IX1303 Algebra och Geometri, VT2022

Matematiska formler och uttryck som ska kunnas

Skalärprodukt $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$

Två vektorer, $\boldsymbol{u}$ och **v** sägs vara ortogonala (vinkelräta) om $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$

Kryssprodukt $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$

Vektorn $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ är vinkelrät mot planet som spänns upp av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$. Vektorerna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ ordnas efter högerregeln och beräknas med hjälp av en determinant:

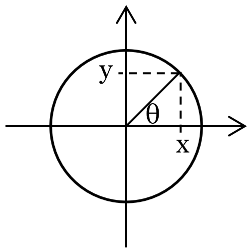
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\boldsymbol{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\boldsymbol{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\boldsymbol{k}$$

Normen av en vektor $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$ (Norm ersätts ofta med belopp $|\boldsymbol{u}|$ i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$)

För en enhetsvektor $\boldsymbol{u}$ gäller $\|\boldsymbol{u}\| = 1$

Polära koordinater



Cirkel med radie *r*

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Komplexa tal $i^2 = -1$

$\boldsymbol{z} = a + bi$ Konjugatet $\bar{\boldsymbol{z}} = a - bi$

Identitetsmatrisen eller enhetsmatrisen (visas för *n=3*)

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation med invers $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

Transponat Transponatet av en matris, A^T, innebär att rader och kolumner byter plats.

För transponering av en produkt av 2 matriser gäller $(AB)^T = B^T A^T$

Vid addition av $m \times n$-matriserna A och B (m rader, n kolumner), bildas nya element som summan av motsvarande element i A och B: $a_{ij}+b_{ij}$

Matrismultiplikation	Produkten av $m \times p$-matrisen A (m rader, radindex i, p kolumner) och $p \times n$-matrisen B (p rader, n kolumner, kolumnindex j), ges av $m \times n$-matrisen AB, där elementet ij består av summan: $$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$ Vi multiplikation av matriser gäller i regel: $AB \neq BA$
Linjär transform	$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$
Algebrans Fundamentalsats	För en $m \times n$-matris A gäller: $dim(NulA) + dim(ColA) = n$
Inverterbarhet	För en inverterbar $n \times n$-matris A gäller $detA \neq 0$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en unik lösning $\boldsymbol{x}$ för alla $\boldsymbol{b}$ i R^n $rref\ A = I_n$ $rank\ A = n$ $Col\ A = R^n$ $NulA = \{\boldsymbol{0}\}$ Kolumnvektorerna av A bildar en bas i R^n Kolumnvektorerna av A spänner upp R^n A's kolumnvektorer är linjärt oberoende 0 är inget egenvärde till A
Egenvärden	För en linjär transform $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ från R^n till R^n finns en nollskild vektor $\boldsymbol{v}$ i R^n som kallas egenvektor om $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. λ är då ett reellt (eller imaginärt) egenvärde till ekvationen och $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ utgör en egenbas.
Karakteristiska ekvationen	$det(A - \lambda I_n) = 0$
Dynamiska system	$\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ och $\boldsymbol{x}(t) = A^t\boldsymbol{x}_0$ där $\boldsymbol{x}_0$ är startvektorn.