Homework2: 论文排版

王淳
计算机科学与技术 3220105023

2023 年 7 月 5 日

1 不可压缩的 Navier——Stokes 方程

不可压缩流体的二维流场完全由速度矢量 $q = (u\,(x, y)\,, v\,(x, y)) \in R^2$ 和压力 $p(x, y) \in R$. 这些函数是下列守恒定律的解 [**?**]（例如，参见 Hirsch,1988）：

·质量守恒:

$$div(q) = 0, \tag{1}$$

或者，用发散算子的显示形式来写，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

·紧化形式下的动量守恒方程:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathrm{div}(q \otimes q) = -\mathcal{G}p + \frac{1}{Re}\Delta q, \tag{3}$$

或者，在显式形式下，

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \end{cases} \tag{4}$$

前面的方程式使用以下比例变量以无量纲形式编写：

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad u = \frac{u^*}{V_0}, \quad v = \frac{v^*}{V_0}, \quad t = \frac{t^*}{L/V_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 V_0^2} \tag{5}$$

其中上标 (*) 表示以物理单位测量的变量。常数 L、V_0 分别是表征模拟流的参考长度和速度。无量纲数 Re 被称为 Regnold 数，并量化了流动中惯性 (或对流) 项和粘性 (或扩散) 项的相对重要性：

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \tag{6}$$

式中 ν 为流动的运动粘度。
总之，将在本项目中进行数值求解的 PDE 的 Navier-Stokes 系统由 2和 4定义；初始条件 (t=0 时) 和边界条件将在以下章节中讨论。

2 计算域、交错网格和边界条件

通过考虑处处具有周期性边界条件的矩形区域 $L_x \times L_y$(见图 12.1)，数值求解 Navier-Stokes 方程大为简化。速度 $q(x\ y)$ 和压力 $p(x\ y)$ 场的周期性在数学上表示为:

$$q(0,y) = q\left(L_x, y\right), \quad p(0,y) = p\left(L_x, y\right), \quad \forall y \in [0, L_y] \tag{7}$$

$$q(x,0) = q\left(x, L_y\right), \quad p(x,0) = p\left(x, L_y\right), \quad \forall x \in [0, L_x] \tag{8}$$

将计算解的点分布在遵循矩形和均匀 2D 网格的区域中。由于在我们的方法中并非所有变量都共享同一个网格，因此我们首先定义一个主网格 (请参见 12 流体动力学：求解二维 Navier-Stokes 方程图 12.1) 通过分别取沿 x 的 n_x 个计算点和沿 y 的 n_y 个计算点生成:

$$x_c(i) = (i-1)\delta x, \quad \delta x = \frac{L_x}{n_x - 1}, \quad i = 1, \ldots, n_x \tag{9}$$

$$y_c(j) = (j-1)\delta y, \quad \delta y = \frac{L_y}{n_y - 1}, \quad j = 1, \ldots, n_y \tag{10}$$

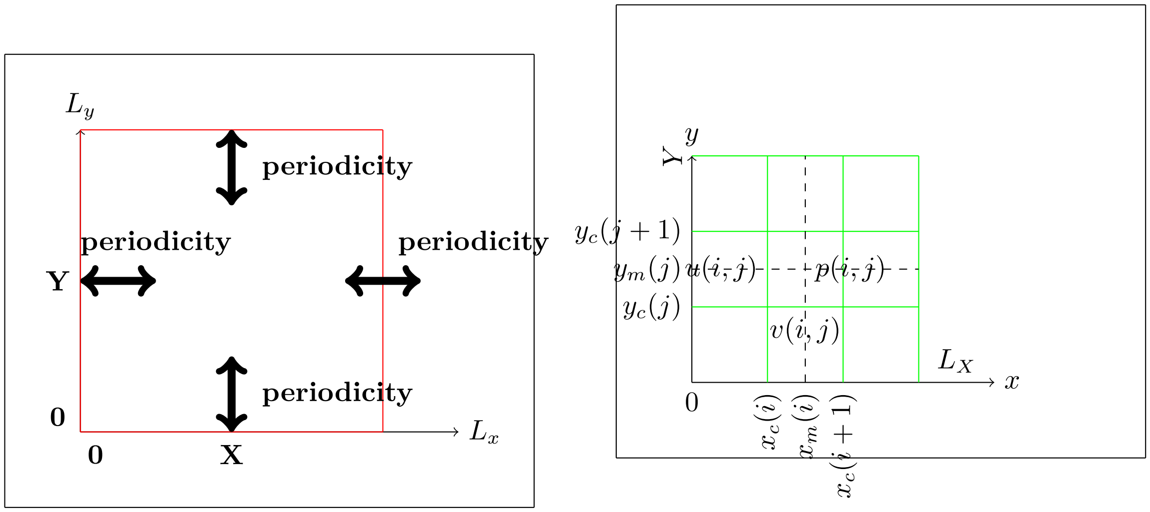

Fig 12.1. 计算域、交错网格和边界条件.

次轴网由主轴网单元的中心定义:

$$x_m(i) = (i - 1/2)\delta x, \quad i = 1, \ldots, n_{xm} \tag{11}$$

$$y_m(j) = (j - 1/2)\delta y, \quad j = 1, \ldots, n_{ym} \tag{12}$$

其中我们使用了速记符号 $n_{xm}=n_x-1$, $n_{ym}=n_y-1$ 。在定义为矩形 $[x_c(i), x_c(i+1)] \times [y_c(j), x_c(j+1)]$ 未知变量 u, v, p 将被计算为解在不同空间位置的近似值:

$u(i,j) \approx u(x_c(i), y_m(j))$ (网格西面),

$v(i,j) \approx v(x_m(i), y_c(j))$ (网格南面),

$p(i,j) \approx p(x_m(i), y_m(j))$ (网格中部).

这种交错排列的变量有很强的耦合压力和速度之间的优点。它有帮助 (参见本章末尾的参考文献), 以避免如并配安排的一些稳定性和收敛的问题 (其中所有的变量计算在相同的网格点)。

参考文献

[1] Sidi Mahmoud Kaber Marie Postel Ionut Danaila, Pascal Joly. An introduction to scientific computing twelve computational projects solved with matlab. *Research*, 2018:252–256, 2018.