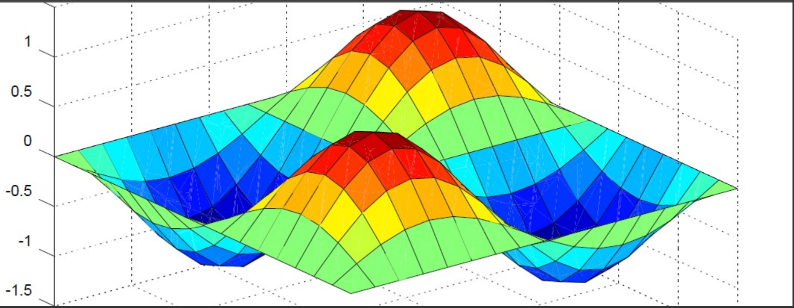
Projekt 1

Arbeiten mit OpenMP und FEM

Thore Mehr, Fabian Miltenberger, Sébastien Thill | 11.01.2017

LEHRSTUHL FÜR RECHNERARCHITEKTUR UND PARALLELVERARBEITUNG (ITEC)



Gliederung

Aufgabe 1 – OpenMP

Test

Aufgabe 2 – Tools

Karlsruher Institut für Technologie

- A
- B
- C

Aufgabe 3 a)

- Speedup $S(n)$
  Der Geschwindigkeitszuwachs gegenüber einer sequentiellen Ausführung:

$$S(n) = \frac{T(1)}{T(n)}$$

- Efficiency $E(n)$
  Beschleunigung pro Kern:

$$E(n) = \frac{S(n)}{n} = \frac{T(1)}{n \cdot T(n)}$$

Aufgabe 3 a)

- Mehraufwand $R(n)$
  Durch Parallelisierung entstehender Aufwand:

$$R(n) = \frac{P(n)}{P(1)}$$

- Parallelindex $I(n)$
  Operationen pro Zeiteinheit:

$$I(n) = \frac{P(n)}{T(n)}$$

- Auslastung $U(n)$
  Mehraufwand pro Prozessor:

$$U(n) = \frac{I(n)}{n} = R(n) \cdot E(n) = \frac{P(n)}{n \cdot T(n)}$$

Aufgabe 3 b)

Fehlerquellen durch Parallelisierung:

- Race Condition
  Wettlaufsituationen, das Ergebnis hängt von konkreter Ausführungsreihenfolge ab
- Dead Lock
  Verklemmung dadurch, dass Prozesse auf Freigabe von Resourcen warten, die von anderen Prozessen gehalten werden, die ebenfalls warten
- Bibliotheken
- Messeffekte
- Cacheeffekte

Aufgabe 3 c)

Beschleuniger	Parallelität	Anwenderfreundlichkeit
CPU	Niedrig	Gut
GPU	Sehr hoch	Mittel
FPGA	Hoch	Abhängig von Bibliotheken
MIC	(Sehr) hoch	Gut

- **CPU**: Großer Instruktionssatz, Out-of-Order, selten mehr als 8 CPU Kerne, „gewöhnliche” Programmierung
- **GPU**: Verbreitet, keine komplexen Befehle, massive Parallelität, *SIMD*, *CUDA* und *OpenCL*.
- **FPGA**: Beliebige Eigenschaften, Testen von Chips, „multifunktionelle” Beschleunigungskarte, *OpenCL* oder spezielle Bibliotheken
- **MIC**: Gewöhnliche x86 Architektur, *OpenMP* oder *OpenCL*

Aufgabe 4 – Gauß-Seidel-Verfahren

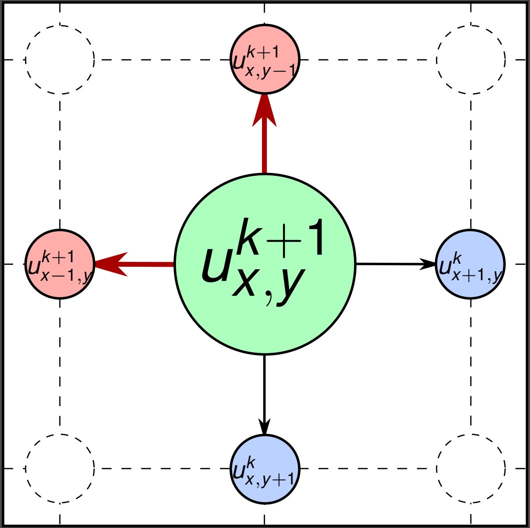
- Löst Gleichungssysteme der Form

$$Au = h^2 f$$

nach $u \in \mathbb{R}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $h \in \mathbb{R}$,$f \in \mathbb{R}^n$

