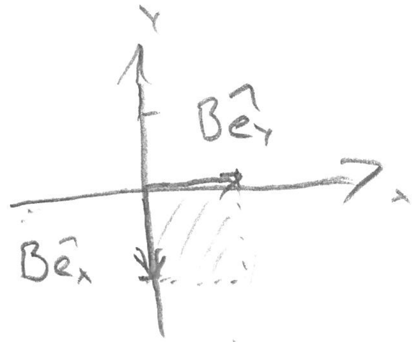
$$A\cdot\hat{e}_x=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$A\hat{e}_y=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$



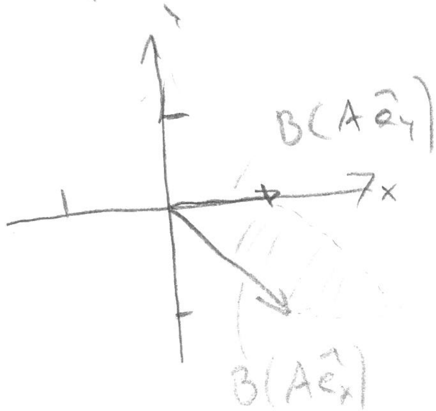
b $B\hat{e}_x=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$$B\hat{e}_y=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$



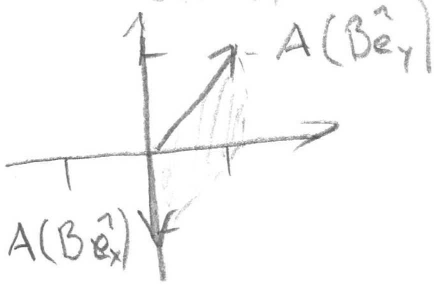
c $B(A\hat{e}_x)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$$B(A\hat{e}_y)=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$



d $A(B\hat{e}_x)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$$A(B\hat{e}_y)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$



e enligt c och d är de ej lika