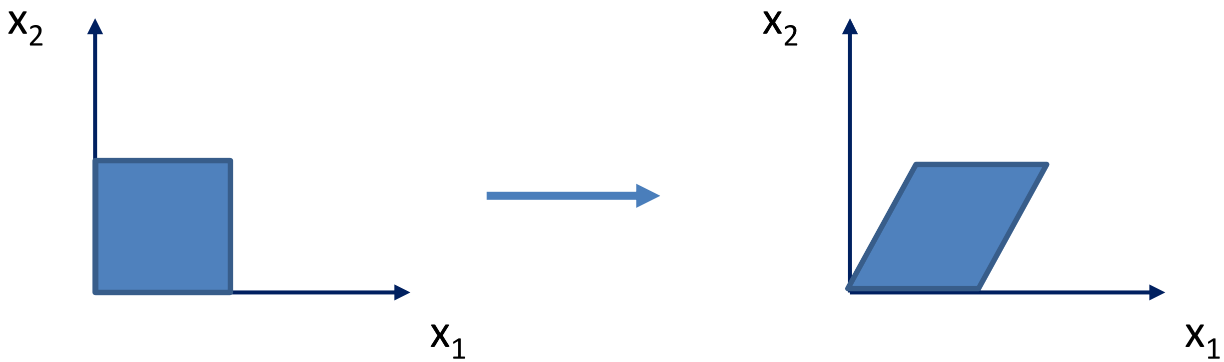
Matrisfaktorisering
Datorgrafik
Underrum,
dimension och baser

Matrisfaktorisering

Vi har sett exempel på linjära avbildningar, som kan representeras av matriser, t.ex. :

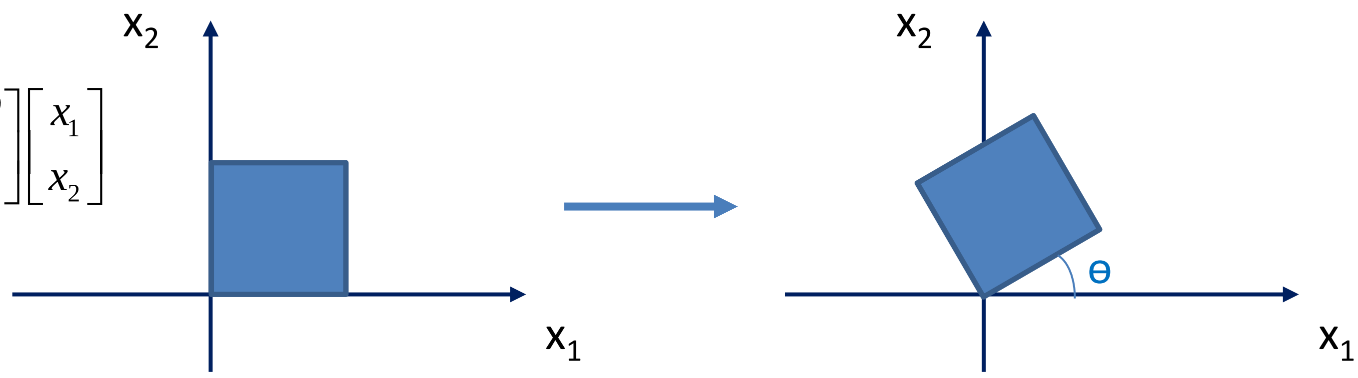
Skjuvning:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to S\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Rotation:

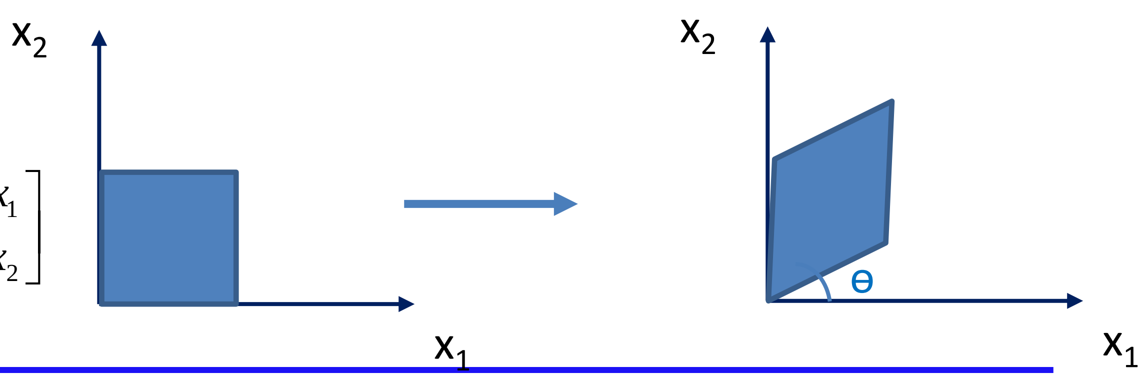
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to R\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