- Bei uns: A, h Abhängigkeit von Gitterkonstante h gegeben, f abhängig von Problem
- A beschreibt Abhängigkeit eines Gitterpunkts zu 4 Nachbarpunkten $\Rightarrow$dünn besetzt
- Problemgröße ist $n = m \times m$, mit m Seitenlänge des Gitters
- Iterativ, $u^k_{x,y} = u^k_j$ is k-te Iterierte für Gitterpunkt x, y bzw. Eintrag j

Aufgabe 4 – Abhängigkeiten



Aufgabe 4 – Abhängigkeiten

Nach GSV:

$$u_j^{k+1} := \frac{1}{a_{j,j}}(h^2 f_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,1} u_i^{k+1} - \sum_{i=j+1}^{n} a_{j,i} u_i^k)$$

Zerfällt durch Struktur von A und Rand (mit $d := m - 2$) zu:

Pseudocode

```
double sum = h * h * f[j];
if (j % d > 0) sum += u[j - 1]; // Linker Nachbarknoten
if (j % d < d - 1) sum += u[j + 1]; // Rechter Nachbarknoten
if (j / d > 0) sum += u[j - d]; // Oberer Nachbarknoten
if (j / d < d - 1) sum += u[j + d]; // Unterer Nachbarknoten
u[j] = sum / 4;
```

Aufgabe 4 – Abbruchkriterium

Annahme: Veränderung der Iterierten korreliert mit Abstand von Lösung
$\rightarrow$ Breche ab, sobald Änderung von u^k zu u^{k+1} gering, also:

$$\|u^{k+1} - u^k\|_{max} < \varepsilon_{Error}$$

Wir verwenden $\varepsilon_{Error} = 1 \times 10^{-6}$

Aufgabe 4 – Parallelisierung

Nacheinander, zuerst alle grauen Felder, dann die weißen:

$u_{1,1}^{k+1}$	$u_{2,1}^{k+1}$	$u_{3,1}^{k}$	$u_{4,1}^{k}$	$u_{5,1}^{k-1}$	$u_{6,1}^{k-1}$	$u_{7,1}^{k-2}$
$u_{1,2}^{k+1}$	$u_{2,2}^{k}$	$u_{3,2}^{k}$	$u_{4,2}^{k-1}$	$u_{5,2}^{k-1}$	$u_{6,2}^{k-2}$	$u_{7,2}^{k-2}$
$u_{1,3}^{k}$	$u_{2,3}^{k}$	$u_{3,3}^{k-1}$	$u_{4,3}^{k-1}$	$u_{5,3}^{k-2}$	$u_{6,3}^{k-2}$	$u_{7,3}^{k-3}$
$u_{1,4}^{k}$	$u_{2,4}^{k-1}$	$u_{3,4}^{k-1}$	$u_{4,4}^{k-2}$	$u_{5,4}^{k-2}$	$u_{6,4}^{k-3}$	$u_{7,4}^{k-3}$
$u_{1,5}^{k-1}$	$u_{2,5}^{k-1}$	$u_{3,5}^{k-2}$	$u_{4,5}^{k-2}$	$u_{5,5}^{k-3}$	$u_{6,5}^{k-3}$	$u_{7,5}^{k-4}$
$u_{1,6}^{k-1}$	$u_{2,6}^{k-2}$	$u_{3,6}^{k-2}$	$u_{4,6}^{k-3}$	$u_{5,6}^{k-3}$	$u_{6,6}^{k-4}$	$u_{7,6}^{k-4}$
$u_{1,7}^{k-2}$	$u_{2,7}^{k-2}$	$u_{3,7}^{k-3}$	$u_{4,7}^{k-3}$	$u_{5,7}^{k-4}$	$u_{6,7}^{k-4}$	$u_{7,7}^{k-5}$

Aufgabe 4 – Performance

Ermittelt auf dem *i82sn07* Rechner mit 32 Kernen:

Problem n	Seq. Zeit	2 Threads T(2)	S(2)	4 Threads T(4)	S(4)	...	32 Threads T(32)	S(32)
225	0,005	0,007	0,357	0,008	0,625	...	1,361	0,0389
961	0,053	0,056	0,473	0,049	1,08	...	4,041	0,178
⋮	⋮	⋮		⋮		...	⋮	
65.025	115	81	1,42	45,3	2,54	...	25,33	4,54
261.121	1340	943	1,42	504	2,67	...	177	7,57

Aufgabe 5 a)

Gegeben:

$$-\Delta u(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega = (0,1)^2, u(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma$$

Die Bedingungen:

- Ω beschränktes Gebiet
- Γ hinreichend glatt
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Aufgabe 5 b)

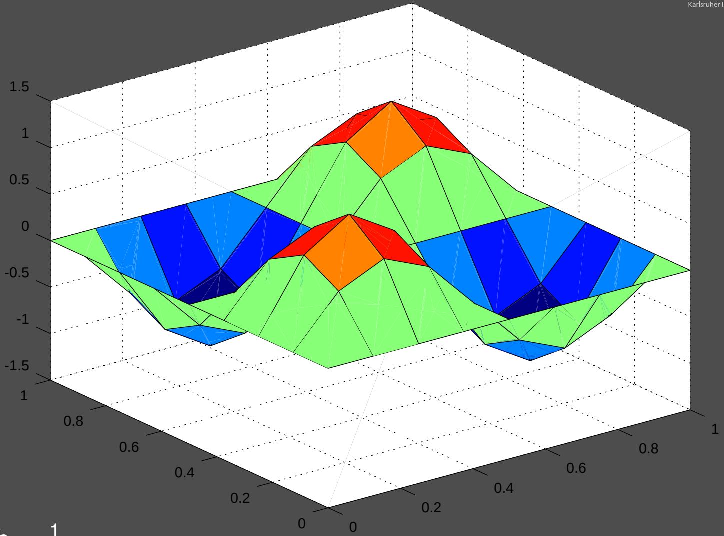
Gesucht ist f mit

$$u(x,y) = \sin(2M\pi x)\sin(2N\pi y)$$

Anwendung des *Laplace-Operators* Δ:

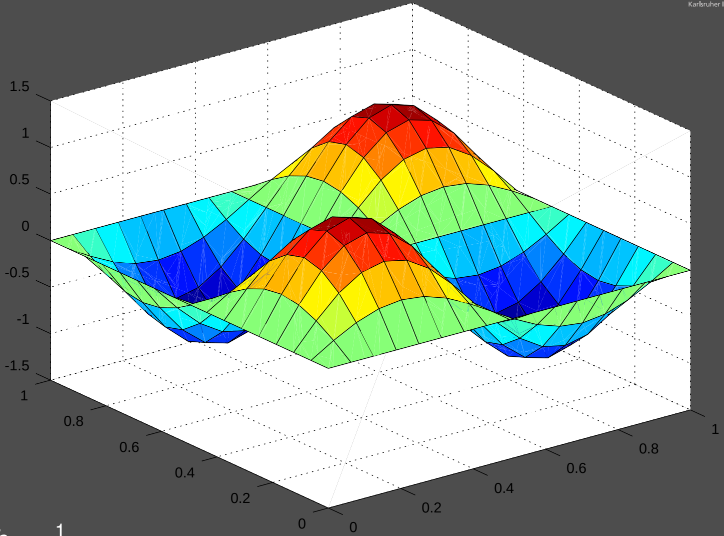
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= -\Delta u(x,y) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y^2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}(2M\pi\cos(2M\pi x)\sin(2N\pi y)) - \frac{\partial}{\partial y}(2N\pi\sin(2M\pi x)\cos(2N\pi y)) \\
&= 4M^2\pi^2\sin(2M\pi x)\sin(2N\pi y) + 4N^2\pi^2\sin(2M\pi x)\sin(2N\pi y) \\
&= (M^2+N^2)4\pi^2\sin(2M\pi x)\sin(2N\pi y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 c)



