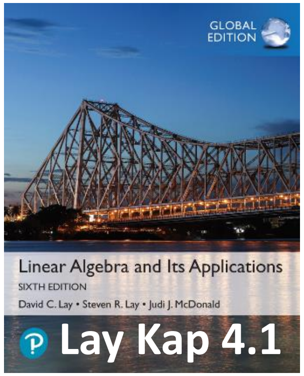
Linjära rum
(= vektorrum)

Linjära rum



Det vi lärt oss hittills om avbildningar från t ex $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, där $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, kan generaliseras till många andra typer av rum. Allmänt kallar man dessa rum för linjära rum V (eller vektorrum).

Ett allmänt linjärt rum V är en uppsättning sådana vektorer (t ex $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$) som uppfyller följande regler (c och d är skalärer):

1. Summan av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, finns i V.
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
3. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
4. Det finns en nollvektor $\mathbf{0}$ i V sådan att $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$ för alla $\mathbf{u}$.
5. För varje vektor $\mathbf{u}$ finns en vektor -$\mathbf{u}$ i V sådan att $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$
6. En skalär multipel av $\boldsymbol{u}$, t ex $c\,\boldsymbol{u}$, finns också i V.
7. $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$
8. $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$
9. $c(d\boldsymbol{u})=(cd)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

Med skalärer i denna definition menar vi reella tal: $c,d \in \mathbb{R}$.

Man talar då mer precist om linjära rum över $\mathbb{R}$. Man kan också arbeta med linjära rum över mängden av komplexa tal.

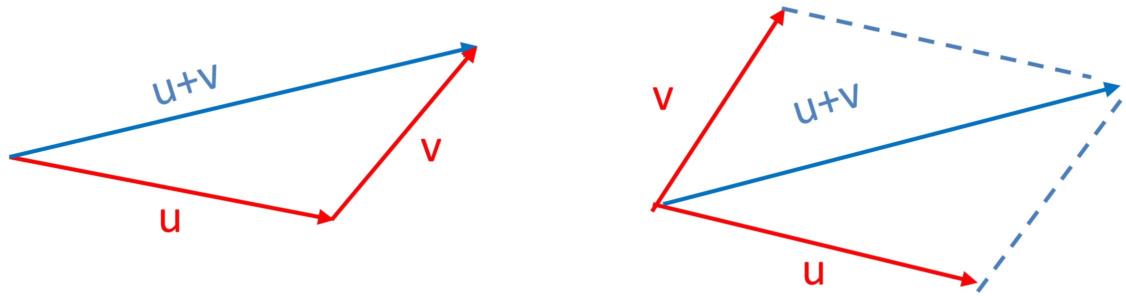
Linjära rum

Exempel på linjära rum:

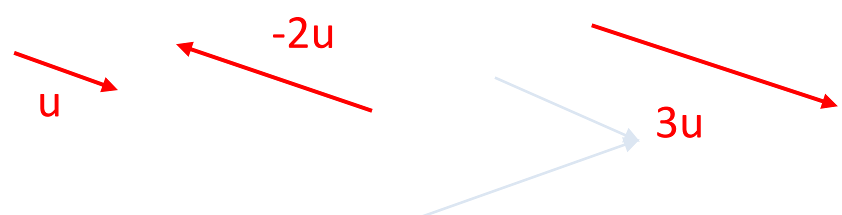
a) De reella talen utgör ett linjärt rum, eftersom de vanliga räknereglerna uppfyller kraven 1-10.

b) Det åskådliga rummet i två eller tre dimensioner är linjära rum, för den geometriska definitionen av vektoraddition och multiplikation med skalär uppfyller också kraven 1-10.

Vektoraddition



Multiplikation med skalär



Linjära rum

c) $\mathbb{R}^n$ är ett linjärt rum, med komponentvis addition och multiplikation med skalär som vi definierat dem.

Genom att identifiera geometriska vektorer med vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ har vi definierat ett-till-ett avbildningar mellan de geometriska rummen och $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$.

d) $\mathbb{S}$ är rummet av alla dubbelt oändliga ($\pm\infty$) talföljder

$$\{y_k\} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots)$$

$\mathbb{S}$ står för ”signal” och $\{y_k\}$ kan t ex vara en lång serie av mätvärden (samplade signaler). Addition och multiplikation med skalär definieras komponentvis.

e) V kan vara mängden av reella funktioner av en reell variabel. Om f(t) och g(t) tillhör V så gör $cf(t) + d(g(t)$ det också, liksom ”nollvektorn” f(t) =0 för alla t. Etc. Så V är också ett linjärt rum.

