KTH
School of EECS

Tentamen i Algebra och Geometri, IX1303, 6 hsp

Torsdag 2022-08-18

Tentamen ges kl 08.00 - 13.00 i salarna: Ka-204, Ka-303, Ka-304 och Ka-308. Tentamen ges för studentgrupperna TIDAB1, TIEDB1, TITEH-TIDB2, TITEH-TIED2.

Hjälpmedel: Endast skrivhjälpmedel som penna, papper och linjal.

Provet består av åtta uppgifter (1-8) som var och en kan ge upp till fyra poäng. Svaren får ges på engelska.

Skriv tydligt, motivera dina olika steg, gärna med en figur, och formulera ett svar till varje uppgift. *Avdrag ges för svårläst och illa motiverad lösning*, även om svaret är rätt!!

Preliminära betygsgränser:

< 16 poäng	F, Fx
$16 \leq$ poäng < 19	E
$19 \leq$ poäng < 23	D
$23 \leq$ poäng < 26	C
$26 \leq$ poäng < 29	B
≥ 29 poäng	A

Examinator: Anders Hallén, tel 08-7904358, e-mail: ahallen@kth.se

1. En nybliven restaurangägare bestämmer sig för att ha 20 bord för sina matgäster, ett visst antal bord med plats för 4 personer, några med plats för 6 personer och även något eller några bord med plats för 8 gäster. Totalt ryms det 108 sittande gäster, men om bara hälften av platserna vid 4-borden och 6-borden, samt bara en fjärdedel av platserna vid 8-borden, är upptagna kommer restaurangen att ha 46 gäster. Hur många bord med plats för 4, 6 och 8 sittande behöver hon då ställa ut i sin lokal?

Kalla t ex antalet 4-bord för x_4, antal 6-bord för för x_6 och antal 8-bord för för x_8. Ur texten fås då följande samband:

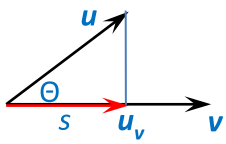
$$\begin{cases} x_4 + x_6 + x_8 = 20 \\ 2x_4 + 3x_6 + 2x_8 = 46 \\ 4x_4 + 6x_6 + 8x_8 = 108 \end{cases}, \quad \text{eller på matrisform: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 2 & 3 & 2 & 46 \\ 4 & 6 & 8 & 108 \end{pmatrix} \sim \cdots$$

$$\cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Svar: Hon behöver tio 4-bord, sex 6-bord och 4 stycken 8-bord.

2. Tre punkter i rummet är givna: $A = (0,1,2)$, $B = (1,2,3)$ och $C = (1,-1,5)$. Bestäm skalära och vektoriella projektionerna av vektorn $\overrightarrow{AB}$ på vektorn $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = (1,2,3) - (0,1,2) = (1,1,1)$ och $\overrightarrow{AC} = (1,-2,3)$.



Skalär projektion $s = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ blir $s = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-2,3)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$ (se fig)

Vektorprojektion $\boldsymbol{u_v} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v}$ blir $\boldsymbol{u_v} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-2,3)}{14}(1,-2,3) = \frac{1}{7}(1,-2,3)$

Svar: Skalära projektionen blir $2/\sqrt{14}$ och den vektoriella $\boldsymbol{u_v} = \frac{1}{7}(1,-2,3)$.

3. Visa, på tre olika sätt, att matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ är inverterbar. Ange också inversa matrisen A^{-1}.

A är inverterbar om determinanten är skild från noll, matrisen har 3 pivotpositioner, A är radekvivalent med I_3, kolumnerna är linjärt oberoende, etc.

1) Radreducering av A ger $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alltså 3 pivotpositioner.

2) Beräkna determinanten: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 6 - 10 - 2 = 3 \neq 0$

3) Som ett tredje sätt beräknas determinanten enligt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -17/3 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 & 2/3 \\ -17/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

4. Gör en LU-faktorisering av matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dvs skriv A som en produkt av en L-matris, som endast har nollor ovanför diagonalen och ettor som diagonalelement, samt en U-matris med bara nollor under diagonalen.

   Ledning: Om man inte kommer ihåg algoritmen, kan man alltid använda elementära matriser $E_1, E_2, \dots, E_p$ för vilka $E_p \dots E_1 A = U \Longrightarrow A = \left(E_p \dots E_1\right)^{-1} U = LU$

   Radreducera matrisen A (inga radbyten!) för att få fram U. Notera stegen som utförs.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U$$

   Bilda sedan L-matrisen av de inringade kolumnerna, där värdena normaliseras med termen i den översta raden, samt fyll övre högra triangeln med nollor:

$$L = \begin{pmatrix} 2/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/-1 & 0 \\ -1/2 & 2/-1 & 5/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   <u>Svar:</u> $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ och $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5. En vargflock har sitt revir i gränslandet mellan Värmland och Dalarna. Reviret kan delas upp i tre områden: 1) myrmarkerna kring sjön, 2) uppe i bergen och 3) på

slätten. Om vargarna har jagat i ett område en viss dag, är sannolikheten att dom fortsätter jaga där 50%. Dock har det visat sig att om dom jagar kring sjön en dag, jagar dom aldrig i bergen nästa dag, samt att om dom jagar i bergen eller på slätten en dag, så är sannolikheten lika för att dom ska söka föda i något av de andra två distrikten nästa dag. Sannolikheten var flocken jagar dag från dag kan då beskrivas som en Markovprocess med en övergångsmatris P och tillståndsvektorer $\boldsymbol{x_i}$:

$$\boldsymbol{x_{i+1}} = P\boldsymbol{x_i}$$

Bestäm övergångsmatrisen och beräkna sannolikheten för att vargflocken jagar kring sjön på torsdag, om dom har jagat där på måndagen.