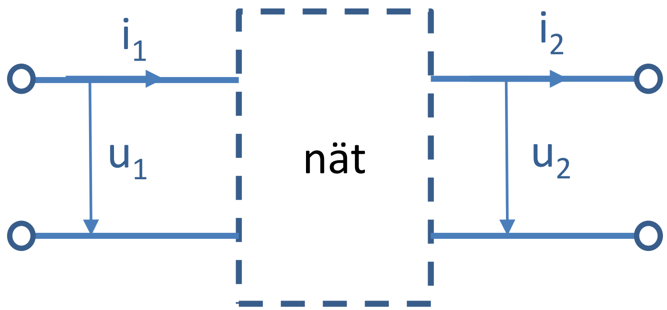
och de kan sammansättas med matrismultiplikation:

Skjuvning och rotation:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to RS\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & k\cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta & k\sin\theta + \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



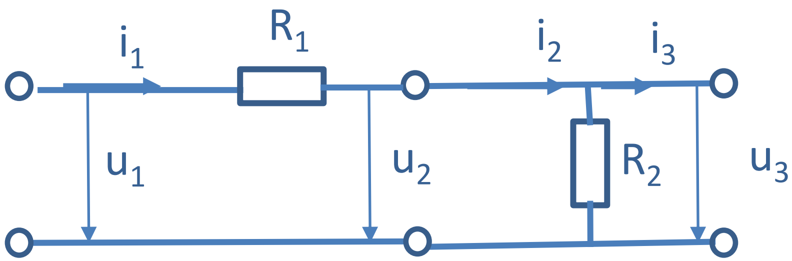
Matrisfaktorisering



Överföringsfunktion (överföringsmatris, "transfer matrix"):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Sammansatt överföringsfunktion:



Överföringsfunktion 1:

$$= \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Överföringsfunktion 2:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

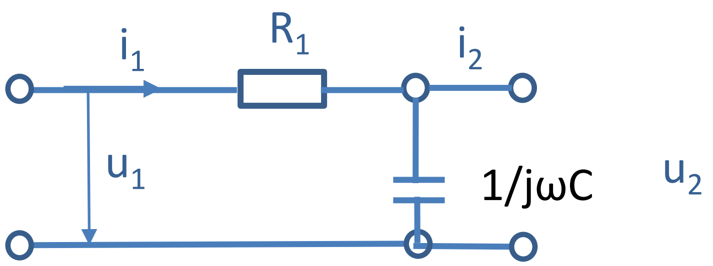
Matrismultiplikation:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Lay 2.5

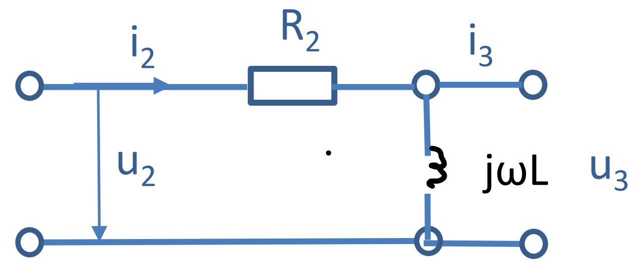
Matrisfaktorisering (*)

Lågpassfilter:



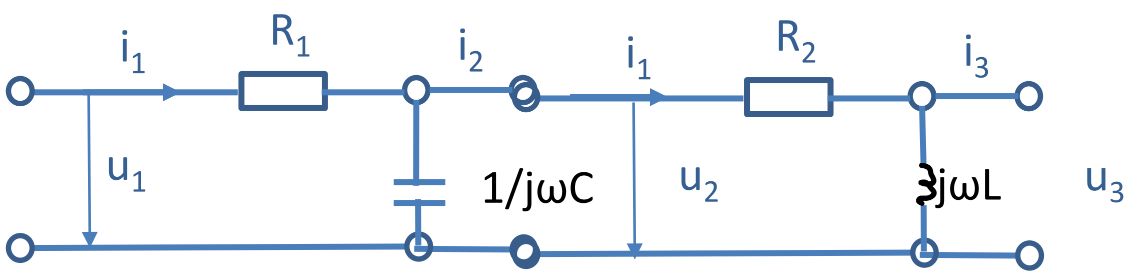
$\mathbf{x} \to B\mathbf{x}$

Högpassfilter:



