

TP Résolution 2-SAT

Mehdi ZNATA
Ahmed LETAIEF
Fadi NADER

Décembre 2024

Professeur de TD : Mr. Alexandre Dupont Bouillard
Responsable de la matière : Mr. Vincent Limouzy



Contents

- | | | |
|---|--|---|
| 1 | Question 1 : Détermination du nombre maximal de clauses dans une formule 2-SAT | 2 |
| 2 | Question 4 : Transformation d'une formule 2-SAT en graphe orienté | 3 |

1 Question 1 : Détermination du nombre maximal de clauses dans une formule 2-SAT

Introduction

Dans cet exercice, nous cherchons à déterminer combien de clauses distinctes une formule 2-SAT peut contenir lorsqu'elle est définie sur un ensemble de n variables. Une clause 2-SAT est une disjonction de deux littéraux, qui peuvent être positifs (x_i) ou négatifs ($\neg x_i$).

Analyse du problème

Pour résoudre cette question, nous considérons deux ensembles :

- V : Ensemble des littéraux positifs (x_i).
- F : Ensemble des littéraux négatifs ($\neg x_i$).

Nous explorons toutes les combinaisons possibles entre ces ensembles pour construire des clauses.

1. Combinaisons entre les valeurs de V

Chaque littéral de V peut être combiné avec un autre littéral de V (pas lui-même). Le nombre de combinaisons est donné par la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ces combinaisons correspondent à des clauses de la forme $(x_i \vee x_j)$.

2. Combinaisons entre les valeurs de V et F

Chaque littéral de V peut être combiné avec un littéral différent de F (pas sa propre négation). Le nombre de combinaisons est également donné par :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ces combinaisons correspondent à des clauses de la forme $(x_i \vee \neg x_j)$.

3. Combinaisons entre les valeurs de F et V

Enfin, chaque littéral de F peut être combiné avec un littéral différent de V . Le nombre de combinaisons est encore donné par :

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ces combinaisons correspondent à des clauses de la forme $(\neg x_i \vee x_j)$.

Résultat

En additionnant ces trois catégories de combinaisons, on obtient le nombre total de clauses possibles :

$$\text{Nombre total de clauses} = 3 \times \sum_{i=1}^{n-1} i = 3 \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n(n-1)}{2}$$

Conclusion

Le nombre maximal de clauses dans une formule 2-SAT avec n variables est :

$$\frac{3n(n-1)}{2}$$

2 Question 4 : Transformation d'une formule 2-SAT en graphe orienté

Introduction

L'objectif de cette question est de transformer une formule 2-SAT en un graphe orienté. Cette transformation est essentielle pour appliquer des algorithmes de théorie des graphes à la résolution des formules logiques. Chaque clause de la formule est traduite en un ensemble d'arêtes orientées, représentant les implications logiques entre les littéraux.

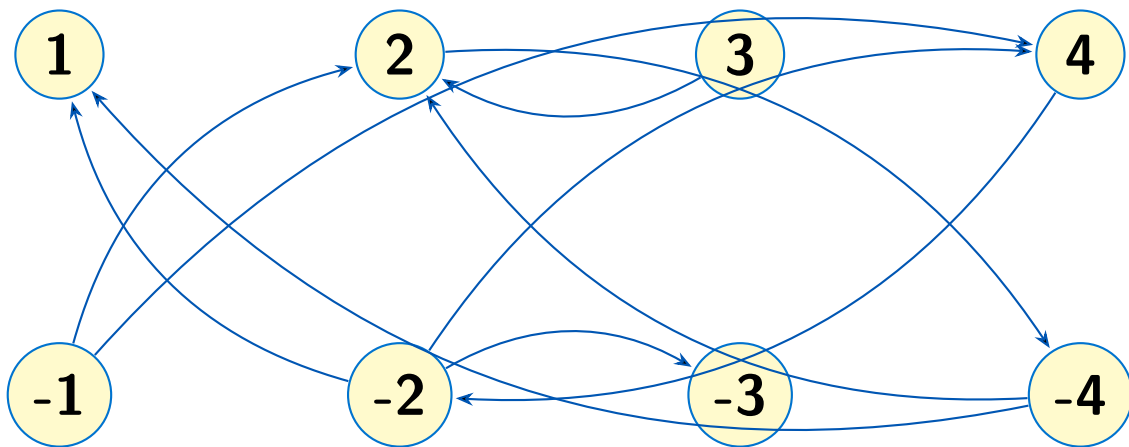
Exemple d'exécution avec votre formule

Formule donnée :

$$\text{formule} = [[1, 2], [2, -3], [-2, -4], [2, 4], [4, 1]]$$

Résultat visuel

Le graphe orienté est représenté ci-dessous :



Conclusion

La transformation de la formule en graphe orienté permet de capturer les relations logiques entre les littéraux. Le graphe obtenu est une représentation clé pour les étapes ultérieures, comme la recherche des composantes fortement connexes.