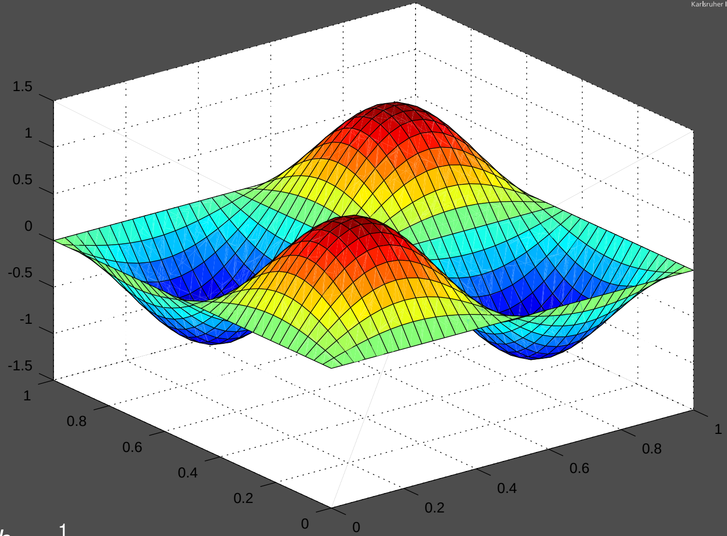
$l = 3, h = \frac{1}{8}$

Aufgabe 5 c)



$l = 4, h = \frac{1}{16}$

Aufgabe 5 c)



$l = 5, h = \frac{1}{32}$

Aufgabe 5 c)

Fehler zu analytischen Lösung wird mit kleinerem *h* kleiner
$\Rightarrow$ Es handelt sich um eine *h-FEM-Methodik*, da die Polynomgrade nicht verändert wurden

Aufgabe 6 a)

Alphabetische Liste gängiger Krylow-Unterraum-Verfahren:

- Arnoldi-Verfahren, zur Eigenwertapproximation
- BiCG, das CG-Verfahren für nicht SPD-Matrizen
- BiCGSTAB, Stabilisierung von CGS
- BiCGSTAB(ell), Stabilisierung von CGS
- BiCGSTABTFQMR, der Ansatz hinter TFQMR angewandt auf BiCGSTAB
- BiOres, eine Variante des BiCG-Verfahrens
- BiOmin, eine Variante des BiCG-Verfahrens
- BiOdir, eine Variante des BiCG-Verfahrens
- CG, zur approximativen Lösung linearer Gleichungssysteme
- CGNE, CG-Verfahren auf den Normalgleichungen, Variante 1
- CGNR, CG-Verfahren auf den Normalgleichungen, Variante 2
- CGS-Verfahren, quadrierte BiCG-Rekursion
- FOM, zur approximativen Lösung linearer Gleichungssysteme
- GMRES, zur approximativen Lösung linearer Gleichungssysteme

  ⋮

$\Rightarrow$ Es gibt sehr viele

Aufgabe 6 a)

Für uns relevant:

- CG-Verfahren
  Geeignet für große lineare, symmetrische, positiv definite und dünn besetzte LGS, spätestens *n* Schritten exakte Lösung
- GMRES
  Geeignet für große, dünn besetzte LGS, exakte Lösung erst nach endlich vielen Schritten
- Lanczos-Verfahren
  Konvergenz von Eigenwerten abhängig

Aufgabe 6 b)

Speedup und Effizienz von *CG-Verfahren* gegenüber *Gauß-Seidel-Verfahren* (Problem aus Aufgabe 5)

Problem	Seq.	2 Threads		...	16 Threads		32 Threads	
n	S(1)	S(2)	E(2)	...	S(16)	E(16)	S(32)	E(32)
225	1,74	1,81	0,906	...	2,44	0,153	2,93	0,0917
961	4,01	3,71	1,86	...	1,44	0,0898	3,46	0,109
⋮	⋮	⋮		...	⋮		⋮	
65.025	17,9	16,5	8,27	...	16,8	1,05	4,05	0,127
261.121	27,6	25,9	12,9	...	39,5	2,47	37,9	1,18

Vorkonditionierung zerstört dünne Struktur von A

$\rightarrow$ Nur sinnvoll, wenn A nicht dünn besetzt wäre

Aufgabe 6 c)

HiFlow³ würde sich eignen:
Ausgereifte OpenMP Funktionalität → verringerter Portierungsaufwand

Bibliothek	Unterschiede	Gemeinsamkeiten
HiFlow³	Hohe Parallelität Keine externen Bibliotheken nötig	C++, Krylov-Unterraumverfahren, Diskretisierung wählbar
MFEM	Sehr hohe Parallelität (mehrere hunderttausend Kerne) Keine externen Bibliotheken nötig	
Deal.II	Hohe Parallelität (16000 Kerne mindestens), Keine externen Bibliotheken benötigt (optional Libraries)	

Fazit

Mit *OpenMP* lässt es sich parallelisieren.