$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$

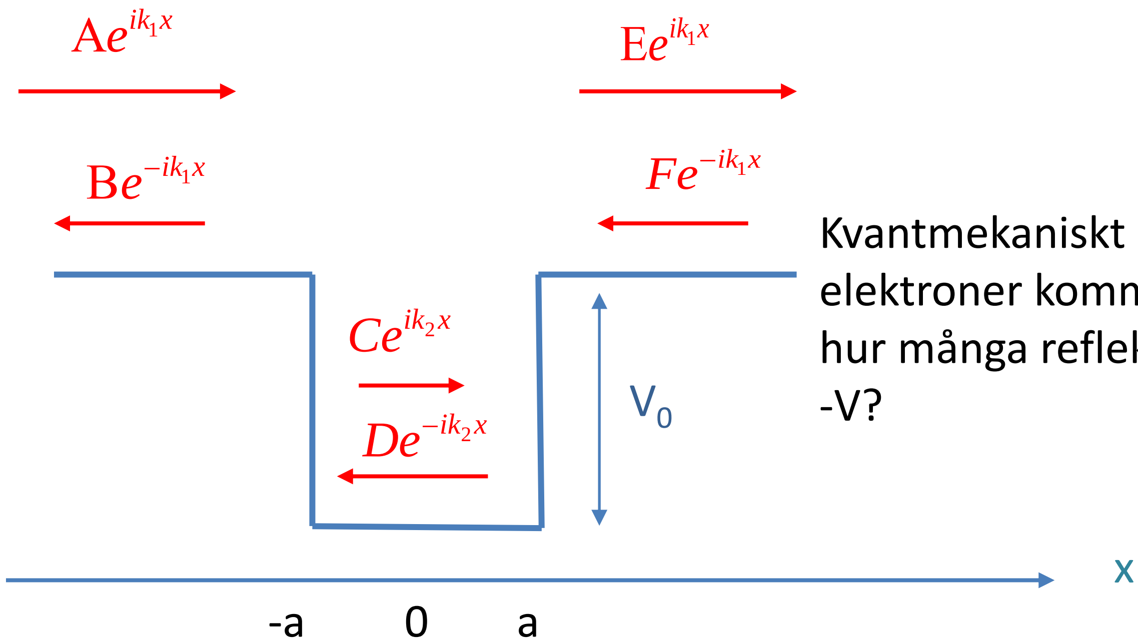
Sammansatt överföringsfunktion, bandpassfilter:



$\mathbf{x} \to AB\mathbf{x}$

(*) Bry er inte om detaljerna här, se på strukturen!

Matrisfaktorisering (*)



Kvantmekaniskt problem:
elektroner kommer in från vänster,
hur många reflekteras vid potentialbrunnen -V?

Randvillkor i –a och a: vågfunktionen och dess derivata ska vara kontinuerliga:

$$Ae^{-ik_1a} + Be^{ik_1a} = Ce^{-ik_2a} + De^{ik_2a} \qquad (1)$$

$$Ae^{-ik_1a} - Be^{ik_1a} = \frac{k_2}{k_1}Ce^{-ik_2a} - \frac{k_2}{k_1}De^{ik_2a} \qquad (2)$$

$$Ce^{ik_2a} + De^{-ik_2a} = \mathrm{E}e^{ik_1a} + Fe^{-ik_1a} \qquad (3)$$

$$Ce^{ik_2a} - De^{-ik_1a} = \frac{k_1}{k_2}Ee^{ik_1a} - \frac{k_1}{k_2}Fe^{-ik_1a} \qquad (4)$$

(*) Bry er inte om detaljerna här, se på strukturen!

Matrisfaktorisering (*)

Dessa randvillkor kan formuleras:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+\frac{k_2}{k_1})e^{i(k_1-k_2)a} & (1-\frac{k_2}{k_1})e^{i(k_1+k_2)a} \\ (1-\frac{k_2}{k_1})e^{-i(k_1+k_2)a} & (1+\frac{k_2}{k_1})e^{-i(k_1-k_2)a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

och:

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+\frac{k_1}{k_2})e^{i(k_1-k_2)a} & (1-\frac{k_1}{k_2})e^{-i(k_1+k_2)a} \\ (1-\frac{k_1}{k_2})e^{i(k_1+k_2)a} & (1+\frac{k_1}{k_2})e^{-i(k_1-k_2)a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

x

Alltså, efter matrismultiplikation:

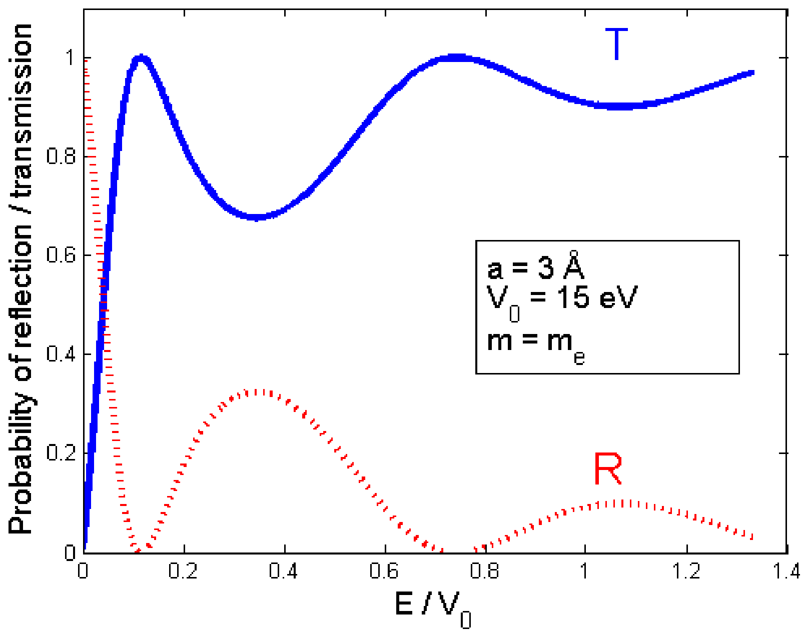
$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

