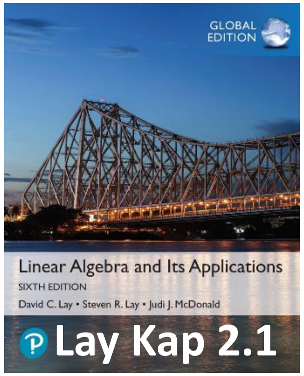
# Matrisoperationer




Elementen i en $m \times n$ matris $A$ ($m$ rader och $n$ kolumner)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementet på $i$:te raden och $j$:te kolumnen: $a_{ij}$

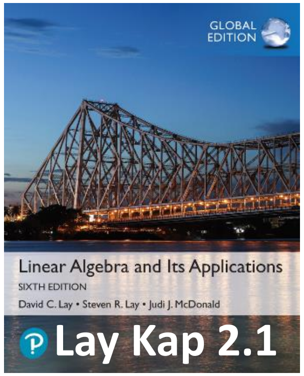
## Addition av matriser

Om $A$ och $B$ är två *lika stora* matriser kan man addera dem elementvis:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Om $A$ och $B$ inte har samma antal rader och kolumner, är operationen inte definierad.

# Matrisoperationer




Om alla element i en $m \times n$ matris är noll kallar vi den för nollmatrisen

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

En n x n matris D där alla element utom dem på diagonalen $D_{ii}$ är noll kallas för en diagonalmatris

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \qquad i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$$

Speciellt identitetsmatrisen:

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrisoperationer

## Multiplikation med skalär: $rA$

Varje element multipliceras med $r$:

$$rA = \begin{bmatrix} ra_{11} & \dots & ra_{1j} & \dots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{i1} & \dots & ra_{ij} & \dots & ra_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & \dots & ra_{mj} & \dots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

Räkneregler för addition och multiplikation med skalär:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = A$$

$$A - B = A + (-1)B$$

$$r(A + B) = rA + rB$$

$$(r + s)A = rA + sA$$

$$r(sA) = (rs)A$$

# Matrisoperationer

## Multiplikation av matriser

$A$ är en $m \times n$ matris och $B$ är en $n \times p$ matris med kolumner $\boldsymbol{b_1}$ $\boldsymbol{b_2}$ ... $\boldsymbol{b_p}$.
Produkten $AB$ blir då (definition) $m \times p$ matrisen

$$\mathrm{AB} = A\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}\mathbf{b}_1 & \mathrm{A}\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathrm{A}\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

Elementet $AB_{ij}$ i den multiplicerade matrisen $AB$ består av summan av produkterna av elementen i rad $i$ från $A$ och elementen av kolumn $j$ från $B$:

$$(\mathrm{AB})_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

som vi kallar rad-kolumnformeln, en alternativ definition.

## Räkneregler

$\mathrm{A(BC)} = \mathrm{(AB)C}$

$\mathrm{(A+B)}C = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$

$\mathrm{A(B+}C) = \mathrm{AB} + AC$

$r(\mathrm{AB}) = (r\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A(rB)}$

$\mathrm{I}_m\mathrm{A} = \mathrm{AI}_n = \mathrm{A}$

# Matrisoperationer

För multiplikation mellan matriser gäller i allmänhet

- $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$
- om $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ är det inte alls säkert att $\mathrm{B} = \mathrm{C}$
- om $\mathrm{AB} = 0$ är det inte givet att $\mathrm{A} = 0$ eller $\mathrm{B} = 0$

Potenser av matriser $\mathrm{A}^k = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} \cdot \ldots$ $k$ gånger

## Transponering av matriser

Rader och kolumner byter plats: en $m \times n$ matris blir en n$\times$ $m$ matris.
Transponatet av matrisen $A$ skrivs $A^T$

$$(\mathrm{A}^T)_{ij} = a_{ji}$$

## Räkneregler

Under förutsättning att matriserna $A$ och $B$ har rätt storlek gäller

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

# Matrisoperationer

Bevis för att $(AB)^T = B^T A^T$ : Låt A vara m x n och B n x p. Då är AB m x p, $(AB)^T$ p x m, $B^T$ är p x n och $A^T$ är n x m, så $B^T A^T$ är p x m liksom $(AB)^T$ , så storlekarna stämmer.

