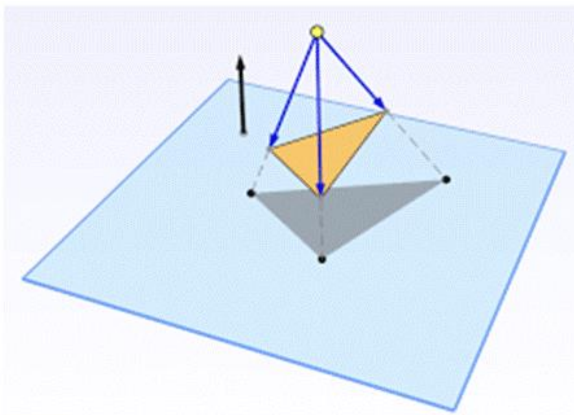
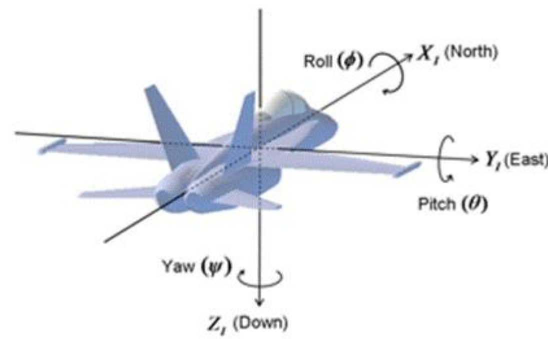
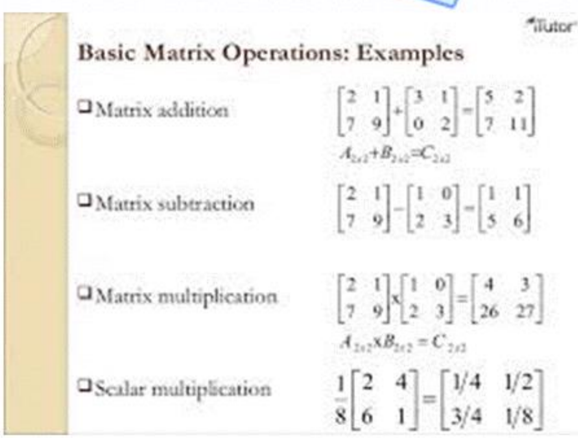
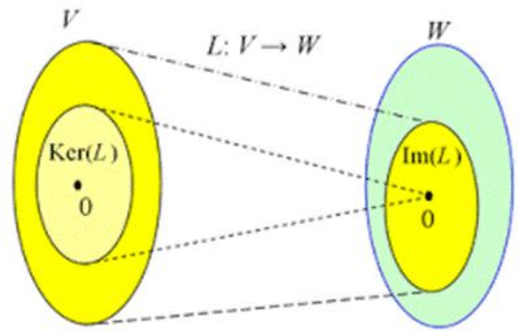
Algebra och Geometri, IX1303
Period 4, VT 2023









Vad är kursen bra för?

- Kursen ger en introduktion i linjär algebra med avstamp i klassisk geometri.

- Algebra från det arabiska ordet al-jabr, vilket betyder ”sätta ihop delar”. Geometri (grekiska) betyder ”mätning av jorden”.

- Linjär algebra används i otaliga tillämpningar för att lösa t ex ekvationssystem, eller att modellera och göra förutsägelser (prediktioner) av flöden och processer.

- Den ökande användningen av datorer har ökat behovet av algebra lavinartat.

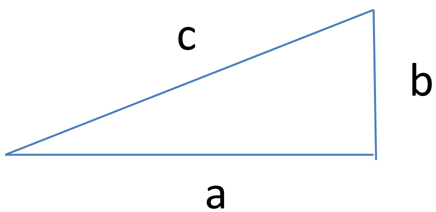
- Typiska moderna tillämpningar: datasökning, maskininlärning, datorgrafik

- Linjär algebra visar hur till synes helt olika problem i själva verket har liknande struktur och kan lösas på liknande sätt. Analogi med klassisk geometri hjälper vår intuition.

Fördelen med effektiv notation

Exempel 1:

Pythagoras' sats



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Bevis,
Euklides c:a 300 f.Kr. :

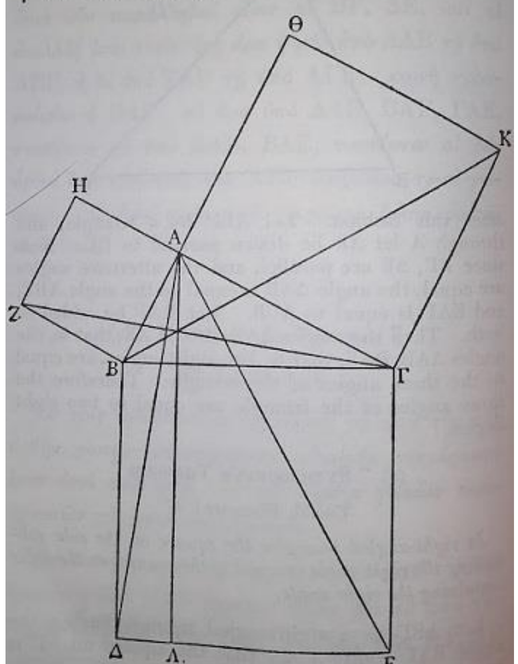
(c) "Pythagoras's Theorem"

Eucl. *Elem.* i. 47

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ



ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ᾽ εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καί [ἐστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·][1] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

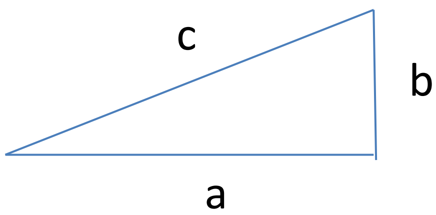
Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς

τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

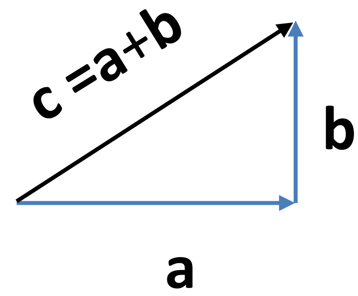
Fördelen med effektiv notation

Exempel 1:

Pythagoras’ sats



$$c^2 = a^2 + b^2$$



a och **b** vinkelräta : **a** · **b** = **b** · **a** = 0

Bevis,
med vektoraddition :

$$c^2 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) =$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a^2 + b^2 \quad \text{v.s.b.}$$

Fördelen med effektiv notation

Exempel 2:

Maxwells ekvationer

Maxwell 1864

$e+\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0$	(1)	Gauss' Law
$\mu\alpha=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}$ $\mu\beta=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}$ $\mu\gamma=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}$	(2)	Equivalent to Gauss' Law for magnetism
$P=\mu\left(\gamma\frac{dy}{dt}-\beta\frac{dz}{dt}\right)-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx}$ $Q=\mu\left(\alpha\frac{dz}{dt}-\gamma\frac{dx}{dt}\right)-\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy}$ $R=\mu\left(\beta\frac{dx}{dt}-\alpha\frac{dy}{dt}\right)-\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz}$	(3)	Faraday's Law (with the Lorentz Force and Poisson's Law)
$\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}=4\pi p'$ $\quad p'=p+\frac{df}{dt}$ $\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}=4\pi q'$ $\quad q'=q+\frac{dg}{dt}$ $\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}=4\pi r'$ $\quad r'=r+\frac{dh}{dt}$	(4)	Ampère-Maxwell Law
$P=-\xi p \quad Q=-\xi q \quad R=-\xi r$		Ohm's Law
$P=kf \quad Q=kg \quad R=kh$		The electric elasticity equation (**E** = **D**/ε)
$\frac{de}{dt}+\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}=0$		Continuity of charge

Modern notation

$$\nabla\cdot\overline{D}=\rho$$

$$\nabla\times\overline{H}=\overline{J}+\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\overline{B}=0$$

$$\nabla\times\overline{E}=-\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}$$

Fördelen med effektiv notation

Exempel 3:

Einstein 1905

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(\mathrm{N}-\frac{v}{c}\mathrm{Y}\right)\right\} &&-\frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(\mathrm{M}+\frac{v}{c}\mathrm{Z}\right)\right\},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{Y}-\frac{v}{c}\mathrm{N}\right)\right\} &= \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \zeta} &&-\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{N}-\frac{v}{c}\mathrm{Y}\right)\right\},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{Z}+\frac{v}{c}\mathrm{M}\right)\right\} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{M}+\frac{v}{c}\mathrm{Z}\right)\right\} &&-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}\left\{\beta\left(\mathrm{Y}-\frac{v}{c}\mathrm{N}\right)\right\} &&-\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\beta\left(\mathrm{Z}+\frac{v}{c}\mathrm{M}\right)\right\},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{M}+\frac{v}{c}\mathrm{Z}\right)\right\} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{Z}+\frac{v}{c}\mathrm{M}\right)\right\} &&-\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\beta\left(\mathrm{N}-\frac{v}{c}\mathrm{Y}\right)\right\} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \eta} &&-\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\beta\left(\mathrm{Y}-\frac{v}{c}\mathrm{N}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

Modern notation

$$\mathbf{F} = eL\mathbf{U}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exempel 4:

1700-tal

$$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})\cdot(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{11}b_{12}+a_{22}b_{12})\cdot(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})=$$
$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\cdot(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})$$

1900-tal

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B$$

Kursinformation

Schema

- 14 Föreläsningar
- 13 Övningar
- 3 Kontrollskrivningar (”krysstal”)

Kurslitteratur

- Calculus
  R.A. Adams & C. Essex, 10:de utg
  Kap 10.1-10.4
- Linear Algebra and its Applications, 6:te utg
  D.C. Lay, S.R. Lay, J.J. McDonald
  Kap1-6

Inlämningsuppgift 1.5 p

Examination

- Tenta 6 p
- Inlupp 1.5 p

Lärarteam

- Henric Bergsåker, Fö, Övn, Kontr
  henricb@kth.se
- Thomas Jonsson, Övn, Kontr
  johnso@kth.se
- Per Peterson, Övn, Kontr
  ppeter@kth.se

Assistent
Hampus Nyström Kontr. (övn)