Linjära rum

f) $\mathcal{P}_n$, för $n \geq 0$, är alla polynom av grad högst n

$$\boldsymbol{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

där koefficienterna a_i och variabeln t är reella tal. Nollvektor för detta rum är nollpolynomet, med a_0 , a_2 , ... a_n= 0 och $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ + $b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n$ = (a_0+ b_0) + (a_1+ b_1)t +... (a_n+b_n)t^n etc. visar att kraven 1-10 är uppfyllda.

g) $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\text{x}\boldsymbol{n}}$ utgör vektorrummet bestående av alla $m \times n$ matriser. Addition och multiplikation med skalär sker elementvis. Nollvektorn i rummet är nollmatrisen.

h) Mängden av alla kontinuerliga funktioner *f(t)* på intervallet [-1,1], sådana att *f(0)=0* är ett linjärt rum.

i) Mängden av alla talföljder $\{y_k\} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots)$ sådana att bara ett ändligt antal komponenter är skilda från noll är ett linjärt rum.

j) Mängden av alla oändliga talserier som konvergerar mot noll är ett linjärt rum.

Osv.

Underrum

Om H är en delmängd av ett linjärt rum V är flera av kraven 1-10 uppfyllda för H. För att H också ska vara ett linjärt rum räcker det då med att visa att:

- Nollvektorn ingår i H.
- Om **u** och **v** tillhör H tillhör (**u**+**v**) också H.
- Om **u** tillhör H så tillhör c**u** också H.

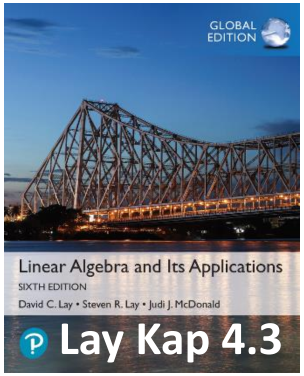
I så fall säger vi att H är ett underrum till V. H behöver inte vara en äkta delmängd av V, utan V betraktas också som ett underrum till sig självt. Nollvektorn i V sägs också vara ett underrum till V.

Exempel: det linjära rummet P_n av polynom av högst grad n är ett underrum av alla polynom av grad högst n+1, som i sin tur är ett underrum av alla kontinuerliga funktioner.

Om mängden $\left\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_p}\right\} \in V$ så är det linjära höljet Span$\left\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_p}\right\}$ ett underrum till V.

Linjärt oberoende och bas

Linjärt oberoende uppsättningar och baser i generella vektorrum



En indexerad uppsättning med 2 eller flera generella vektorer $\{\boldsymbol{v_1} \;\; \dots \;\; \boldsymbol{v_n}\}$ som tillhör vektorrummet V och där $\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{0}$ är linjärt beroende omm det för något $j>1$ finns en vektor $\boldsymbol{v_j}$ som är en linjär kombination av föregående vektorer:

$$\boldsymbol{v_j} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{v_{j-1}}$$

I annat fall är $\{\boldsymbol{v_1} \;\; \dots \;\; \boldsymbol{v_n}\}$ linjärt oberoende och ingen av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

En ordnad uppsättning vektorer $\{\boldsymbol{v_1} \;\; \dots \;\; \boldsymbol{v_n}\}$ som spänner upp ett vektorrum V och som är linjärt oberoende sägs utgöra en bas för V.

Om H utgör ett underrum till vektorrummet V, finns en indexerad uppsättning vektorer $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1} \;\; \dots \;\; \boldsymbol{b_p}\}$ i V som utgör en bas för H om $\mathcal{B}$ utgör en linjärt oberoende uppsättning.
Underrummet som spänns upp av $\mathcal{B}$ överensstämmer med H, dvs

$$H = Span\{\boldsymbol{b_1} \;\; \dots \;\; \boldsymbol{b_p}\}$$

En bas för ett vektorrum utgör minsta antalet vektorer som behövs för att kunna definiera alla punkter i detta rum.

Linjära avbildningar

En linjär avbildning (linjär transformation) T från ett linjärt rum V till ett linjärt rum W avbildar varje element i V på något element i W på sådants sätt att

- $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
- $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

Mängden av alla $\mathbf{u} \in V$: $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \in W$ kallas för avbildningens kärna.

Mängden av alla $w \in W$ som T avbildar på kallas för avbildningens värdemängd (range).

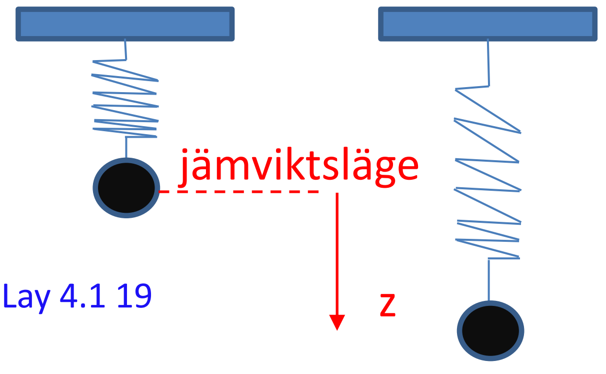
Om T avbildar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och definieras av en matris A (m x n) är kärnan matrisens nollrum Nul A, och värdemängden är matrisens kolumnrum Col A.