$$(\mathrm{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots a_{in} b_{nj}$$

$$(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \ldots a_{jn} b_{ni}$$

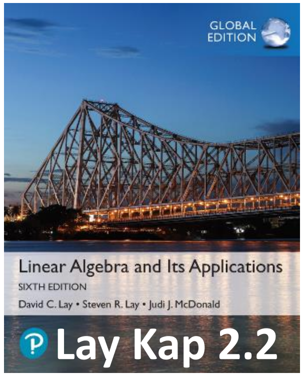
Kalla för ett ögonblick elementen i $B^T$ för $b^{'}_{rs}$ och elementen i $A^T$ för $a^{'}_{rs}$ , då gäller:

$$(B^T A^T)_{ij} = b^{'}_{i1} a^{'}_{1j} + b^{'}_{i2} a^{'}_{2j}{}' + \ldots b^{'}_{in} a^{'}_{nj}$$

Men $b^{'}_{i1} = b_{1i}$, $a^{'}_{1j} = a_{j1}$ osv, så:

$(B^T A^T)_{ij} = a_{j1} b_{1i} + a_{j2} b_{2i} + \ldots a_{jn} b_{ni}$ alltså samma som $(AB)^T_{ij}$ , V.S.B.

# Invers matris




## Invertering av matriser

En $n \times n$ matris $A$ är inverterbar om det finns en $n \times n$ matris $C$ som uppfyller villkoret:

$$\mathrm{CA} = \mathrm{I} \text{ och } \mathrm{AC} = \mathrm{I}$$

Inversen av $A$ skrivs $A^{-1}$. Enligt ovan gäller $A^{-1}A = I$ och $AA^{-1} = I$

För $2 \times 2$ matriser kan inversen enkelt beräknas med hjälp av determinanter.

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinanten av $A$ blir då

$$detA = ad - bc$$

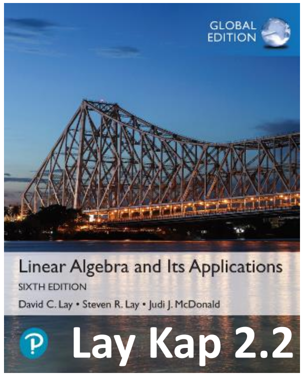
Om $detA \neq 0$, så är $A$ inverterbar och lika med:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(detta visas i Lay, övning 2.2 36)

Inversa transformen: om $A$ är en inverterbar $n \times n$ matris så har, för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den unika lösningen $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ .

# Invers matris




## Några samband för matrisinverser

Om en $n \times n$ matris $A$ är inverterbar så är inversen $A^{-1}$ också inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$

Om A och B är inverterbara n x n matriser är AB också inverterbar och
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis: $(AB)\, B^{-1}A^{-1}) = A(B^{-1}B)\, A^{-1} = AI_n\, A^{-1} = A\, A^{-1} = I_n$
På samma sätt är
$(B^{-1}A^{-1})AB = I_n$

Om A är inverterbar så är $A^T$ det också och
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bevis: Med användning av regeln $(AB)^T=B^TA^T$ :

$(A^{-1})^T A^T = (A\, A^{-1})^T I^T = I$ och
$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}\, A)^T = I^T = I$

# Matrisoperationer

*Elementära* matriser är $n \times n$ matriser som erhålls genom en enda elementär radoperation på enhetsmatrisen $I$. Elementära radoperationer kan representeras av elementära matriser, t.ex. :

Addera en multipel av en rad till en annan rad:

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} \end{bmatrix}$$

Multiplikation från vänster med $E_1$ adderar k gånger rad 1 i A till rad 3.

Skifta plats mellan två rader:

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikation från vänster med $E_2$ skiftar plats för raderna 1 och 2 i A.

# Invers matris

Multiplicera en rad med en skalär:

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ sa_{11} & sa_{32} & sa_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikation från vänster med $E_3$ medför att rad 3 i A multipliceras med talet s.

