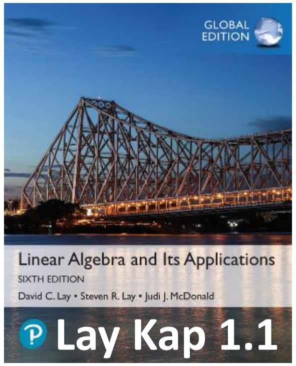
System av linjära ekvationer



Linjär ekvation med variablerna $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Koefficienterna a_i och talet b är reella
(eller komplexa) tal

Ett system av linjära ekvationer består av flera sådana ekvationer,
där samma variabler x_i ingår.

Exempel:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= \ \ 3 \end{aligned}$$

Detta system kan ses som två linjer som skär varandra
i en punkt (3,2) , vilket utgör systemets lösning.

System kan ha: exakt en lösning (se ovan)
ingen lösning
oändligt antal lösningar

Ett system av linjära ekvationer är konsistent om det finns lösning(ar).
Saknas lösning är systemet inkonsistent.

System av linjära ekvationer

Matrisnotation

Systemet nedan har 3 ekvationer och 3 variabler

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= -8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Detta skrivsätt kan ”förenklas” med matriser:

Koefficientmatris

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array} \end{array}$$

Utökad (”augmented”) systemmatris
(innehåller högerledet i ekv syst)

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{array} \end{array}$$

En $m \times n$ matris A har m rader och n kolumner. Elementen i matrisen betecknas a_{ij}= elementet på rad i, kolumn j.

System av linjära ekvationer

Gausselimination eller radreducering

I matrisform kan även mycket komplicerade linjära ekvationssystem lösas systematiskt med enkla metoder.

Elementära radoperationer för att reducera matriser:

1. Ersätt en rad med summan av denna rad och en multipel av en annan rad.
2. Låt rader skifta plats.
3. Multiplicera elementen i en rad med en skalär $\neq 0$.

Görs för att ersätta ett ekvationssystem med ett ekvivalent system (system med samma lösning), som är lättare att lösa.

Om en matris B kan erhållas från A genom en serie elementära radoperationer sägs A och B vara radekvivalenta. $A \sim B$

System av linjära ekvationer

Genom Gausselimination kan den utökade matrisen förenklas med elementära radoperationer på ett systematiskt sätt. I exempelmatrisen adderas t.ex. först -5 gånger den första raden till rad 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

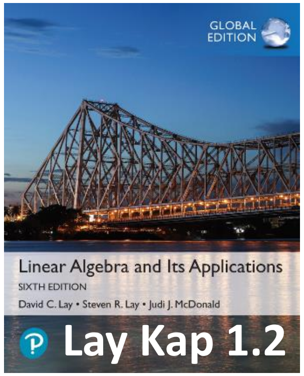
Därefter kan man dela rad 2 och 3 med 2 respektive 10 och sedan addera −1 gånger rad 2 till rad 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

På detta sätt har systemet förenklats till en trappstegsmatris.
Elementära radoperationer utifrån rad 3 och 2 ger vidare:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/3 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{bmatrix} \text{ motsvarande } \begin{cases} x_1 = 11/3 \\ x_2 = 8/3 \\ x_3 = 5/3 \end{cases}$$

System av linjära ekvationer



Trappstegsmatriser ("echelon form")

Villkor för en *trappstegsmatris*:

1. Alla icke-noll-rader står ovanför rader med bara nollor.
2. *Ledande elementet* i en rad står i en kolumn till höger om ledande element i raden ovanför. (Ett ledande element är det första icke-noll-elementet från vänster i en rad.)
3. I en kolumn är alla element under ett ledande element nollor.

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
0 & \bullet & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & *
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccccccc} & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \end{array}
\end{array}
$$

pivotkolumner

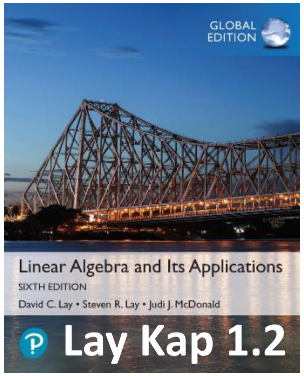
pivotkolumner

$\bullet \neq 0$ pivotposition

$*$ godtyckligt tal

En *pivot-position* är platsen i en matris som motsvaras av en ledande 1 i den reducerade trappstegsmatrisen. Kolumnen kallas pivot-kolumn. (pivot, fr. 'gångjärn', 'vändtapp')

