

Frage 1: Berechnen Sie $\int_0^1 x \, dx - \int_0^1 y \, dy$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{0}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \\ \int_0^1 y \, dy &= \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{0}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \\ \int_0^1 x \, dx - \int_0^1 y \, dy &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Frage 2: Die Funktion f sei stetig differenzierbar und von 0 verschieden. Berechnen Sie $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$.

$$\begin{aligned}u &= f(x) \\ \frac{du}{dx} &= f'(x) \\ du &= f'(x) \, dx \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \int \frac{1}{u} \, du \\ &= \ln |u| + c \\ &= \ln |f(x)| + c\end{aligned}$$

Frage 3: Die Funktion f sei stetig differenzierbar. Berechnen Sie $\int f'(x)f(x) dx$.

$$f(x) = f(x)$$

$$g'(x) = f'(x)$$

$$\int f'(x)f(x) dx = f(x)f(x) - \int f'(x)f(x) dx \quad | + \int f'(x)f(x) dx$$

$$2 \int f'(x)f(x) dx = f(x)f(x) \quad | : 2$$

$$\int f'(x)f(x) dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$$

Frage 4: Wie lauten mögliche Stammfunktionen von $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x)$?

$$\text{Hinweis: } (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

$$f(x) = \ln x$$

$$g'(x) = 1$$

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx$$

$$= x \ln x - \int 1 dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$c = (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2$$

$$c = -(\sin(e^x))^2 - (\cos(e^x))^2$$

Frage 5: Die Funktionsgraphen von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 - x^2$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 4x - 2$ schließen eine Fläche ein. Wie viele Flächeneinheiten werden eingeschlossen?

$$f(x) - g(x) = -x^2 - 4x + 5$$

$$0 = x^2 + 4x - 5$$

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5}$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 1$$

$$\int_{-5}^1 (-x^2 - 4x + 5) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x \right]_{-5}^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - 2 + 5 \right) - \left(-\frac{-125}{3} - 50 - 25 \right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{100}{3} \right)$$

$$= 36$$