Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik

Prof. Dr. T. Böhme

WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Übungsserie 8 (27.11.2023 - 1.12.2023)

Aufgabe 1 :

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{2n^2-1}}$ (c)$^{(*)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2-2n\sqrt{n+1}}{n^2-n\sqrt{4n^2+6}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n-2}{2n+3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{2^k}\right)$ (e)$^{(*)}$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^k$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n)$

Aufgabe 2 :

Berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Wert der Reihe.

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3^k+5}{6^k}$ (b)$^{(*)}$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$

Aufgabe 3 :

Ein Tischtennisball fällt aus einer Höhe h senkrecht auf eine Platte. Der Ball prallt zurück und erreicht eine Höhe von $\frac{3}{4}h$. Der Vorgang wiederholt sich jeweils mit $\frac{3}{4}$ Rückprallhöhe. Welche Gesamtlänge l legt der Ball zurück, falls man ihn ungestört springen lässt?

Aufgabe 4 :

Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen (a_n), falls diese existieren.

(a) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ (b) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+5}$ (c) $a_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{3n}$

(d)$^{(*)}$ $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ (e)$^{(*)}$ $a_n=\left(1-\frac{4}{3n}\right)^{n+1}$ (f) $a_n=\left(\frac{3n+1}{1-3n}\right)^{n}$

Aufgabe 5 :

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Hinweis: Es ist hilfreich, wenn Sie $\frac{1}{k(k+1)}$ *in der Form* $\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ *(mit noch zu ermittelnden reellen Zahlen A und B) darstellen. Dieses Vorgehen heißt Partialbruchzerlegung und wird später noch ein eigenes Thema sein.*

Aufgabe 6 :

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$,

(d)$^{(*)}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$,

(e)$^{(*)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$,

(f)$^{(*)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$,

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$,

(h)$^{(*)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2+n+1}$,

(j)$^{(*)}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})$,

(k)$^{(*)}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.