Canvas

Kursnämnd

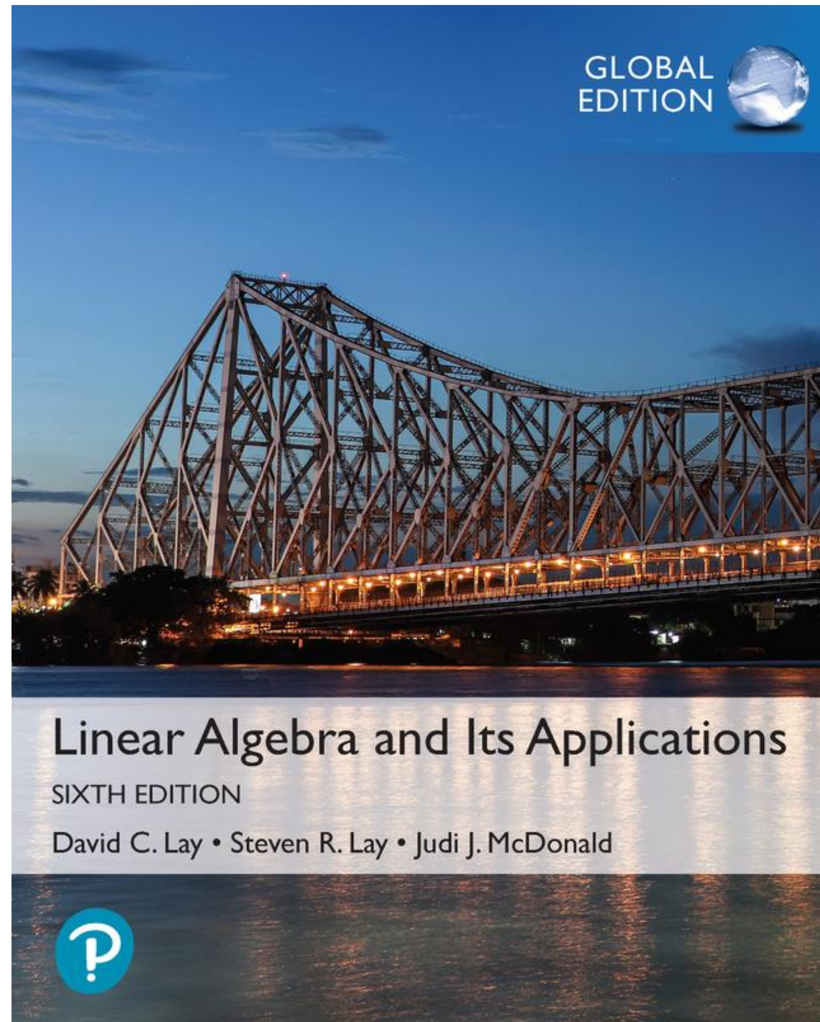
Lay

Linear Algebra and its Applications

6th edition

- Finns att köpa hos Kårbokhandeln, KTH campus eller internetbokhandeln AdLibris eller Bokus.
- ISBN 978-1-292-35121-6
- Är du intresserad av att hyra eller köpa boken digitalt? Se mer hos Bokab, https://www.bokab.net/

Pearson



Kursinnelhåll/Schema

Vecka	Dag	Datum	Starttid	Aktivitet	Innehåll	Kapitel	Info
v 12	Måndag	2023-03-20	10:15	Föreläsning	Geometri	Adams kap 10.1-10.4	F1
v 12	Tisdag	2023-03-21	13:15	Föreläsning	Linj ekv sys I	Lay kap 1.1-1.4	F2
v 12	Onsdag	2023-03-22	13:15	Övning	Geometri	Adams tal 10.1-10.4	Ö1
v 12	Fredag	2023-03-24	10:15	Föreläsning	Linj ekv sys II	Lay kap 1.5-1.10	F3
v 13	Onsdag	2023-03-29	13:15	Övning	Linj ekv sys I	Lay kap 1.1-1.4	Ö2
v 13	Torsdag	2023-03-30	15:15	Mastermässan			
v 14	Måndag	2023-04-03	10:15	Föreläsning	Matrisoperat I	Lay kap 2.1-2.4	F4
v 14	Tisdag	2023-04-04	13:15	Övning	Linj ekv sys II	Lay tal 1.5-1.10	Ö3
v 14	Onsdag	2023-04-05	13:15	Övning	Matrisoperat I	Lay tal 2.1-2.4	Ö4
v 14	Torsdag	2023-04-06	08:15	Kontrollskrivning			X-tal 1
v 14	Fredag	2023-04-07		Långfredag			
v 14	Lördag	2023-04-08		Påskafton			
v 14	Söndag	2023-04-09		Påskdagen			
v 15	Måndag	2023-04-10		Annandag påsk			
v 16	Måndag	2023-04-17	10:15	Föreläsning	Matrisoperat II	Lay kap 2.5-2.9	F5
v 16	Tisdag	2023-04-18	10:15	Övning	Matrisoperat II	Lay tal 2.5-2.9	Ö5
v 16	Tisdag	2023-04-18	13:15	Föreläsning	Determinanter	Lay kap 3.1-3.3	F6
v 16	Onsdag	2023-04-19	13:15	Övning	Determinanter	Lay tal 3.1-3.3	Ö6
v 16	Fredag	2023-04-21	10:15	Föreläsning	Vektorrum I	Lay kap 4.1-4.4	F7
v 17	Tisdag	2023-04-25	13:15	Övning	Vektorrum I	Lay tal 4.1-4.4	Ö7
v 17	Onsdag	2023-04-26	13:15	Föreläsning	Vektorrum II	Lay kap 4.5-4.9	F8
v 17	Torsdag	2023-04-27	10:15	Övning	Vektorrum II	Lay tal 4.5-4.9	Ö8
v 17	Fredag	2023-04-28	08:15	Kontrollskrivning			X-tal 2
v 18	Måndag	2023-05-01		Första maj			
v 18	Tisdag	2023-05-02	13:15	Föreläsning	Egenvärden I	Lay kap 5.1-5.4	F9
v 18	Onsdag	2023-05-03	10:15	Övning	Egenvärden I	Lay tal 5.1-5.4	Ö9
v 18	Onsdag	2023-05-03	13:15	Föreläsning	Egenvärden II	Lay kap 5.5-5.8	F10
v 18	Torsdag	2023-05-04	10:15	Övning	Egenvärden II	Lay tal 5.5-5.8	Ö10
v 19	Måndag	2023-05-08	10:15	Föreläsning	Ortogonalitet I	Lay kap 6.1-6.4	F11
v 19	Tisdag	2023-05-09	10:15	Projektarbete			P1
v 19	Onsdag	2023-05-10	13:15	Övning	Ortogonalitet I	Lay kap 6.1-6.4	Ö11
v 19	Fredag	2023-05-12	10:15	Föreläsning	Ortogonalitet II	Lay kap 6.5-6.8	F12
v 20	Måndag	2023-05-15	10:15	Övning	Ortogonalitet II	Lay tal 6.5-6.8	Ö12
v 20	Måndag	2023-05-15	13:15	Föreläsning	Repetition		F13
v 20	Tisdag	2023-05-16	13:15	Övning	Reserv	Gamla tentor	Ö13
v 20	Onsdag	2023-05-17	08:15	Kontrollskrivning			X-tal 3
v 20	Torsdag	2023-05-18		Kristi him.			
v 21	Måndag	2023-05-22	10:15	Föreläsning	Reserv	Gamla tentor	F14
v 21	Lördag	2023-05-27		Pingstafton			
v 21	Söndag	2023-05-28		Pingstdagen			
v 22	Fredag	2023-06-02	08:00	Tentamen			

Salar:

Föreläsningar i sal A, Östen Mäkitalo

Övningar i salarna Ka-303, 304, 308 utom 6/4: Ka-204,303,304 och 19/4: sal A och Ka-304

Kontrollskrivningar i Ka-204,303,304,308

Räkneövningar

På räkneövningarna kommer nedanstående tal att gås igenom (i mån av tid).