Sannolikheterna var dom jagar nästa dag kan beskrivas med följande tabell:

	Sjön	Bergen	Slätten
Sjön	1/2	1/4	1/4
Bergen	0	1/2	1/4
Slätten	1/2	1/4	1/2

Notera att summan i varje kolumn måste bli 1 (100%). T ex om dom jagat vid sjön en dag blir sannolikheten enligt texten 50% för att jakten förläggs till samma ställe, 0% för att dom jagar i bergen nästa dag och då måste sannolikheten bli 50% för att dom jagar på slätten dagen efter. Övergångsmatrisen blir således

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Startvektorn, tillståndet på måndagen, ansätts som $\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} slh\ sjön \\ slh\ bergen \\ slh\ slätten \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

För tisdagen fås $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

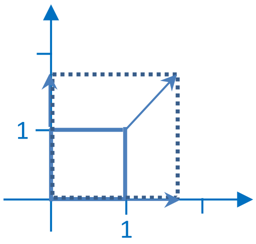
Onsdag $\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 4/8 \end{pmatrix}$

Torsdag $\boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 4/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/32 \\ 6/32 \\ 15/32 \end{pmatrix}$

<u>Svar:</u> Sannolikheten för jakt vid sjön på torsdagen är 11/32 (ca 33%).

6. Bestäm en linjär geometrisk transform i $\mathbb{R}^2$ som tredubblar ytan av enhetskvadraten, men bibehåller den kvadratiska formen.

Kvadratens yta ska öka från 1 areaenhet (ae) till 3, vilket betyder att sidlängden ska öka från 1 längdenhet (le) till $\sqrt{3}$ le.



Horisontell expansion ges av standardmatrisen $T_h = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och vertikal expansion av $T_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, där $k > 1$. För att öka kvadratens area utan att ändra förhållandet mellan sidlängderna, kan man åstadkomma den önskade transformen T genom att kombinera dessa transformer:
$T = T_h T_v = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, där $k = \sqrt{3}$.

<u>Svar:</u> Transformen ges av matrisen $T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

7. Bestäm lösningen till följande system av linjära differentialekvationer genom att se systemet som en vektorekvation, $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$.

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 5x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

Begynnelsevilkoren är $x_1(0) = 7$ och $x_2(0) = 14$.

Systemet på matrisform: $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

Egenvärden: $det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$

PQ-formeln ger $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorer

λ_1: $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vilket ger $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

λ_2: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vilket ger $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösningarna till första ordningens differentialekvationer är av typen $y(t) = Ce^{at}$

Lösningen här kan skrivas som en linjär kombination

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1\boldsymbol{v}_1e^{\lambda_1 t} + C_2\boldsymbol{v}_2e^{\lambda_2 t} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$$

Startvillkoren ger uttryck för konstanterna C_1 och C_2.

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ 5C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

Lös matrisekvationen $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$ genom tex radreduktion av matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 1 & 14 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> Lösningen blir $x_1(t) = 6e^{6t} + e^{-t}$ och $x_2(t) = 15e^{6t} - e^{-t}$.

8. Låt W vara ett underrum till rummet av kontinuerliga funktioner i intervallet 0 till 1, $C[0,1]$, med inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. W spänns upp av $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 2t - 1$ och $p_3(t) = 12t^2$. Använd Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod för att hitta en ortogonal bas till W.

   Tips: Gram-Schmidts rekursiva formel för ortogonalisering säger att ortogonala vektorer från en allmän bas $\{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_p}\}$ kan genereras genom att sätta $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{x_2} - \frac{\boldsymbol{x_2} \cdot \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} \boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p} = \boldsymbol{x_p} - \frac{\boldsymbol{x_p} \cdot \boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_1}} \boldsymbol{v_1} - \frac{\boldsymbol{x_p} \cdot \boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_2}} \boldsymbol{v_2} - \cdots - \frac{\boldsymbol{x_p} \cdot \boldsymbol{v_{p-1}}}{\boldsymbol{v_{p-1}} \cdot \boldsymbol{v_{p-1}}} \boldsymbol{v_{p-1}}$

Kalla de eftersökta ortogonala polynomen q_1, q_2 och q_3. Låt sedan $p_1 = q_1$ och beräkna
$\langle p_2, q_1 \rangle = \int_0^1 (2t - 1)1dt = (t^2 - t)_0^1 = 0$, alltså redan ortogonala. Sätt då $q_2 = p_2$.

För projektionen av p_3 på $W_2 = Span\{q_1, q_2\}$ beräkna $\langle p_3, q_1 \rangle = \int_0^1 12t^2 \cdot 1dt = (4t^3)_0^1 = 4$ och $\langle q_1, q_1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot 1dt = 1$

$\langle p_3, q_2 \rangle = \int_0^1 12t^2(2t - 1)dt = \int_0^1 (24t^3 - 12t)dt = 2$ och $\langle q_2, q_2 \rangle = \int_0^1 (2t - 1)^2 dt = 1/3$

Projektionen p_3 på W_2 blir då $\frac{\langle p_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 + \frac{\langle p_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} q_2 = 4q_1 + \frac{2}{1/3} q_2 = 4q_1 + 6q_2$
Slutligen $q_3 = p_3 - proj_{W_2} p_3 = p_3 - 4q_1 - 6q_2 = 12t^2 - 4 \cdot 1 - 6(2t - 1) = 12t^2 - 12t + 2$.

<u>Svar:</u> En ortogonal bas till W utgörs av $q_1 = 1$, $q_2 = 2t - 1$ och
$q_3 = 12t^2 - 12t + 2$