Linjära avbildningar

Vi har studerat linjära avbildningar som kan representeras som **x** → A**x** .

Linjära avbildningar mellan vektorrum kan också vara av annat slag. Så t.ex. är

$(D^2+\omega^2)\,f(t)$ där D representerar derivation en linjär avbildning av $f(t)$ i rummet av alla två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på rummet av kontinuerliga funktioner.



Lay 4.1 19

Avbildningens kärna är lösningsmängden:

$c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$

Massan m är upphängd med en fjäder med fjäderkonstanten k. Rörelseekvationen blir

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=0,$$

$$\text{med } z = f(t) \text{ och } \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Underrum definierade av matriser

Nollrummet för en matris A är uppsättningen $Nul\,A$ av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Nollrummet för en $m \times n$ matris A är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Uppsättningen av alla lösningar till $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ med m homogena linjära ekvationer och n obekanta variabler utgör ett underrum till $\mathbb{R}^n$.

En *bas* för ett underrum H i $\mathbb{R}^n$ är en linjärt oberoende uppsättning i H som spänner upp H.

T ex kolumnerna i en inverterbar $n \times n$ matris utgör bas för $\mathbb{R}^n$, eftersom de är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^n$.

Uppsättningen $\{\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n\}$ kallas standardbasen för $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \ , \dots \ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Underrum definierade av matriser

Kolumnrummet för en matris $A\ (mxn)$ skrivs Col A och är det underrum till $\mathbb{R}^m$ som spänns upp av kolumnerna i A.

För att finna en bas för kolumnrummet för A = $[a_1\ a_2\ \dots\ a_n]$ behöver vi eliminera allt linjärt beroende mellan kolumnerna genom att ta bort onödiga vektorer.
Vi kan ta som exempel matrisen A i Lay 2.2 övning 32:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$\uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow \quad \uparrow$$

pivotkolumner

Genom elementära radoperationer visas att A är radekvivalent med den reducerade trappstegsmatrisen B. I B är det lätt att se att pivotkolumnerna är linjärt oberoende och att kolumnerna $\mathbf{b_2}$ och $\mathbf{b_4}$ kan skrivas som linjärkombinationer av pivotkolumnerna: $\mathbf{b_2}$=-3 $\mathbf{b_1}$ och $\mathbf{b_4}$=3/2 $\mathbf{b_1}$+ 5/4 $\mathbf{b_3}$. $\mathbf{b_1}$ och $\mathbf{b_3}$ bildar alltså tillsammans en bas för Col B.

Underrum definierade av matriser

Men vi vet att elementära radoperationer ger samma lösningsmängd för Ax = 0 och Bx = 0. Alltså: $x_1\mathbf{a_1} + ... + x_n\mathbf{a_n} = 0 = x_1\mathbf{b_1} + ... + x_n\mathbf{b_n}$, det linjära beroendet mellan kolumnerna är detsamma i A och B. Man kan förstås också direkt visa att

$$\mathbf{a_2} = -3\mathbf{a_1} \quad \text{och} \quad \mathbf{a_4} = \frac{3}{2}\mathbf{a_1} + \frac{5}{4}\mathbf{a_3}$$

När pivotkolumnerna i A har identifierats genom radoperationer till trappstegsform har vi funnit en bas för Col A, nämligen pivotkolumnerna i A.

Matrisen B i exemplet visar att

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = x_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -5/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$ med x_2 och x_4 fria.

De två vektorerna till höger är alltså en bas för Nul A.

Underrum definierade av matriser

Radrummet för en matris A är mängden av alla linjärkombinationer av matrisens radvektorer och betecknas Row A.

Om matriserna A och B är radekvivalenta kan B skapas genom elementära radoperationer utgående från A och vice versa. Varje linjärkombination av rader i B är också en linjärkombination av rader i A, således är Row A identiskt Med Row B. Om B är i trappstegsform kan de övre raderna omöjligen bildas som Linjärkombinationer i rader längre ner. Se det tidigare exemplet:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

De nollskilda raderna i B bildar alltså en bas för Row A och Row B.