Finessen här är att man kan lösa godtyckliga problem med steg i potentialen genom matrismultiplikation. Problemet är kvantmekaniskt, men helt analogt med t.ex, tunna skikt för antireflexbehandling och liknande i optiken, varje interface kan behandlas med en matris.

(*) Bry er inte om detaljerna här, se på strukturen!

Matrisfaktorisering (*)

Resultat::



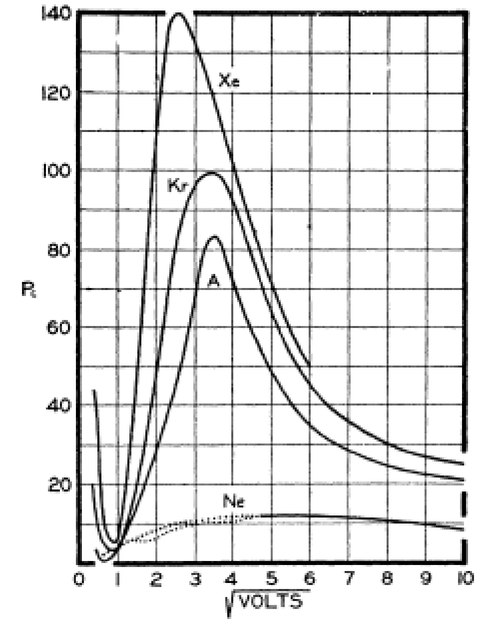


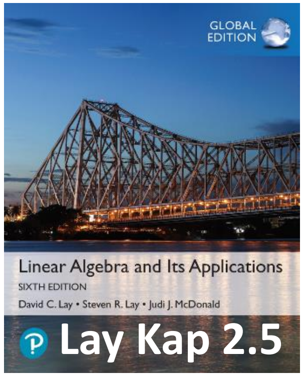
Fig. 8. Probability of collision in Ne, A, Kr and Xe.

Endimensionell modell.

Ramsauer 1920.

(*) Bry er inte om detaljerna här, se på strukturen!

Matrisfaktorisering



Ofta kan det vara fördelaktigt att dela upp matriser i faktorer:

$$A = A_1 A_2 \ldots\ldots A_p$$

Dels för att det faktiska problem som ett system A**x**=**b** tänks beskriva naturligt består av separata moduler som kan sammanfogas genom matrismultiplikation, men som kan t.ex. bytas ut eller modifieras separat.

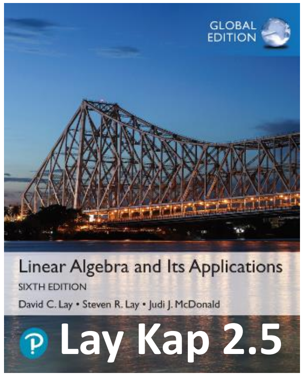
Dels för att det kan vara beräkningsmässigt fördelaktigt att göra sådana faktoriseringar.

Som ett exempel på en arbetsbesparande faktorisering ska vi studera s.k. LU-faktorisering (aka LR-faktorisering)

$$A=LU$$

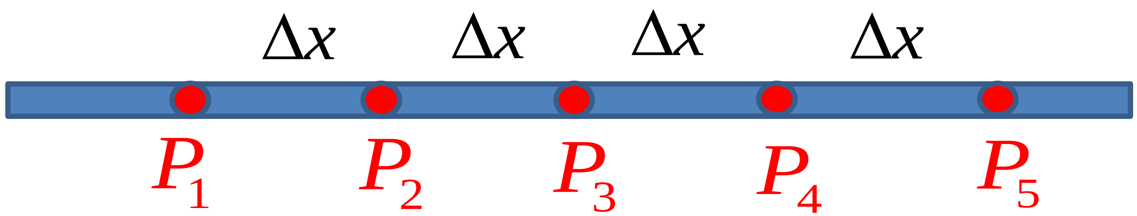
som är numeriskt fördelaktig när man har att lösa många ekvationssystem $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$, ... $A\mathbf{x}=\mathbf{b}_n$
med samma koefficientmatris A men olika högerled, om dessa högerled inte är givna från början utan beräknas rekursivt.

Matrisfaktorisering



$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 \ , A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \ , \ \ldots A\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$$

Exempel på ett problem när högerledet måste beräknas rekursivt: Lay 2.5 övning 32, transient värmeledning.



En vektor $\mathbf{T}_k$ i $\mathbb{R}^5$ får betekna temperaturerna i punkterna P_1-P_5 vid tiden $t=k\Delta t$.

