先端データ解析論　第 4 回小レポート

情報理工学系研究科電子情報学専攻 M1 堀 紡希 48216444

2021 年 4 月 27 日

宿題 1

$$
\begin{aligned}
J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i \left(f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}_i) - y_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi\theta} - \boldsymbol{y})^\top \widetilde{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{\Phi\theta} - \boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

を最小化する $\boldsymbol{\theta}$ を求めればよい．$\boldsymbol{\theta}$ で微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\Phi}^\top \widetilde{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{\Phi\theta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{W}}^\top \boldsymbol{y} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{y} \\
&= \boldsymbol{\Phi}^\top \widetilde{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{\Phi\theta} - \boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

ただし，以下の式を用いた．

$$
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{A\theta} = 2\boldsymbol{A\theta}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{b}, \widetilde{\boldsymbol{W}}^\top = \widetilde{\boldsymbol{W}}
$$

よって二乗誤差の最小を与えるパラメータ $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ はこれが 0 になるときで，以下で与えられる．

$$
\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\Phi}^\top \widetilde{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}\widetilde{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{y}
$$

宿題 2

二次上界 $\widetilde{\rho}(r)$ は定数 a, b, c を用いて以下のように表すことができる．

$$
\widetilde{\rho}(r) = ar^2 + br + c
$$

$\rho(r)$ は対称であるので以下が成り立つ．

$$
\rho(\widetilde{r}) = \rho(-\widetilde{r})
$$

$\widetilde{\rho}(r)$ は $(\widetilde{r}, \rho(\widetilde{r})), (-\widetilde{r}, \rho(\widetilde{r}))$ を通るので, 代入して

$$b = 0$$

を得る．また，上の点で接するので一次微分係数が一致する．すなわち

$$\rho'(\widetilde{r}) = \widetilde{\rho}'(\widetilde{r}) = 2a\widetilde{r}$$

が成り立ち，a は以下の様に求まる．

$$a = \frac{\rho'(\widetilde{r})}{2\widetilde{r}}$$

以上より，存在するなら二次上界は

$$\widetilde{\rho} = \frac{\rho'(\widetilde{r})}{2\widetilde{r}} r^2 + \mathrm{const}$$

宿題 3

別の ipynb ファイルで提出します.