Övn.	Bok Kapitel.avsnitt - innehåll	Tal
1	AE 10.1-Analytisk geometri 3D	3, 5, 18, 22, 24
	AE 10.2-Vektorer	1, 2, 10, 13, 16, 19
	AE 10.3-Kryssprodukt	1, 2, 3, 5, 8, 11, 17
	AE 10.4-Plan, linjer	2, 6, 7, 16, 27
2	Lay 1.1-System av linjära ekvationer	3, 11, 14, 22, 33, 34, 35
	Lay 1.2-Matriser, radreducering	4, 12, 23, 35, 44
	Lay 1.3-Vektorekvationer	5, 14, 18, 21, 35
	Lay 1.4-Matrisekvationer	8, 13, 21, 36, 40
3	Lay 1.5-Lösningar till linjära system	5, 19, 48, 52
	Lay 1.6-Tillämpningar	1, 4, 6, 11
	Lay 1.7-Linjär oberoende	1, 5, 8, 11, 32
	Lay 1.8-Linjära transformer	2, 5, 13, 14, 15, 16, 41
	Lay 1.9-Matriser för linjära transformer	2, 4, 7, 14
	Lay 1.10-Exempel linjära ekvationssystem	2, 7, 14
4	Lay 2.1-Matrisoperationer	2, 4, 11, 25, 35
	Lay 2.2-Matrisinvers	3, 4, 30, 35, 36
	Lay 2.3-Inverterbara matriser	1, 5, 6, 21, 44
	Lay 2.4-Blockmatriser	10, 23
5	Lay 2.5-Faktorisering	2, 3, 8, 12, 26
	Lay 2.6-Leontief-modellen	1
	Lay 2.7-Exempel datorgrafik	3, 9, 10, 11
	Lay 2.8-Underrum	5, 7, 8, 15, 16, 24
	Lay 2.9-Dimension och rang	1, 2, 4, 7, 9
6	Lay 3.1-Intro determinanter	1, 6, 15, 19, 22
	Lay 3.2-Determinanters egenskaper	5, 11, 24, 40, 42
	Lay 3.3-Cramers regel, geometritillämpningar	1, 2, 5, 19, 24, 29
7	Lay 4.1-Vektorrum	2, 3, 9, 13, 17, 21
	Lay 4.2-Nollrum, kolumnrum	2, 3, 7, 9, 24, 26, 45
	Lay 4.3-Linj oberoende set, baser	3, 10, 12, 13, 20, 38
	Lay 4.4-Koordinatsystem	1, 4, 7, 10, 13, 25, 29
8	Lay 4.5-Dimension, vektorrum	1, 4, 10, 27
	Lay 4.6-Basbyten	2, 5, 7, 13
	Lay 4.7-Digital Signal behandling	
	Lay 4.8-Tillämpning: differensekvationer	1, 3
9	Lay 5.1-Egenvektorer, egenvärden	1, 4, 7, 18, 20, 21
	Lay 5.2-Karakteristiska ekvationen	1, 2, 5, 9
	Lay 5.3-Diagonalisering	2, 5, 7, 12
	Lay 5.4-Linjära transformer	1, 2, 15
10	Lay 5.5-Komplexa egenvärden	2, 3, 7, 12, 21
	Lay 5.6-Diskreta dynamiska system	1, 3, 5, 10
	Lay 5.7-Tillämpning: differentialekvationer	1, 3, 9
	Lay 5.8-Uppskatta egenvärden	2, 3
11	Lay 6.1-Inre produkt, norm	1, 2, 4, 9, 13, 24
	Lay 6.2-Ortogonala set	3, 4, 6, 12, 16
	Lay 6.3-Ortogonala projektioner	2, 4, 11, 20
	Lay 6.4-Gram-Schmidts process	2, 4, 8, 10, 13
12	Lay 6.5-Minsta kvadratmetoden	1, 4, 8, 15, 33
	Lay 6.6-Tillämpning: linjära modeller	1, 2, 12
	Lay 6.7-Inre produktrum	1, 2, 3
	Lay 6.8-Tillämpning: inre produktrum	1, 2, 3, 5

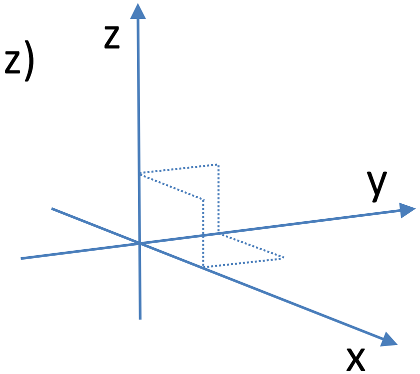
AE-R.A. Adams and C. Essex, Calculus, 8th ed.

Lay-D.C. Lay, S.R. Lay, and J.J. McDonald, Linear Algebra and its Applications, **OBS 6th ed**.

- Tre övningsgrupper, för indelning se Canvas.
- Talen i Lay refererar till ed. 6. Lista över i stort sett motsvarande i ed. 5, Canvas.
- Lösningar läggs upp på Canvas efterhand, nya eller gamla.