Tidsutvecklingen bestäms av $A\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k$, med

$$A = \begin{bmatrix} 1+2C & -C & 0 & 0 & 0 \\ -C & 1+2C & -C & 0 & 0 \\ 0 & -C & 1+2C & -C & 0 \\ 0 & 0 & -C & 1+2C & -C \\ 0 & 0 & 0 & -C & 1+2C \end{bmatrix}$$

Detta är ett typiskt fall när LU-faktorisering lönar sig.

LU-faktorisering

Vi utgår från ett problem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där A är m x n.
LU-metoden delar upp en $m \times n$ matris A i en ”Lower” $m \times m$ och en ”Upper” triangulär $m \times n$ matris:

A=LU

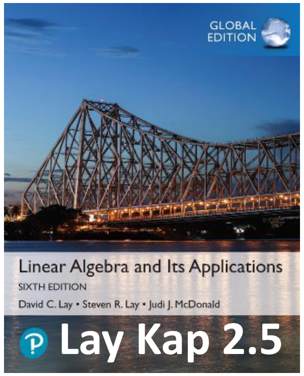
schematiskt t.ex. för A (4x5) med formen:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

L har alltså ettor som diagonalelement och nollor över diagonalen, medan U ska visa sig vara en trappstegsmatris som erhållits när A radreducerats på det vanliga sättet.

Hur får vi då fram lösningen **x**? Och hur ska då L och U beräknas?

LU-faktorisering



$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan efter uppdelningen A=LU lösas i två steg:

1) $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$
2) $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

Som visas med ett exempel i Lay är det mycket effektivare, när man väl funnit L och U.

Vi betraktar fallet där A kan reduceras till trappstegsform U genom en serie elementära radoperationer utan radbyten. Skrivet med elementära matriser:

$$A \sim E_1A \sim E_2E_1A \sim .... \sim (E_pE_{p\text{-}1}......E_1)A = U$$

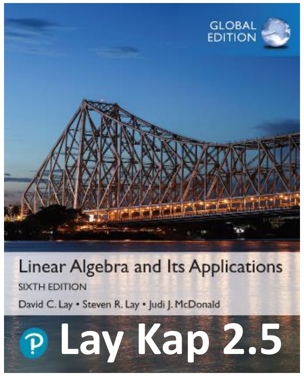
$$\because A = (E_pE_{p\text{-}1}......E_1)^{-1}U$$

Vi söker alltså $L = (E_pE_{p\text{-}1}......E_1)^{-1}$

Samma radoperationer som reducerar A till U reducerar alltså

också L till I: $(E_pE_{p\text{-}1}......E_1)(E_pE_{p\text{-}1}......E_1)^{-1} = I$

LU-faktorisering



Alltså: om A kan reduceras till trappstegsform U genom en serie radoperationer utan radbyten kan vi placera in element i L sådana att L reduceras till I med samma radoperationer.

Exempel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Den vanliga proceduren börjar:
Addera 2 x rad 1 till rad 2
Subtrahera 1 x rad 1 från rad 3
Addera 3 x rad 1 till rad 4.

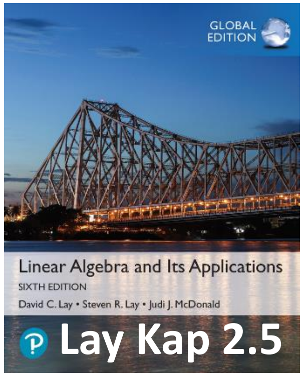
$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

Samma operationer på:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ -3 & * & * & 1 \end{bmatrix}$$

skulle ha producerat nollor under diagonalen
I den första kolumnen

LU-faktorisering



Sedan reduceras den andra kolumnen:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

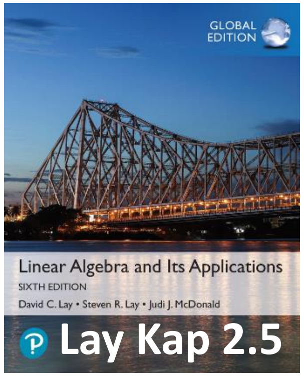
Addera 3 x rad 2 till rad 3
Subtrahera 4 x rad 2 från rad 4

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Samma operationer efter de tidigare skulle gett nollor i kolumn 2 om:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & * & 1 \end{bmatrix}$$

LU-faktorisering



Sedan reduceras den tredje kolumnen:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Subtrahera 2 x rad 3 från rad 4

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

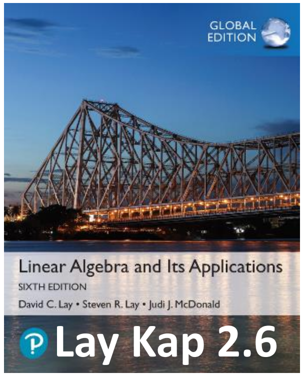
Samma operationer efter de tidigare skulle gett nollor i kolumn 3 om:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 2 & 0 \\ -9 & 12 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

L kan alltså byggas upp genom att bokföra de rödmarkerade mellanresultaten och dividera kolumnerna med pivotelementet för att få ettor på diagonalen. U blir den trappstegsmatris som erhålles ur A.