System av linjära ekvationer



Reducerad Trappstegsmatris ("reduced echelon form")

Om en trappstegsmatris dessutom uppfyller följande villkor, kallas matrisen en *reducerad trappstegsmatris* ("row reduced echelon form")

1. Det ledande elementet i varje icke-noll-rad är 1.
2. Varje ledande 1 är det enda nollskilda elementet i den kolumnen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

pivotkolumner

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

pivotkolumner

1 i pivotpositionerna

$*$ godtyckligt tal

En radreducerad trappstegsmatris är unik, dvs varje matris är radekvivalent med bara en radreducerad trappstegsmatris.

En *pivot-position* är platsen i en matris som motsvaras av en ledande 1 i den reducerade trappstegsmatrisen.

System av linjära ekvationer

Parametrisk beskrivning av lösningarna till ett ekvationssystem

Antag att en reducerade trappstegsmatris till ett ekvationssystem med 3 ekvationer och 3 obekanta (x_1, x_2, x_3) ser ut så här:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det är den utökade koefficientmatrisen till systemet

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Lösningen är konsistent, men den tredje ekvationen ger ingen information vilket gör att vi inte kan bestämma alla 3 variablerna. En av variablerna kan då anses vara ”fri”, och vi kan skriva systemet som

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + 5x_3 \\ x_2 &= 4 - x_3 \\ x_3 & \text{ blir fri} \end{aligned}\right\}$$

x_3 kan anta alla värden och för varje nytt x_3 fås nya värden på x_1 och x_2. Detta ger oändligt många lösningar. Lösningarna ovan utgörs av en skärningen mellan 2 plan (en linje).

System av linjära ekvationer

Man ersätter ibland x_3 med t ex t för att poängtera att det är en parametrisk lösning.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 + 5t \\ x_2 &= 4 - t \end{aligned}\right\}$$

Existerar lösning och är den unik?
Systemet är konsistent omm (om och endast om) kolumnen längst till höger i den utökade koefficientmatrisen inte är en pivot-kolumn.
Eller: systemet är konsistent omm trappstegsmatrisen inte innehåller rader av typen $(0 \quad \ldots \quad 0 \quad b)$ där $b \neq 0$.

Om ett system är konsistent finns antingen 1) en unik lösning, omm inga fria variabler finns, eller 2) oändligt många lösningar, omm minst 1 fri variabel finns.

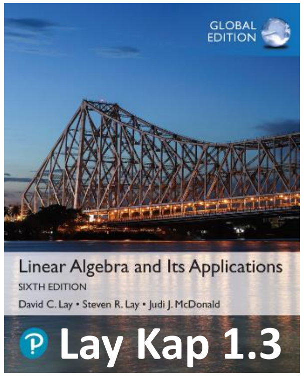
Om systemet är inkonsistent, finns ingen lösning. Motsvaras i $\mathbb{R}^3$ av plan som är parallella och aldrig skär varandra.

Att nå trappstegsmatris tar upp till $2n^3/3$ flops.

Att gå vidare till reducerad trappstege tar högst n^2

För stora *n*.
Se Lay p. 45 (6th ed.)

System av linjära ekvationer



Vektorekvationer

En vektor (i $\mathbb{R}^n$) kan även skrivas som en kolumnvektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$$

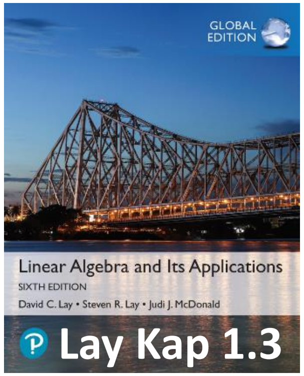
En vektor som bara innehåller nollor kallas *nollvektor*, ***0***.

Räkneregler för vektorer

$$\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\ c,d \in R:$$

$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$	$\mathrm{c}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$
$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	$(c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
$\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$	$c(\mathrm{d}\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
$\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}-\mathbf{u} = \mathbf{0}$	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

System av linjära ekvationer



Linjärkombination

En *linjär kombination* $\boldsymbol{y}$ av ett givet antal vektorer $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ kan bildas genom addition och skalning (multiplikation med skalär) av dessa vektorer:

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$$

Talen c_i är reella tal (inklusive noll), t ex variabler x_i.

