IX1303 Tentamen 2021 08 26, Del 2: räknetal

Fullständiga lösningar ska redovisas

Skriv tydligt, motivera dina olika steg, gärna med en figur, och formulera ett svar till varje uppgift. *Avdrag kan ges för svårläst och illa motiverad lösning*, även om svaret är rätt!!

1. Den linjära transformen $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras enligt $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}$. Bestäm först matrisen för T relativt standardbasen för $\mathbb{R}^3$(2p) och beräkna sedan $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ (2p).

Låt $E = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ utgöra standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Eftersom

$[T(\boldsymbol{e_1})]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[T(\boldsymbol{e_2})]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $[T(\boldsymbol{e_3})]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir den efterfrågade matrisen $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Eftersom nu E är standardbasen, ges koordinaterna för varje vektor av dess komponenter. Alltså blir transformen av

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> Transformens matris blir $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och den transformerade vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. För rummet P_2 (andragradspolynom) definierar vi den inre produkten som

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Visa att vektorerna i $B = \left\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right\}$ utgör en ortogonal bas (2p) och bestäm sedan längden av dessa vektorer så att basen blir normerad (2p).

Inre produkten mellan de tre vektorerna blir

$$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} x dx \; = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle 1, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx \; = \left[\frac{1}{2}(x^3 - x)\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^3 - x)dx \; = \left[\frac{1}{2}(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2)\right]_{-1}^{1} = 0$$

Normen av vektorerna är $\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} dx} = \sqrt{2}$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{2/3}$$

$$\left\|\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right\| = \sqrt{\langle\frac{1}{2}(3x^2 - 1), \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(3x^2 - 1)^2 dx} = \sqrt{2/5}$$

Svar: Eftersom inre produkten är noll, är vektorerna ortogonala. Vektorernas normeras sedan genom att dividera 1, x och $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ med $\sqrt{2}$, $\sqrt{2/3}$, respektive $\sqrt{2/5}$.

3. Bestäm egenvärden till transformen $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2p) och hitta (om möjligt) baser till de korresponderande egenrummen (2p).

Karakteristiska ekvationen till T blir

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Egenvärdena blir $\lambda_1 = 1$ (algebraisk multiplicitet 2), $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$.

Tillhörande egenrum fås ur den reducerade matrisen

$$\lambda_1: (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet till λ_1 ges alltså t ex av $\left\{ r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, där vektorerna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är linjärt oberoende och kan då utgöra en bas egenrummet till λ_1. På samma sätt fås bas till egenrummen för λ_2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och λ_3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, som ju har dimensionen 1.

<u>Svar:</u> Egenvärdena blir $\lambda_1 = 1$ (algebraisk multiplicitet 2), $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$. Baser till egenrummen för dessa egenvärden kan vara vektorerna

för λ_1: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, λ_2: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ och för λ_3: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.