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

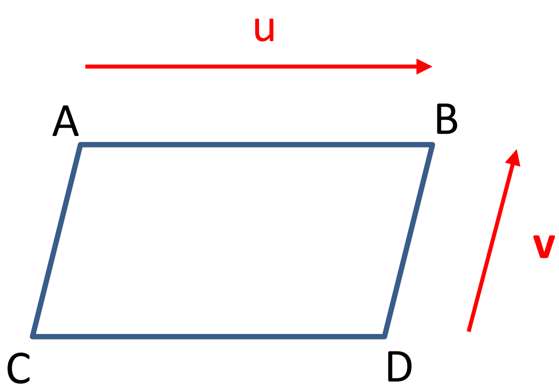
Cartesiskt koordinatsystem med 3 variabler (x, y, z)
Parvis vinkelräta, Högerregeln
$\mathbb{R}$ - reella rummet
$\mathbb{R}^1$- längs en linje, $\mathbb{R}^2$- planet, $\mathbb{R}^3$- rummet
Kan generaliseras till n-dimensionella rum, $\mathbb{R}^n$



Avstånd *r* mellan två punkter, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Vektorer definieras av längd (belopp) och riktning, *obundna i rummet*

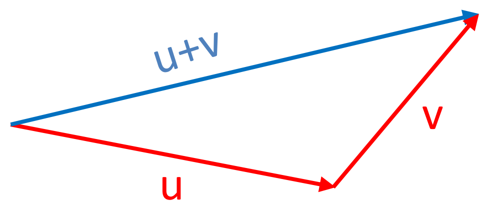


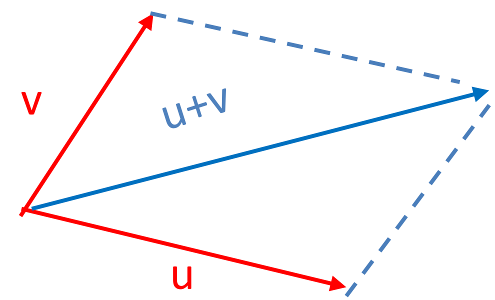
$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\mathbf{v} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$

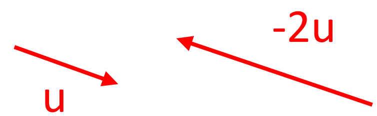
Adams 10.1-4 Analytisk geometri

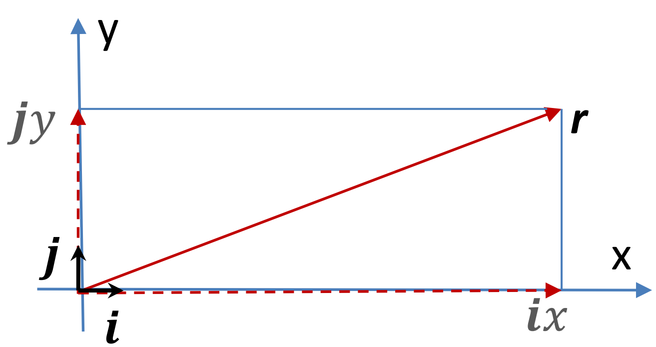
Vektoraddition





Multiplikation med skalär





En vektor $\boldsymbol{r}$ kan skrivas som en (linjär) kombination av enhetsvektorerna:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

Enhetsvektorerna är normerade så att de har lägden 1. Normalt används vinkelräta enhetsvektorer. Dessa skrivs ofta också t.ex. som: $\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z}$ eller $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$

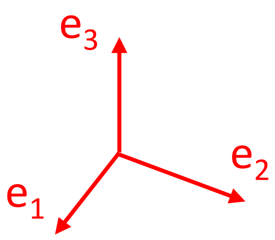
Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Längden hos en vektor $\mathbf{u}$ skrivs som $|\mathbf{u}|$ eller ibland som u (utan fetstil eller vektorstreck).

Vektorn $\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ har alltså längden 1 men samma riktning som $\mathbf{u}$.

Vi kallar $\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ för en enhetsvektor.

En uppsättning enhetsvektorer kan med fördel användas som en bas i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$.



En godtycklig vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^3$ kan då skrivas som en vektorsumma:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2} + u_3\mathbf{e_3}$$

där de reella talen u_1, u_2, u_3 kallas för koordinater och vektorn också kortare kan skrivas $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Det vanligaste är att välja en bas av enhetsvektorer som dels är vinkelräta mot varandra: $\mathbf{e_1} \perp \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_2} \perp \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_3} \perp \mathbf{e_1}$, dels bildar ett högersystem (positivt orienterat).

En sådan bas kallas för en positivt orienterad ON-bas (ortonormerad bas).

Lay 4.1, allmänna vektorrum

Räkneregler för vektorer (kan också användas som en allmännare definition av vektorer och vektorrum (linjära rum)).

En icke-tom mängd L av element **u**, **v**, **w**... sägs utgöra ett vektorrum över de reella talen om:

Det finns en operation "+" definierad så att

$\mathbf{u},\mathbf{v} \in L \Rightarrow (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in L$ och det ska gälla:

$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

Det finns ett nollelement **0** i L, sådant att

$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in L$.

Till varje $\mathbf{u} \in L$ finns ett $-\mathbf{u} \in L$ sådant att

$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Vidare finns en operation "$\cdot$" sådan att för alla $\mathbf{u},\mathbf{v} \in$ L och $\lambda, \mu \in$ R gäller:

$\lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu)\cdot\mathbf{u}$

$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

$(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{u} = \lambda\cdot\mathbf{u}+\mu\cdot\mathbf{u}$

$\lambda\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \lambda\cdot\mathbf{u}+\lambda\cdot\mathbf{v}$

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Skalärprodukten av två vektorer **u** och **v** i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ kan med fördel definieras som:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|cos\theta$$

där θ är den mellanliggande vinkeln och $|\boldsymbol{u}|$ och $|\boldsymbol{v}|$ står för vektorernas längd.
Om vektorerna är vinkelräta är $\cos\theta = 0$ och därmed $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$.

