先端データ解析論　第2回小レポート

情報理工学系研究科電子情報学専攻 M1 堀 紡希 48216444

2021年4月13日

宿題1

ipynb ファイルで別に出します．

宿題2

l_2 正則化回帰によってパラメータが以下のように表される．

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = (\boldsymbol{\Phi}_i^\top \boldsymbol{\Phi}_i + \lambda \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^\top \boldsymbol{y}_i \tag{1}$$

ただし，$\boldsymbol{\Phi}_i$ は i 番目のデータを抜いた計画行列で，

$$\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi} = \sum_j \boldsymbol{\phi}_j \boldsymbol{\phi}_j^\top$$

であるので，これは以下で表される．

$$\boldsymbol{\Phi}_i^\top \boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^\top$$

また，以下が成り立つ．

$$\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{y} - y_i \boldsymbol{\phi}_i = \sum_j \boldsymbol{\phi}_j y_j - y_i \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^\top y_i$$

以上から，

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_i = (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^\top)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{y} - y_i \boldsymbol{\phi}_i)$$

そして逆行列の公式から y_i の予測値を以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi}_i^\top \hat{\boldsymbol{\theta}}_i &= \boldsymbol{\phi}_i^\top (\boldsymbol{U} - \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^\top)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{y} - y_i \boldsymbol{\phi}_i) \\
&= \boldsymbol{\phi}_i^\top \left(U^{-1} + \frac{U^{-1} \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1}}{1 - \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} \boldsymbol{\phi}_i} \right) (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{y} - y_i \boldsymbol{\phi}_i) \\
&= \frac{\boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{y} - y_i \boldsymbol{\phi}_i)}{1 - \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} \boldsymbol{\phi}_i}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \mathrm{diag}(1 - \boldsymbol{\phi}_0^\top U^{-1} \boldsymbol{\phi}_0, \ldots, 1 - \boldsymbol{\phi}_n^\top U^{-1} \boldsymbol{\phi}_n)$$

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Phi} U^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{y}$$

を用いると $\|\hat{\boldsymbol{H}}^{-1} \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\|^2/n$ をノルムの計算によって以下のように計算できる.

$$\frac{1}{n} \|\hat{\boldsymbol{H}}^{-1} \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i + \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}}{1 - \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} \boldsymbol{\phi}_i} \right)^2$$

一方で, 二乗誤差は,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_i^\top \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i + \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{y}}{1 - \boldsymbol{\phi}_i^\top U^{-1} \boldsymbol{\phi}_i} \right)^2$$

であるので, 二乗誤差が,

$$\frac{1}{n} \|\hat{\boldsymbol{H}}^{-1} \boldsymbol{H}\boldsymbol{y}\|^2$$

であることが示された.