Matrisoperationer



Input-Output modellen (W Leontief, ekonomipris 1973)

Ett samhälles ekonomi delas in olika produktionssektorer.

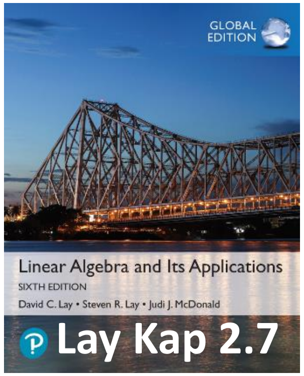
$$\left\{\begin{matrix} Mängd\ producerade \\ varor/tjänster \\ \boldsymbol{x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} Internt \\ behov \\ C\boldsymbol{x} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} Slutligt \\ "behov" \\ \boldsymbol{d} \end{matrix}\right\}$$

Matrisen $C = (\boldsymbol{c_1} \quad \boldsymbol{c_2} \quad \ldots \quad \boldsymbol{c_n})$ kallas *konsumtionsmatris*.

$\Rightarrow I\boldsymbol{x} - C\boldsymbol{x} = (I - C)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ eller $\boldsymbol{x} = (I - C)^{-1}\boldsymbol{d}$

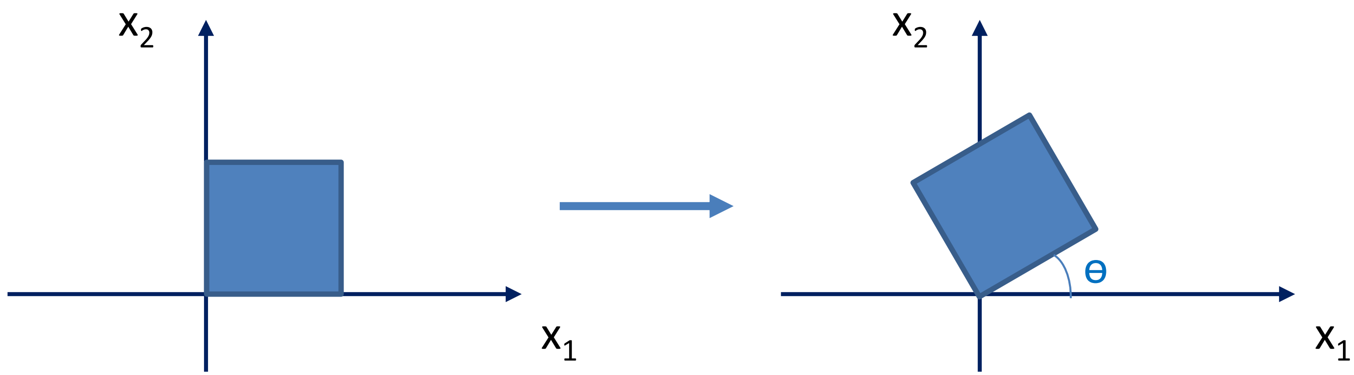
Matrisen $(I - C)^{-1}$ beskriver förhållandet mellan produktion och konsumtion.

Homogena koordinater



Vi har sett att t.ex. linjära avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan beskrivas med 2 x 2-matriser, såsom rotationen vinkeln φ :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to R\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

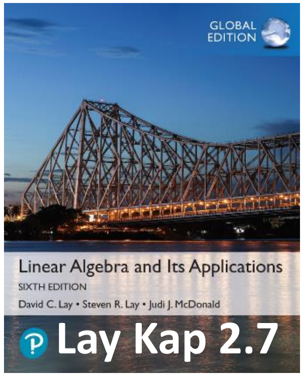


Antag att vi därefter vill translatera figuren med $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$

Detta är ingen linjär avbildning eftersom t.ex. nollvektorn inte avbildas på $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Avbildningar $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som innefattar translationer kallas för affina avbildningar. De kan inte beskrivas med 2 x 2-matriser.