Om vi skriver $\mathbf{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ så:

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)\cdot(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) =$

$= u_1v_1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 + u_2v_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 + u_1v_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 + u_2v_1\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 =$

$u_1v_1 + u_2v_2$

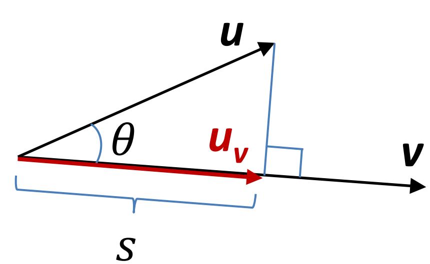
eftersom $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_i = 1$ och $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = 0$ om $i \neq j$.

Så :

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

är en alternativ definition som fungerar bra

även i allmänna $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots u_nv_n$



Skalär projektion:

$$s = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}|\cos\theta$$

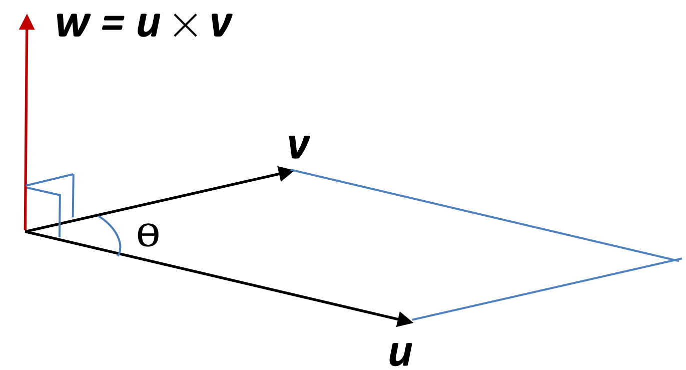
Vektoriell projektion:

$$\mathbf{u}_\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\cos\theta\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

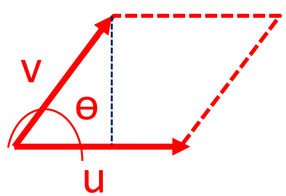
Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Kryssprodukt (vektorprodukt) är definierad bara i $\mathbb{R}^3$.
Två vektorer ***u*** och ***v*** bildar ett plan om de ej är parallella.
Då finns en tredje vektor $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ som uppfyller de 3 villkoren:

1) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v}=0$
2) $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta$
3) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ följer högerregeln

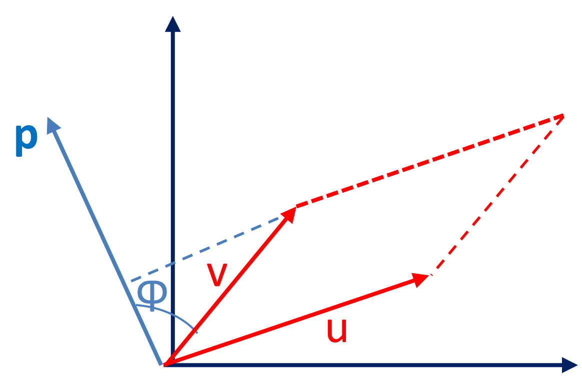


Parallellogrammens area
A= $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\Phi$



Alltså:
A= $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$

Eller:



$\mathbf{u}=(x_u\,,\,y_u)$
$\mathbf{v}=(x_v\,,\,y_v)$
$\mathbf{p}=(-y_u\,,\,x_u)$
$|\mathbf{p}|=|\mathbf{u}|$

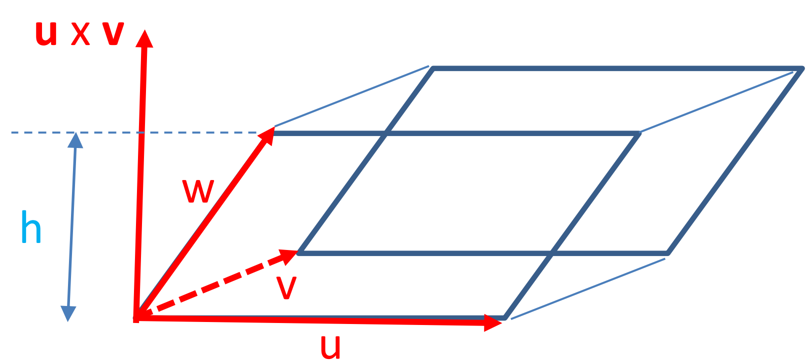
A= $|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\Phi = |\mathbf{p}|\,|\mathbf{v}|\cos\Phi =$
$= \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = x_u\, y_v - y_u x_v$

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Skalär trippelprodukt

En parallellepiped spänns upp av vektorerna **u**,**v** *och* **w**.

Dess volym är basytan x höjden h.
Basytan är som vi har sett



|**u** x **v**|

Tydligen kan volymen skrivas som:

$V = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Determinanter 2x2 och 3x3 definieras av:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Om (a,b) och (c,d) tolkas som koordinaterna för två vektorer ger denna determinant alltså arean för den parallellogram de spänner upp.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{=aei+cdh+bfg-ceg-afh-bdi.}$$

I Adams visas att om $\mathbf{u}=\mathrm{u}_1\mathbf{e_1}+u_2\mathbf{e_2}+u_3\mathbf{e_3}$

och $\mathbf{v}=\mathrm{v}_1\mathbf{e_1}+v_2\mathbf{e_2}+v_3\mathbf{e_3}$ i någon ON-bas $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$ (högersystem)

kan $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ skrivas som

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \mathrm{u}_1 & u_2 & u_3 \\ \mathrm{v}_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

, vilket är mycket användbart för att räkna ut kryssprodukten.

