**Frage 1:** Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion: $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\
&= x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \\
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x}} \\
&= \frac{2}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x}} \\
&= \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}
\end{aligned}
$$

**Frage 2:** Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = x^5 \cdot 5^x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^5 \cdot e^{x \ln 5} \\
f'(x) &= 5 \cdot x^4 \cdot 5^x + x^5 \cdot 5^x \cdot \ln 5 \\
&= 5 \cdot x^4 \cdot 5^x + x \cdot x^4 \cdot 5^x \cdot \ln 5 \\
&= x^4 \cdot 5^x \cdot (5 + x \ln 5)
\end{aligned}
$$

**Frage 3:** Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = (x \cdot \cos x)^x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x \cdot \ln(x \cdot \cos x)} \\
f'(x) &= (x \cdot \cos x)^x \cdot (x \cdot \ln(x \cdot \cos x))' \\
&= (x \cdot \cos x)^x \cdot (1 \cdot \ln(x \cdot \cos x) + x \cdot \frac{1}{x \cdot \cos x}) \cdot (x \cdot \cos x)' \\
&= (x \cdot \cos x)^x \cdot (\ln(x \cdot \cos x) + x \cdot \frac{1}{x \cdot \cos x}) \cdot (1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x) \\
&= (x \cdot \cos x)^x \cdot (\ln(x \cdot \cos x) + \frac{x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x}{x \cdot \cos x}) \\
&= (x \cdot \cos x)^x \cdot (\ln(x \cdot \cos x) + (\frac{x \cos x}{x \cos x} - \frac{x^2 \sin x}{x \cos x})) \\
&= (x \cdot \cos x)^x \cdot (\ln(x \cdot \cos x) + 1 - x \cdot \tan x)
\end{aligned}
$$

**Frage 4:** Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x) = x^3 - 27x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 27 \\
f''(x) &= 6x \\
f'(x) &= 0 \\
3x^2 - 27 &= 0 \\
3x^2 &= 27 \\
x^2 &= 9 \\
x_{1,2} &= \pm 3 \\
f''(+3) &= 6 \cdot 3 \\
&= +18 > 0 \to pMin \quad (x_0 = +3) \\
f''(-3) &= 6 \cdot (-3) \\
&= -18 < 0 \to pMax \quad (x_0 = -3)
\end{aligned}$$

**Frage 5:** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Geben Sie die n-te Ableitung der Funktion $g(x)$ an: $g(x) = x \cdot f(x)$

$$\begin{aligned}
g(x) &= x \cdot f(x) \\
g^{(1)}(x) &= f(x) + xf^{(1)}(x) \\
g^{(2)}(x) &= f^{(1)}(x) + f^{(1)}(x) + xf^{(2)}(x) \\
g^{(3)}(x) &= f^{(2)}(x) + f^{(2)}(x) + f^{(2)}(x) + xf^{(3)}(x) \\
g^{(n)}(x) &= nf^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

**Frage 6:** Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, soweit er existiert, mit Hilfe der Grenzwertregel von Bernoulli und l'Hospital: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin 2x \\
f'(x) &= 2 \cos 2x \\
g(x) &= 3x \\
g'(x) &= 3 \\
\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} &= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos 2x}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

**Frage 7:** Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, soweit er existiert, mit Hilfe der Grenzwertregel von Bernoulli und l'Hospital: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f'(x) &= 2x \\
f''(x) &= 2 \\
g(x) &= e^x \\
g'(x) &= e^x \\
g''(x) &= e^x \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} \\
&= \frac{2}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}
$$