Elementära matriser är inverterbara:

Elementära matriser måste vara inverterbara på samma sätt som elementära radoperationer är reversibla. Det är också lätt att visa för de tre typerna t.ex. att:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$\text{alltså att} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{är inversen till} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \mathrm{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Invers matris

Ett sätt att beräkna $A^{-1}$ :

En inverterbar matris A är radekvivalent med identitetsmatrisen: $A \sim I$

Definitionsmässigt: $A \sim E_1A \sim E_2E_1A \sim \ldots \sim (E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)A = I$

Låt $E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1$ vara en sekvens av elementära radoperationer som

överför A till I: $(E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)A = I$

$(E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)$ är inverterbar eftersom den är en produkt av inverterbara matriser

och följaktligen:

$$(E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)^{-1}(E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)A = (E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)^{-1}I$$

$$\because A = (E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)^{-1}$$

$$A^{-1} = (E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1) = (E_pE_{p\text{-}1}\ldots E_1)I$$

$A^{-1}$ kan alltså beräknas genom att göra samma radoperationer i samma ordning på I som man gör för att transformera A till I.

# Invers matris

Algoritm för beräkning av $A^{-1}$:

Bilda den utökade matrisen [A I] och utför elementära radoperationer på den
I syfte att överföra A till I, samma operationer kommer då att överföra I till $A^{-1}$.
Exempel (Lay 2.2 7):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{Beräkna } \mathrm{A}^{-1}!$$

$$[\mathrm{A}\ \mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

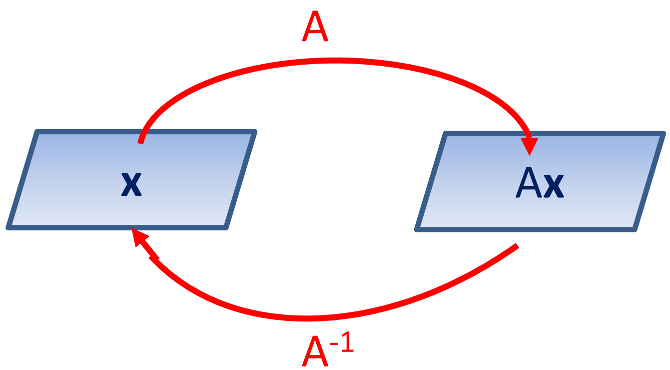
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = [\mathrm{I}\ \mathrm{A}^{-1}]$$

Om de tre första kolumnerna inte kan reduceras till I så är A inte inverterbar.

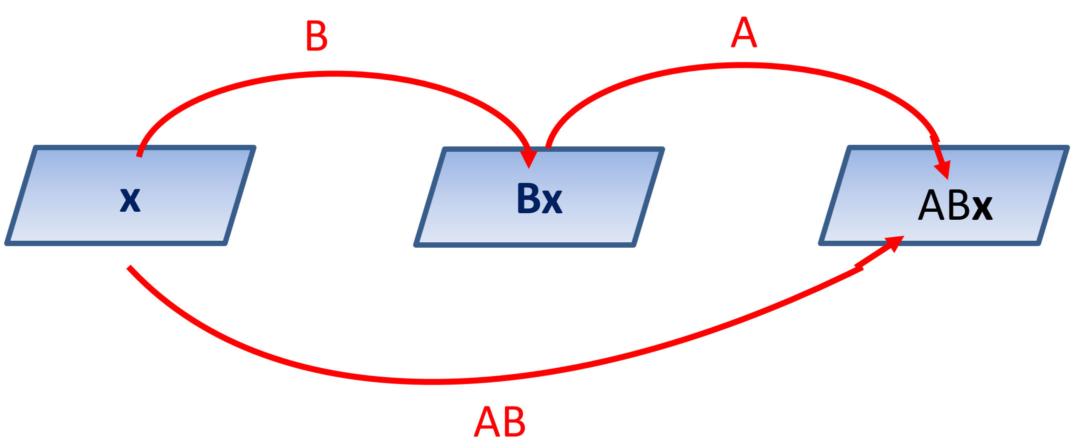
# Linjära avbildningar

Matrismultiplikation och invers som linjära avbildningar:

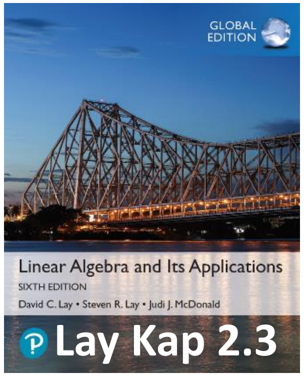
Multiplikation med matrisen A avbildar **x** på A**x**.
Multiplikation med $A^{-1}$ avbildar A**x** på **x**.