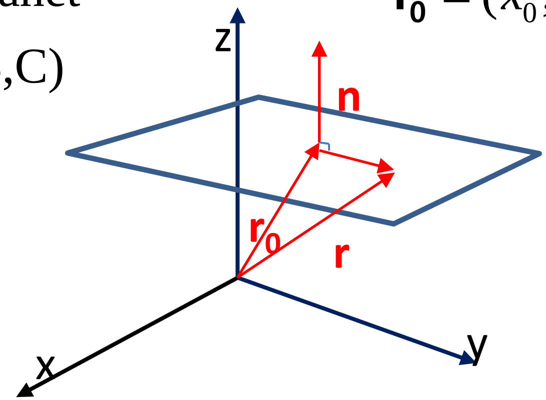
Om två rader eller två kolumner byter plats så byter determinanten tecken.
Om två rader eller två kolumner är identiska så är determinanten noll.

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Formler för plan och linjer i $\mathbb{R}^3$

Ett plan kan definieras t.ex. av en punkt P_0 i planet plus en normalvektor **n** till planet. Om **n**=(A,B,C) så $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r_0})=0$, alltså

$\mathbf{r_0}=(x_0, y_0, z_0)$

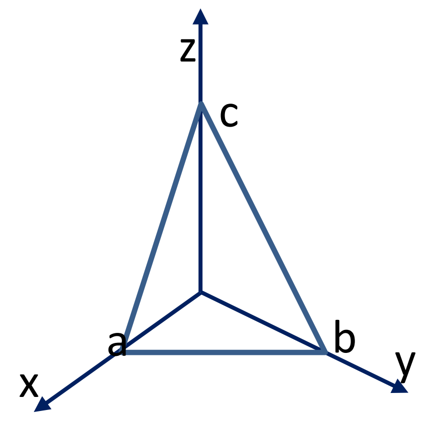


$\mathrm{A}(\mathrm{x}\text{-}\mathrm{x}_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

En standardekvation för planet blir då:

$\mathrm{Ax}+By+Cz=D$

med $\mathrm{D}=\mathrm{Ax}_0+By_0+Cz_0$



En ekvation för planet kan också skrivas utgående från skärningspunkterna med koordinataxlarna:

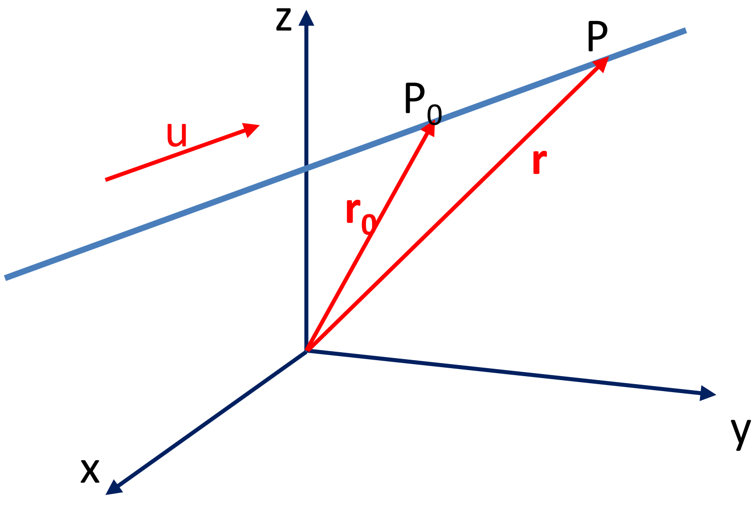
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad \mathrm{a,b,c} \neq 0$$

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Formler för plan och linjer i $\mathbb{R}^3$

En linje kan definieras t.ex. av en punkt P_0 på linjen plus en riktningsvektor **u** som är parallell med linjen.

$\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$



För alla punkter **r** på linjen:

$\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r_0} = t \cdot \mathbf{u}$

för något t: $-\infty < t < \infty$

$$x = x_0 + tu_1$$

$$y = y_0 + tu_2$$

$$z = z_0 + tu_3$$

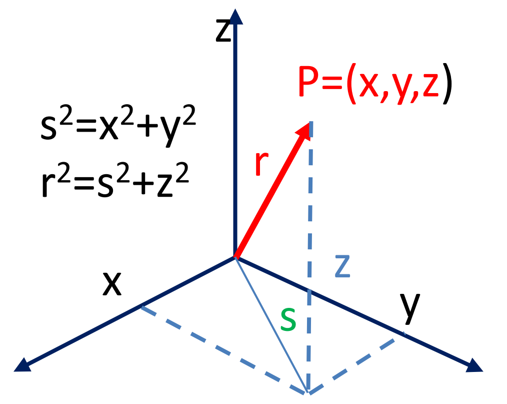
Man kan också eliminera parametern t och skriva linjens ekvation som:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

vilket kallas för standardformen

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Formler för avstånd i $\mathbb{R}^3$



Vi kan identifiera punkten P med ortsvektorn

$\mathbf{r} = OP$ och dess koordinater

$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad : \quad P = (x, y, z).$

Avståndet $r = |\mathbf{r}|$ från Origo till P är

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Analogt är avståndet mellan $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Adams 10.1-4 Analytisk geometri

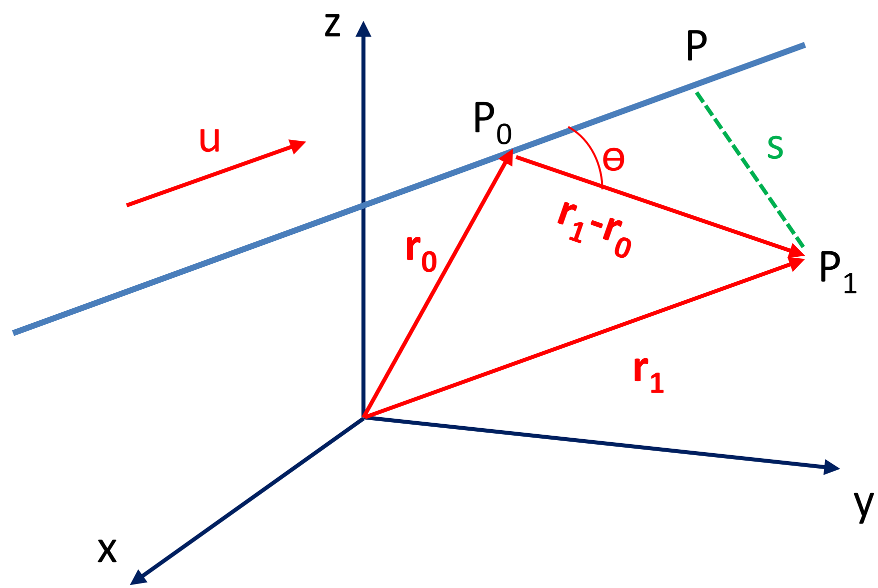
Formler för avstånd i $\mathbb{R}^3$

Med avståndet mellan en punkt och en linje avses det kortaste avståndet. Avståndet s mellan punkten P_1 och linjen L är alltså längden för den mot L vinkelräta vektorn PP_1 som måste finnas för någon punkt P på linjen.

