IX1303 Tentamen 2020 08 10, Del 2: räknetal

1. I en fruktkorg ligger 4 äpplen och 6 päron. Antag att varje äpple väger lika mycket och att varje päron väger lika mycket. Du vet att frukterna tillsammans väger 1.4 kg och du vet också att 5 päron och 1 äpple väger lika mycket som 3 äpplen och 1 päron. Ställ upp en matrisekvation och radreducera den för att bestämma hur mycket äpplena och päronen väger per styck.

Kalla päronens vikt för x och äpplenas för y (kg/styck). Ur texten erhålls då följande två samband: $6x + 4y = 1.4$ och $5x + y = x + 3y$, vilket ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 6x + 4y = 1.4 \end{cases}$$

Radreducering av systemet ger matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.2 \end{pmatrix}$

<u>Svar:</u> Päronen väger 0.1 och äpplena 0.2 kg per styck.

2. Bestäm en bas för rummet V som består av alla 3×3 matriser som kommuterar med matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Om matriserna A och B kommuterar, gäller $AB = BA$.

Vi söker alltså matriser av typen $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ för vilka

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2d & 3e & 4f \\ 2g & 3h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

Om de icke-diagonala elementen ska vara lika måste $b = c = d = f = g = h = 0$. Elementen på diagonalen, a, e och i, kan däremot väljas fritt. Således består rummet V av matriser av formen

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svar: En bas kan utgöras av matriserna $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

3. Ett dynamiskt system beskrivs av övergångsmatrisen $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$. Bestäm ett slutet uttryck för A^t och beräkna utifrån detta uttryck $\lim_{t\to\infty} A^t$.

Karakteristiska ekvationen för A ges av $\det(A - \lambda I) = 0$ eller $\lambda^2 - 1.1\lambda + 0.1 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.1) = 0$. Egenvärdena är således $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0.1$.

Tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{v_1}$ och $\boldsymbol{v_2}$ ges av

λ_1: $(A - \lambda I)\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 \\ 0.6 & -0.3 \end{pmatrix}\boldsymbol{v_1} = 0$ eller $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

λ_2: $(A - \lambda I)\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}\boldsymbol{v_2} = 0$ eller $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Diagonalisera A med hjälp av inverterbara matrisen $P = (\boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{v_2})$ och $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ enligt $A = PDP^{-1}$.

Här blir $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Eftersom $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, $A^3 = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$, etc blir det sökta slutna uttrycket

$$A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2(0.1)^t & 1 - (0.1)^t \\ 2 - 2(0.1)^t & 2 + (0.1)^t \end{pmatrix}$$

När $t \to \infty$ kommer $0.1^t \to 0$ och $\lim_{t\to\infty} A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Svar: Efter bara några få tidssteg t, fås $A^t \approx \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.