Homogena koordinater



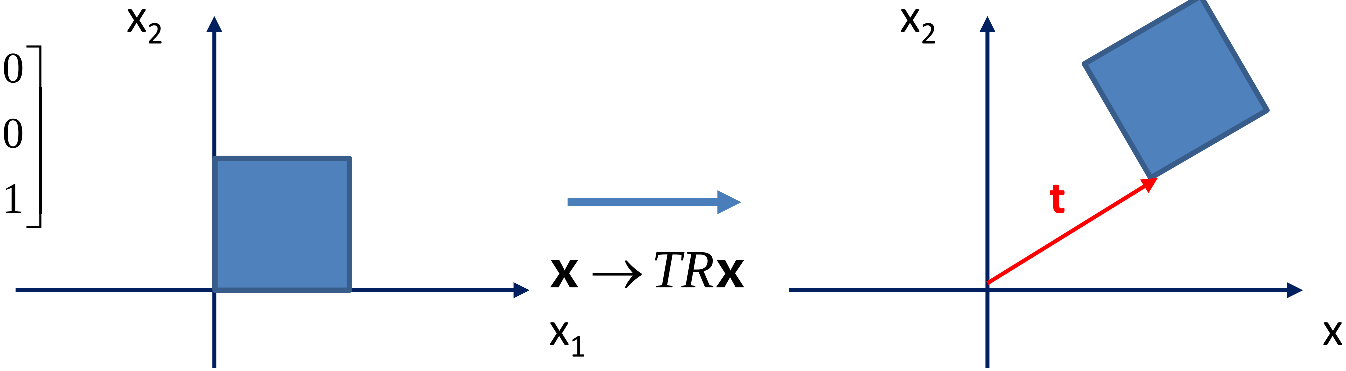
För att kunna hantera avbilningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som innefattar translationer inför vi homogena koordinater så att de blir linjära avbildningar $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. (x,y,1) sägs vara homogena koordinater för (x,y).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{T}\mathbf{x}}$$

har den önskade funktionen.

Med:

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



På samma sätt är (x,y,z,1) homogena koordinater för (x,y,z). Mer generellt är (X,Y,Z,H) homogena koordinater för (x,y,z) om H≠ 0 och

$$x = \frac{X}{H} \quad , \; y = \frac{Y}{H} \quad , \; z = \frac{Z}{H}$$

Homogena koordinater

Perspektivprojektioner

Ett tredimensionellt object avbildas genom projection på xy-planet från en punkt (0,0,d). Av figuren framgår att vi vill avbilda (x,y,z) på (x^*,y^*,0), och att

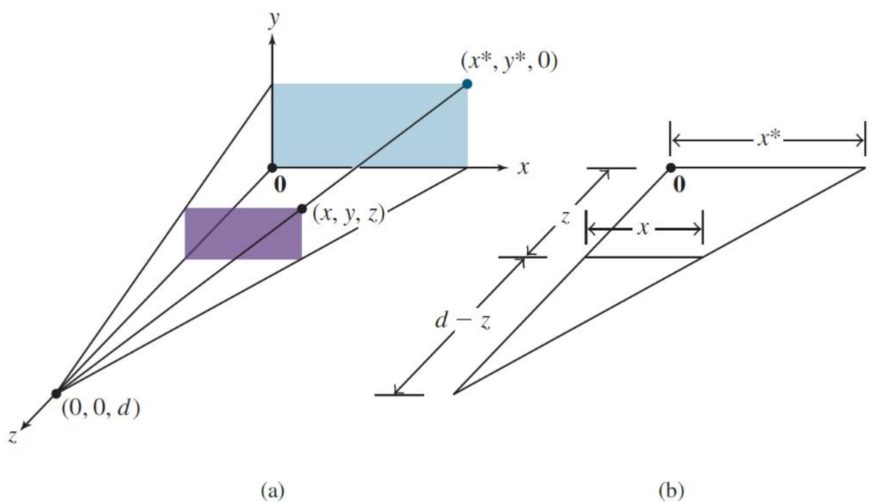


FIGURE 6 Perspective projection of (x, y, z) onto $(x^*, y^*, 0)$.

$$\frac{x^*}{d} = \frac{x}{d-z} \Rightarrow x^* = \frac{x}{1-z/d}$$

$$\frac{y^*}{d} = \frac{y}{d-z} \Rightarrow y^* = \frac{y}{1-z/d}$$

Vi använder homogena koordinater $(x, y, 0, 1 - z/d)$ för bilden.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \to P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1-z/d \end{bmatrix}$$

Matrisoperationer

Underrum av $\mathbb{R}^n$

Ett underrum av $\mathbb{R}^n$ är en uppsättning H i $\mathbb{R}^n$ med dessa tre egenskaper:

1. Nollvektorn finns i H.
2. För varje $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ i H hamnar även $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ i H.
3. Multiplikation med skalären c av $\boldsymbol{u}$, $c\boldsymbol{u}$, i H hamnar också i H.

Man säger att underrummet är slutet under (”closed under”) addition och skalär multiplikation.

Kolumnrum (bilden, ”image”) för en matris A är uppsättningen $Col\,A$ av alla linjära kombinationer av A’s kolumnvektorer.

Om $A = (\boldsymbol{a_1}\ \ \boldsymbol{a_2}\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{a_n})$ med kolumner i $\mathbb{R}^m$, är $Col\,A$ samma som $Span\ A$.

Kolumnrummet av en $m \times n$ matris är ett underrum till $\mathbb{R}^m$.

$Col\,A$ är lika med $\mathbb{R}^m$ bara då A’s kolumner spänner upp hela $\mathbb{R}^m$.

