Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Böhme

WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Übungsserie 10 (11.12.2023 - 15.12.2023)

Aufgabe 1 :

Bestimmen Sie reelle Zahlen α und β so, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig sind.

(a) $f(x) = \begin{cases} -2\sin x & , \ x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta \sin x & , \ |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{sonst} \end{cases}$
(b)$^{(*)}$ $f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{1}{e-x}\right) & , \ x < 0 \\ \alpha x + \beta & , \ 0 \leq x \leq \pi \\ \cos x & , \ \pi < x \end{cases}$

Aufgabe 2 :

$(*)$ Untersuchen Sie, an welchen Stellen x_0 die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ stetig ist. Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, welche nicht größer als x ist.

Aufgabe 3 :

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, um zu zeigen, dass die folgenden Gleichungen mindestens eine reelle Lösung besitzen.

(a) $\tan x = \frac{1}{x}$
(b)$^{(*)}$ $\sin x = x - 1$
(c) $x^5 + 10x^4 - 4x + 1 = 2$

Aufgabe 4 :

$(*)$ Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, um zu zeigen, dass jedes Polynom **ungeraden** Grades mindestens eine reelle Nullstelle hat.

Aufgabe 5 :

Verwenden Sie das Halbierungsverfahren, um eine reelle Nullstelle x_0 des Polynoms

$$p(x) = x^5 - x + 1$$

mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{4}$ zu bestimmen.

Hinweise:
(i) Für die Näherungslösung x^* soll also gelten $|x_0 - x^*| < 1/4$.
(ii) Betrachten Sie $p(-2)$ und $p(-1)$.

Aufgabe 6 :

(∗) Betrachtet werden die Funktionen $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2+2)} \text{ bzw. } g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x^2+2)}.$$

(a) Bestimmen Sie die maximalen Definitionsbereiche A und B von f und g.

(b) Sind f und g stetig?

(c) Untersuchen Sie, ob es eine stetige Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $F(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt.

(d) Untersuchen Sie, ob es eine stetige Funktionen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $G(x) = g(x)$ für alle $x \in B$ gilt.

Aufgabe 7 :

Von A nach B führt eine Straße. Ein Auto fährt auf dieser Straße von A nach B. Die Fahrt beginnt zum Zeitpunkt t_1 und endet zum Zeitpunkt t_2. Später fährt eine Radfahrer auf der gleichen Straße von B nach A. Er beginnt seine Fahrt zum Zeitpunkt t_3 und erreicht A zum Zeitpunkt t_4.
Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass es zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_1, t_2]$ einen Zeitpunkt $f(t) \in [t_3, t_4]$ gibt, sodass sich der Radfahrer zum Zeitpunkt $f(t)$ an der gleichen Stelle befindet, an der sich das Auto zum Zeitpunkt t befand.

Aufgabe 8 :

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Was kann dann über die Existenz von globalen Maximal- und Minimalstellen ausgesagt werden?

Hinweis: Weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit werden vorausgesetzt.

Aufgabe 9 :

Berechnen Sie die Ableitung f' der Funktion

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$ (b)$^{(*)}$ $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$

durch Anwendung der Definition des Differenzialquotienten.

Hinweise: (i) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, *(ii)* $\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$.