Om $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p}$ finns i $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ kallar vi mängden av alla linjära kombinationer av $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p}$ för det (linjära) höljet av $(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$ eller $Span(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$, mängden sägs spännas upp av $(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$ och som vi senare ska se utgör den ett underrum av $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Med andra ord, $Span(\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_p})$ är samlingen av alla vektorer som kan skrivas

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_p\boldsymbol{v_p}$$

Uppenbarligen tillhör nollvektorn (med alla c_i=0) detta underrum.

System av linjära ekvationer

En vektorekvation kan skrivas $x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b}$

Så t.ex. kan vi skriva vårt tidigare ekvationssystem

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = -8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{som} \quad x_1\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}5\\-8\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-8\\10\end{bmatrix}$$

med $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ som kolumnerna i vår koefficientmatris och **b** som den sista kolumnen i den utökade matrisen. Problemet kan tolkas som att söka punkten där tre plan skär varandra, men också som att visa att **b** är en linjärkombination av $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ och att fastställa koefficienterna.

Not om beteckningar: i kursen kommer vi att försöka följa den konvention som används i läroboken. När matriser skrivs ut i komponenter används hakparenteser, det görs skillnad på radvektorer som [1,2,3] och kolumnvektorer som

$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ och en matris kan skrivas genom att kombinera ihop kolumnvektorer, som:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}\end{bmatrix}$$

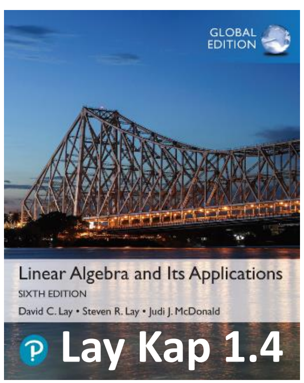
System av linjära ekvationer

Geometrisk tolkning av $Span$ i $\mathbb{R}^3$:

$\boldsymbol{v}$ är en nollskild vektor i $\mathbb{R}^3$. Då blir $Span(\boldsymbol{v})$ alla vektorer som ”skalar” med $\boldsymbol{v}$, dvs alla vektorer, inklusive nollvektorn, som ligger utefter den linje som $\boldsymbol{v}$ pekar ut.

Om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är två (olika) vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då blir $Span(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ alla vektorer som ligger i planet som definieras av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ (och går genom origo).

Matrisekvationer



För en $m \times n$ matris *A* med kolumner $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, och en vektor $\boldsymbol{x}$ i $\mathbb{R}^n$, kan man skriva

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$$

OBS Antalet kolumner i *A* måste vara lika med antalet element i $\boldsymbol{x}$.

System av linjära ekvationer

Matrisekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, för en vektor $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, har en lösning omm $\boldsymbol{b}$ är en linjär kombination av kolumnerna i A. Ett linjärt problem kan formuleras som ett ekvationssystem, en vektorekvation eller med matrisnotation.

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5x_3 \\ -8x_2 \\ -5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ 0 + 2x_2 - 8x_3 \\ 5x_1 + 0 - 5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

System av linjära ekvationer

Matrismultiplikation

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

Räkneregler:

Låt A vara en $m \times n$-matris, u och v vektorer i $\mathbb{R}^n$ ochb c en skalär:

$A(\mathbf{u}+\mathbf{v})=A\mathbf{u}+A\mathbf{v}$

$A(c\mathbf{u})=cA\mathbf{u}$

System av linjära ekvationer

Sammanfattning:

Ekvationssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots . a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots . a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots . a_{mn}x_n = b_m$$

Vektorekvation

$$\mathrm{x}_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \mathrm{x}_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots \mathrm{x}_1 \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrisekvation

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \ldots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

System av linjära ekvationer

Matrisekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, för en vektor $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, har en lösning omm $\boldsymbol{b}$ är en linjär kombination av kolumnvektorerna i A.

Sammanfattning (Teorem 4)
A är en $m{\times}n$ matris. Följande utsagor är då logiskt ekvivalenta, dvs för ett visst *A* är antingen alla utsagor sanna eller så är de falska.

- För varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en lösning.
- Varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ är en linjär kombination av *A*’s kolumner.
- Kolumnerna i *A* spänner upp $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$.
- *A* har ett pivot-element i varje rad.