Technische Universität Ilmenau — WS 2021/22
Institut für Mathematik
Thomas Böhme — BT, EIT, II, MT, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

D

Name, Vorname	Studiengang	Matr. Nr.

Aufgabe	1	2	3	4	5a	5b	6a	6b	6c	7a	7b	$\sum$
Soll Pkte.	6	5	6	6	6	6	3	3	3	3	3	50
Ist Pkte.												

Hinweis: Alle Antworten sind zu begründen, Rechenwege sind anzugeben.

Fachprüfung Mathematik 1, 21.02.2022

Aufgabe 1 :

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$(z-2i)^4 = -8 - i\cdot 8\sqrt{3}$$

und geben Sie die Lösungen in algebraischer Form an.

Aufgabe 2 :

Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2k+1}.$$

Aufgabe 3 :

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-3x+2}$. Finden Sie eine explizite Formel für die n-te Ableitung ($n\in\mathbb{N}$) von f und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4 :

Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (\cos x)^2$$

und geben Sie jeweils den Typ (Minimum oder Maximum) der Extremstelle an.

Aufgabe 5 :

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} A\sin(x) + B & : x < \pi \\ -\frac{2}{\pi}x + 4 & : \pi \leq x, \end{cases}$$

wobei A und B zwei reelle Parameter sind.

(a) Wie müssen A und B gewählt werden, damit die Funktion stetig ist?

(b) Wie müssen A und B gewählt werden, damit die Funktion differenzierbar ist?

Geben Sie bei beiden Teilaufgaben alle Wahlmöglichkeiten für A und B an.

Aufgabe 6 :

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (\sin x)^2$.

(a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

(b) Geben Sie das zugehörige Restglied in der Form von Lagrange an.

(c) Finden Sie eine obere Schranke für den Betrag des Approximationsfehlers, der entsteht, wenn man das zweite Taylorpolynom auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ zur Approximation von f nutzt.

Aufgabe 7 :

Berechnen Sie die Integrale:

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2x))^2 \, dx, \qquad (b) \int_{-1}^{0} \frac{x}{(x-1)^3} \, dx.$$

Nochmals der Hinweis: Verlangt wird der Rechenweg. Es genügt nicht, die Ergebnisse aus einem Nachschlagewerk abzuschreiben.