En vektor $\mathbf{b}$ tillhör $Col\,A$ omm $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är konsistent.

Matrisoperationer

Nollrummet för en matris A är uppsättningen $Nul\,A$ av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Nollrummet för en $m \times n$ matris A är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Uppsättningen av alla lösningar till $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ med m homogena linjära ekvationer och n obekanta variabler utgör ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

En *bas* för ett underrum H i $\mathbb{R}^n$ är en linjärt oberoende uppsättning i H som spänner upp H.

T ex kolumnerna i en inverterbar $n \times n$ matris utgör bas för $\mathbb{R}^n$, eftersom de är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^n$.

Uppsättningen $\{\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n\}$ kallas standardbasen för $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \dots \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrisoperationer

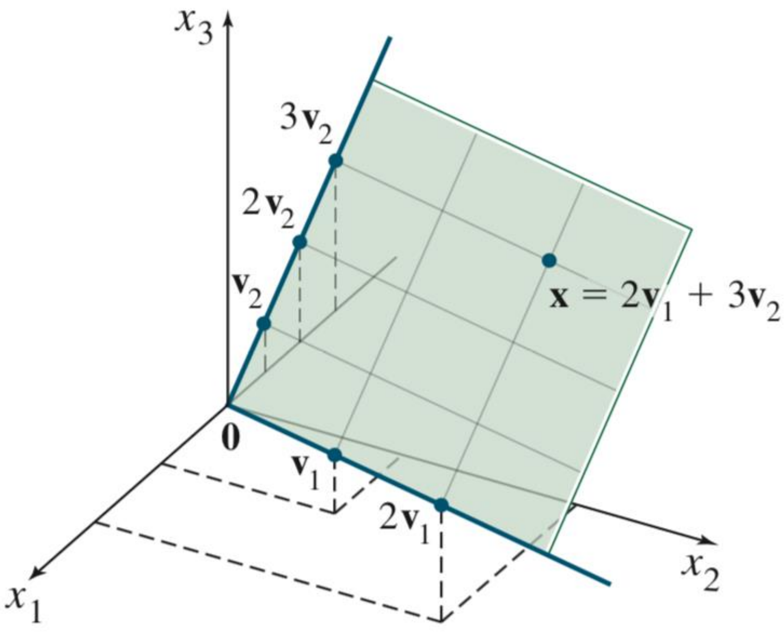


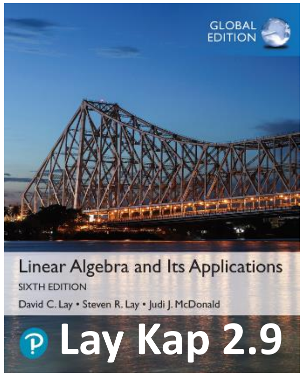
FIGURE 1 A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.

$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ är linjärt oberoende och spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$, ett underrum.

Som ett alternativ till standardbasen i $\mathbb{R}^3$ kan vektorn $\mathbf{x}$ i detta plan entydigt beskrivas med basen $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$:

$\mathbf{x} = 2\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}$

Matrisoperationer



Dimensioner och Rang

En viss uppsättning $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b_1}\ \boldsymbol{b_2}\ \ldots\ \boldsymbol{b_p})$ utgör basen för ett underrum H. För varje $\boldsymbol{x}$ i H finns då *koordinater* $c_1, c_2, \cdots, c_p$ till $\boldsymbol{x}$ relativt $\mathcal{B}$ så att $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + c_p\boldsymbol{b_p}$

Koordinatvektorn för $\boldsymbol{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$, även kallad $\mathcal{B}$ -koordinatvektorn till $\boldsymbol{x}$ är

$$(\mathbf{x})_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

Dimension av ett underrum H, $dim\ H$, är antalet vektorer i någon bas till H.

Dimensionen för ett rum $\mathbb{R}^n$ är n.

Rangen (”rank”) för matrisen A, $rank\ A$, är dimensionen för kolumnrummet av A.

Om en matris A har n kolumner gäller: $rank\ A + dim(Nul\ A) = n$

Matrisoperationer

Ekvivalenta satser om $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ matrisen $\boldsymbol{A}$ (forts)
(antingen är alla satser sanna, eller så är alla falska).

- A är inverterbar.
- A är radekvivalent till I_n.
- A har n pivot-element.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har bara en trivial lösning.
- Kolumnerna i A bildar en linjärt oberoende uppsättning vektorer.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \rightarrow A\boldsymbol{x}$ är ett-till-ett.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Kolumnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \rightarrow A\boldsymbol{x}$ avbildar A på $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Det finns en $n \times n$ matris C sådan att $CA = I$.
- Det finns en $n \times n$ matris D sådan att $AD = I$.
- A^T är en inverterbar matris.
- Kolumnerna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- $Col\ A = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
- $dim(Col\ A) = n$
- $rank\ A = n$
- $Nul\ A = (\mathbf{0})$
- $\dim(Nul\ A) = 0$