KTH
School of EECS

Tentamen i Algebra och Geometri, IX1303

Torsdag 2021-06-03

Tentamen ges kl 08.00 - 13.00 i salarna: Ka-204, Ka-205, Ka-208, Ka-303, Ka-304, Ka-308.
Tentamen ges för studentgrupperna TIDAB1, TIEDB1, TITEH2-TIDB, TITEH2-TIED.

Hjälpmedel: Endast skrivhjälpmedel som penna, papper och linjal.

Provet består av sex uppgifter (1-6) som var och en kan ge upp till fyra poäng. Svaren får ges på engelska.

Skriv tydligt, motivera dina olika steg, gärna med en figur, och formulera ett svar till varje uppgift. *Avdrag kan ges för svårläst och illa motiverad lösning*, även om svaret är rätt!!

Preliminära betygsgränser för studenter inskrivna HT2018, eller senare, där tentan ger 6 hp:

$<$ 12 poäng	F, Fx
12 $\leq$ poäng $<$ 15	E
15 $\leq$ poäng $<$ 18	D
18 $\leq$ poäng $<$ 21	C
21 $\leq$ poäng $<$ 23	B
$\geq$ 23 poäng	A

Examinator: Anders Hallén, tel 08-7904358, e-mail: ahallen@kth.se

1. *Balansera en kemisk reaktions*formel
Kvävedioxid, NO_2, löser sig lätt i vatten, H_2O, och bildar de sura föreningarna salpetersyrlighet, HNO_2, och salpetersyra, HNO_3, enligt formeln

$$aNO_2 + bH_2O \longrightarrow cHNO_2 + dHNO_3$$

Ställ upp en matrisekvation (2p) och bestäm heltalskonstanterna a, b, c, d så att reaktionsformeln blir balanserad (2p), dvs det ska finnas lika många atomer av kväve (N), syre (O) och väte (H) på vänstra som på högra sidan. Ange det minsta antalet av molekylerna (NO_2, H_2O, HNO_2, HNO_3) som krävs.

Ur reaktionsformeln erhålls tre samband för de olika atomslagen:

$$\left.\begin{array}{ll} O: & 2a+b=2c+3d \\ H: & 2b=c+d \\ N: & a=c+d \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2a+b-2c-3d=0 \\ 2b-c-d=0 \\ a-c-d=0 \end{array}\right.$$

Detta ger oss den homogena matrisekvationen (OBS: 3 ekvationer, men 4 obekanta.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koefficientmatrisen reduceras

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Låt d vara en fri variabel $d = r$. Då kan vi skriva lösningen $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \\ r \\ r \end{pmatrix}$. För att få minsta antalet molekyler sätter vi $r = 1$.

<u>Svar:</u> En balanserad reaktionsformel ges av $2NO_2 + H_20 \longrightarrow HNO_2 + HNO_3$.

2. Ett plan i $\mathbb{R}^3$ges av ekvationen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för detta plan så att koordinatvektorn $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ för vektorn $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (4p).

Notera att $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ligger i planet eftersom $1 + 2(-1) + 1 = 0$.

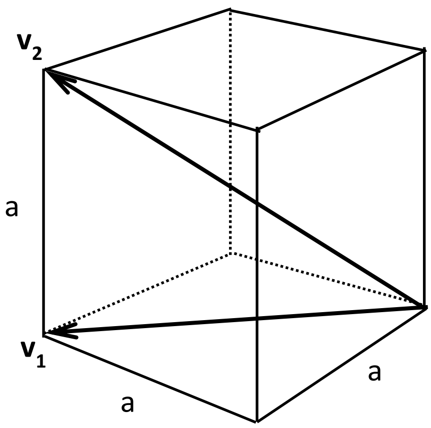
Som den första basvektorn, $\boldsymbol{b}_1$, väljs en ”enkel” vektor som ligger i planet och inte är parallell med $\boldsymbol{x}$, t ex $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. För den andra basvektorn, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, gäller då

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2 - b_1 = 1 \\ 0 - b_2 = -1 \\ -2 - b_3 = 1 \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_3 = -3 \end{cases}$$

<u>Svar:</u> En bas ges av vektorerna $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Använd vektorer för att bestämma vinkeln mellan diagonalen av en sida, $\mathbf{v_1}$, i en kub och kubens rymddiagonal, $\mathbf{v_2}$ (se figur, 3p).

   Vad blir längden av kubens sida a om vektorn $\mathbf{v_2}$ normeras (1p)?