Koordinatsystem

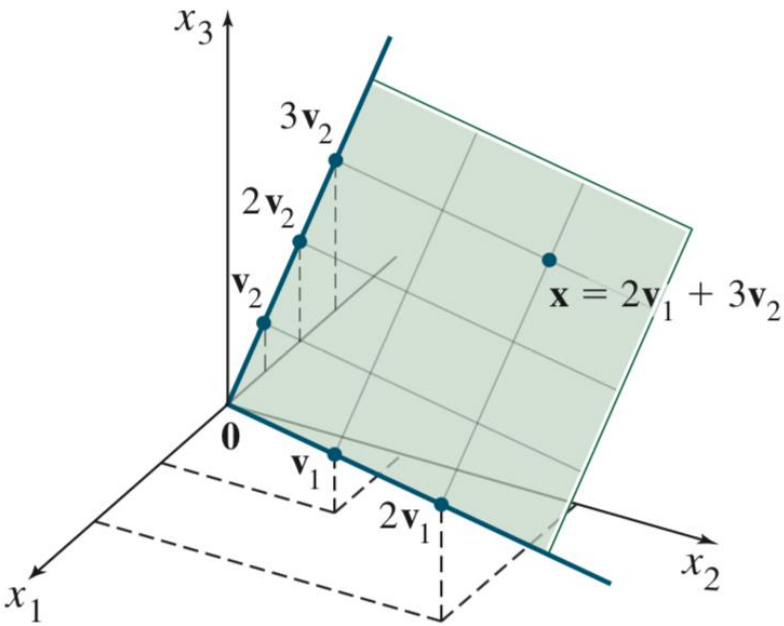


FIGURE 1 A coordinate system on a plane H in $\mathbb{R}^3$.

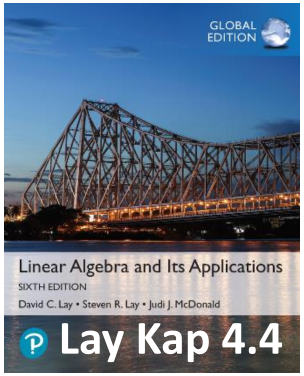
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är linjärt oberoende och spänner upp ett plan i $\mathbb{R}^3$, ett underrum.

Som ett alternativ till standardbasen i $\mathbb{R}^3$ kan vektorn $\mathbf{x}$ i detta plan entydigt beskrivas med basen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$:

$\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$

Koordinatsystem

Koordinatsystem



Om $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1} \; \ldots \; \boldsymbol{b_n}\}$ är en bas i V finns det för varje annan vektor $\boldsymbol{x}$ i V en linjär kombination basvektorer, skalade med $c_1, c_2, \ldots, c_n$ som ger ett unikt uttryck för $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b_1} + c_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{b_n}$$

Talen (vikterna) med vilka basvektorerna skalats $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ kallas *koordinater* för $\boldsymbol{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$, eller $\mathcal{B}$-koordinater.

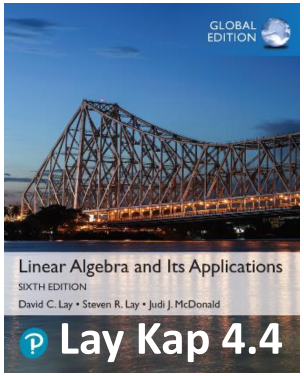
Vektorn $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ kallas koordinatvektorn eller $\mathcal{B}$-koordinatvektorn, för $\mathbf{x}$.

Byte mellan baser kan göras med koordinatbytesmatrisen $P_{\mathcal{B}}$

Ekvationen för att byta koordinater från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen i $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n})$

$$\boldsymbol{x} = P_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{x})_{\mathcal{B}}$$

Koordinatsystem



Exempel (Lay 2.9 2):

Basen B i $\mathbb{R}^2$ är given som $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ och $[x]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

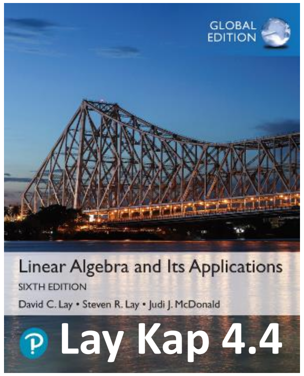
I standardbasen är $\mathbf{x} = -1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$

Allmänt $\mathbf{x} = P_{\mathrm{B}}[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}}$

P_{B} har linjärt oberoende kolumner och är alltså inverterbar, ekvationen för att byta koordinater från standardbasen till basen B är $[\mathbf{x}]_{\mathrm{B}} = P_{\mathrm{B}}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

Basbytet är en ett-till-ett avbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Koordinatsystem



När man finner en bas

$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ \dots \ \mathbf{b}_n\}$ för ett allmänt vektorrum V introduceras också ett koordinatsystem, som gör det möjligt att identifiera vektorer i V med koordinatvektorer i $\mathbb{R}^n$

Låt t.ex. $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ vara basen i rummet P_3 , polynom av graden högst 3.

ett polynom $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

Tydligen kan $p(t)$ då representeras av $[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, en vektor i det välbekanta $\mathbb{R}^4$.

Avbildningen mellan P_n och $\mathbb{R}^4$ är ett-till-ett och mot varje vektor i det ena rummet svarar en vektor i det andra. Rummen sägs vara isomorfa.