Om linjen definieras av punkten P_0 och riktningsvektorn $\mathbf{u}$ så:

$$s = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r_0}| \sin\theta =$$

$$= \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r_0}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$



Adams 10.1-4 Analytisk geometri

Formler för avstånd i $\mathbb{R}^3$

Med avståndet mellan en punkt och ett plan avses det kortaste avståndet.

Om ekvationen för planet på standardform är

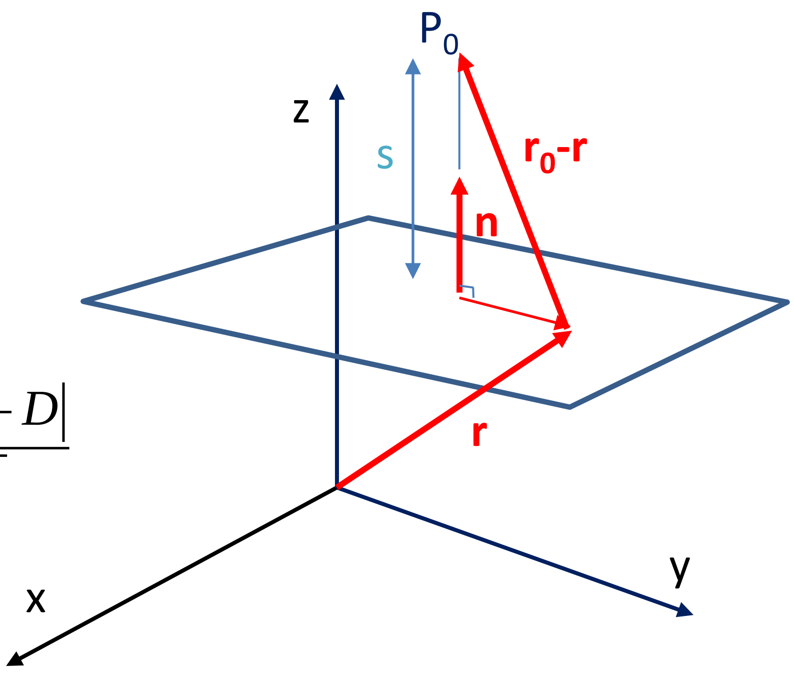
$Ax + By + Cz = D$

så är

$\mathbf{n} = (A, B, C)$ en normalvektor.

Det kortaste avståndet från en punkt (x_0, y_0, z_0) till detta plan är

$$s = \frac{|\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r_0} - \mathbf{r})|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r_0} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Adams 10.1-4 Analytisk geometri

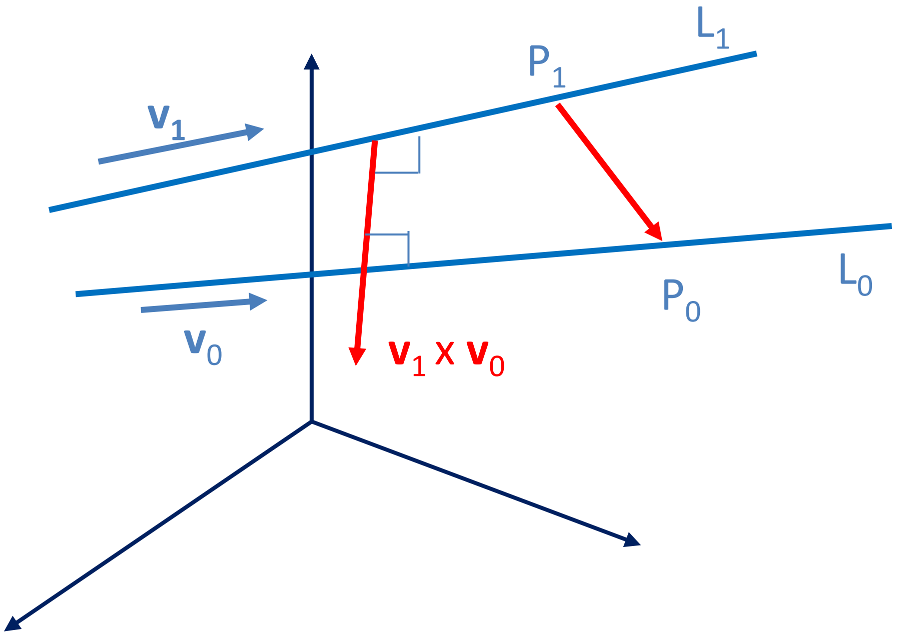
Formler för avstånd i $\mathbb{R}^3$

Med avståndet mellan två linjer avses det kortaste avståndet.

Om två linjer är givna av:

$L_0: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t_0\mathbf{v_0}$

$L_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + t_1\mathbf{v_1}$



så karakteriseras den kortaste förbindelselinjen mellan dem av att den är vinkelrät mot båda.

En vekor som är vinkelrät mot båda linjerna är $\mathbf{v_0} \times \mathbf{v_1}$

Avståndet mellan linjerna blir därför projektionen:

$$d = \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v_0} \times \mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_0} \times \mathbf{v_1}|}$$