Antag att vektorerna börjar i origo. Vektorerna blir då $\boldsymbol{v_1} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{v_2} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vinkeln θ mellan vektorerna ges av definitionen för skalärprodukt: $\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2} = \|\boldsymbol{v_1}\|\|\boldsymbol{v_2}\| \, cos\theta$:

$$\theta = cos^{-1}\frac{\boldsymbol{v_1} \cdot \boldsymbol{v_2}}{\|\boldsymbol{v_1}\|\|\boldsymbol{v_2}\|} = cos^{-1}\left(\frac{a^2(1 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{a^2\sqrt{1^2+1^2}\,\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right) = cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\text{Normen av } \boldsymbol{v_2} = \left\| a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = a\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}a = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = {}^{1}\!/_{\sqrt{3}}$$

<u>Svar:</u> Vinkeln är $cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ och kubsidan blir $a = {}^{1}\!/_{\sqrt{3}}$.

4. Bestäm en minsta-kvadratlösning $\hat{\boldsymbol{x}}$ till systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ (2p). Bestäm även vektorn $\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}$ och beskriv hur den vektorn förhåller sig till $Col\ A$, gärna med en fin figur (2p). Normalekvationen lyder $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$.

Normalekvationen omformas genom att multiplicera från vänster med $(A^T A)^{-1}$, vilket ger

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b}$$

Beräkna de olika matriserna $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

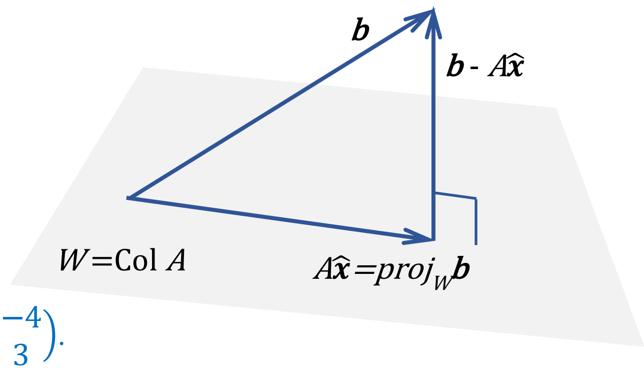
$$A^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Normalekvationen ger nu $\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Slutligen beräknas vektorn $\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorn $\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}$ är ortogonal mot rummet W=Col A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



<u>Svar:</u> En minsta-kvadratlösning ges av $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Bestäm en (2×2)-matris A så att tillståndsvektorn $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2^t - 6^t \\ 2^t + 6^t \end{pmatrix}$ beskriver utvecklingen av det dynamiska systemet $\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ (4p).

Skriv om tillståndsvektorn på formen

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2^t \\ 2^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6^t \\ 6^t \end{pmatrix} = 2^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Detta är tillståndsvektorn skriven på sluten form och ur högerledet kan man således identifiera egenvärden och egenvektorer:

$\lambda_1 = 2$ med egenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = 6$ med egenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Egenvärdesekvationen $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ger då fyra ekvationer för de 4 koefficienterna i A.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{12} = 2 \\ a_{21} + a_{22} = 2 \\ -a_{11} + a_{12} = -6 \\ -a_{21} + a_{22} = 6 \end{cases}$$

Utökade koefficientmatrisen för ekvationssystemet reduceras

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> Matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

6. Hitta en bas för rummet som består av alla polynom $f(t)$ i $\mathbb{P}_3$ för vilka $f(1) = 0$ och $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$. Ange också dimensionen av detta rum (4p).

Ett polynom i $\mathbb{P}_3$ kan skrivas $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$. Polynomet kommer att tillhöra det efterfrågade underrummet om

$$f(1) = a + b + c + d = 0$$

och

$$\int_{-1}^{1} (a + bt + ct^2 + dt^3)dt = \left[at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{3}t^3 + \frac{d}{4}t^4\right]_{-1}^{1} = 2a + \frac{2c}{3} = 0$$

Detta ger ett ekvationssystem med 4 obekanta och bara 2 ekvationer:

$$\left.\begin{aligned} a + b + c + d = 0 \\ 2a + \frac{2c}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4/3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4/3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Låt $c = r$ och $d = s$ vara fria variabler. Då kan lösningen skrivas: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r/3 \\ -2r/3 - s \\ r \\ s \end{pmatrix}$.

Polynomen i underrummet har då formen

$$f(t) = -r/3 - (2r/3 + s)\,t + rt^2 + st^3 = r(t^2 - 2/3t - 1/3) + s(t^3 - t)$$

<u>Svar:</u> Basen består av vektorerna $(t^2 - 2/3\,t - 1/3), (t^3 - t)$ och dimensionen är 2.