Multiplikation med B avbildar **x** på B**x**. Multiplikation med A avbildar B**x** på AB**x**



# Matrisoperationer

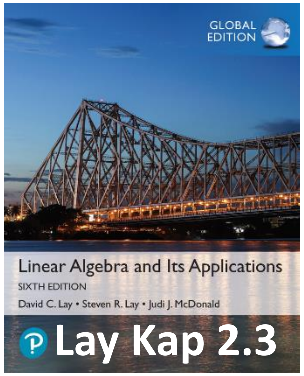



**Ekvivalenta satser om $n \times n$ matrisen $A$**
*Teoremet om inverterbara matriser*

(antingen är alla satser sanna, eller också är alla falska).

- $A$ är inverterbar.
- $A$ är radekvivalent till $I_n$.
- $A$ har n pivot-element.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har bara en trivial lösning.
- Kolumnerna i $A$ bildar en linjärt oberoende uppsättning vektorer.
- Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ är ett-till-ett.
- Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Kolumnerna i $A$ spänner upp $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Den linjära transformen $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ på $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.
- Det finns en $n \times n$ matris $C$ sådan att $CA = I$.
- Det finns en $n \times n$ matris $D$ sådan att $AD = I$.
- $A^T$ är en inverterbar matris.

# Matrisoperationer




Vi har några gånger delat upp matriser i block, till exempel en matris A i dess kolumner. Ett annat exempel är skrivningen i Lay av matrismultiplikationen AB som $\text{row}_i \cdot \text{col}_j$: $(AB)_{ij} = row\ A_i \cdot col\ B_j$.

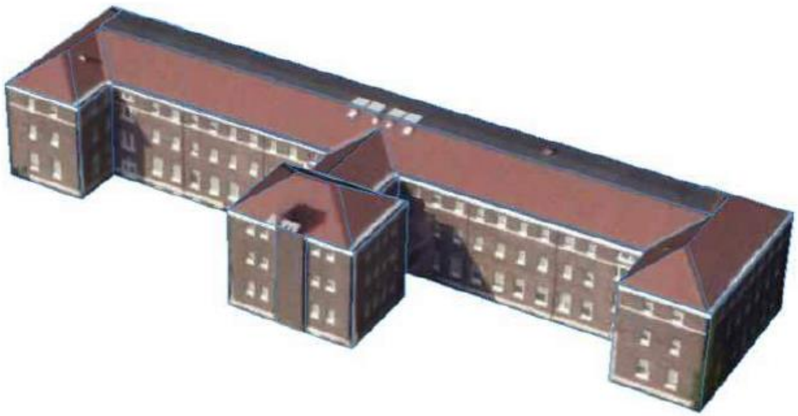
Alltså: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{np} \end{bmatrix}$ o.s.v.

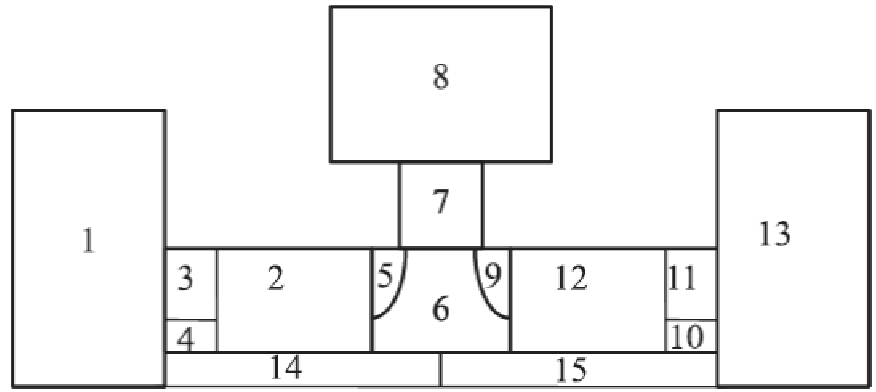
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Man kan faktiskt mer generellt dela in matriser i block eller undermatriser och sedan hantera blocken på liknande sätt som vi vant oss vid att räkna med de enskilda elementen i matrisen. Indelning i block kan vara fördelaktig, antingen för att blocken naturligen beskriver delsystem i problemet, eller för att blockindelningen är numeriskt fördelaktig.

# Matrisoperationer

Exempel: värmetransport i en byggnad

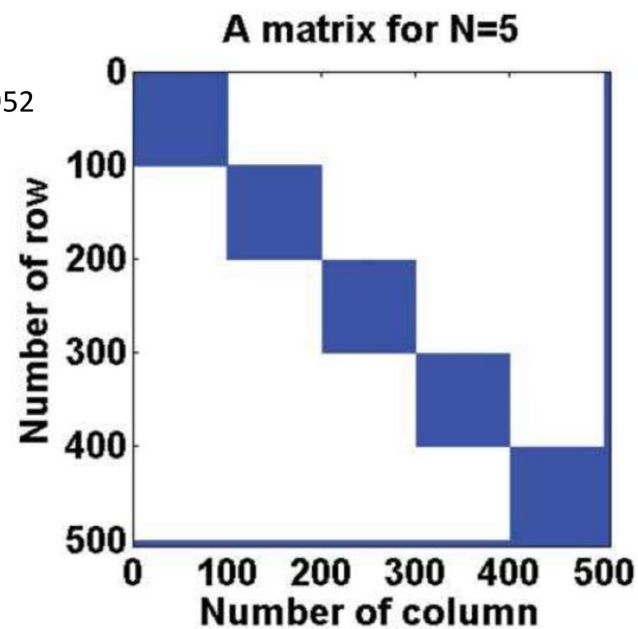




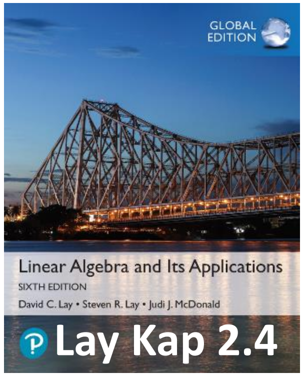

D. Kim and J.E. Braun,

Journal of Building Performance Simulation, DOI: 10.1080/19401493.2014.977952

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & C_{1,\mathbb{C}} \\ 0 & A_2 & & 0 & C_{2,\mathbb{C}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & A_N & C_{N,\mathbb{C}} \\ C_{\mathbb{C},1} & C_{\mathbb{C},2} & \dots & C_{\mathbb{C},N} & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$



# Matrisoperationer




***Blockmatriser*** (partitioned matrices)

Matriser kan delas upp i t ex kolumnvektorer. Mer generellt kan man dela upp matriser i block med valfria dimensioner.

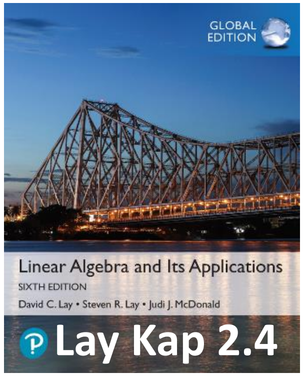
T ex $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ där varje $A_{ij}$ representerar en undermatris.

Detta är praktiskt användbart om man har stora system som består av mindre delsystem eller för att det kan vara beräkningsmässigt fördelaktigt att dela in matrisen i block.

Många av de räkneregler vi nämnt för matrisoperationer kan tillämpas på blocken i matriser. Så följer lätt ur definitionerna att om $A_{ij}$ har samma dimensioner som motsvarande $B_{ij}$ så är

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad sA = \begin{bmatrix} sA_{11} & sA_{12} \\ sA_{21} & sA_{22} \end{bmatrix} \quad \text{osv.}$$

# Matrisoperationer




Av definitionen av matrismultiplikation AB framgår att sådan är möjlig bara är möjlig om A och B har kompatibla dimensioner:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \text{gånger} & \mathrm{B} & = & \mathrm{AB} \\ \{\mathrm{m}\times\mathrm{n}\} & & \{\mathrm{n}\times\mathrm{p}\} & & \{\mathrm{m}\times\mathrm{p}\} \end{array}$$

Förutsatt både att blockindelningen och aktuella undermatrisers dimensioner är kompatibla med matrismultiplikation kan matrismultiplikation utföras blockvis, exempelvis som:

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22} \\ \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{21}\mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{22} \end{bmatrix}$$