Technische Universität Ilmenau — WS 2023/2024
Institut für Mathematik

Prof. Dr. T. Böhme — BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Übungsserie 15 (29.1.2024 - 2.2.2024)

Aufgabe 1 :

Berechnen Sie die Längen der folgenden Kurven:

(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) \\ e^t \end{pmatrix},\ t \in [0, b],\ b \geq 0,$ (b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t + 2 \\ \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix},\ t \in [1, 5]$

(c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix},\ t \in [-2, 0]$

Aufgabe 2 :

(a) Begründen Sie, warum für die Länge L des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

gilt.

(b) Berechnen Sie die Länge des Funktionsgraphen von $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cosh(x)$.

Aufgabe 3 :

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral 1. Art $\int\limits_{\vec{r}} f\ ds$:

(a) $\vec{r}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $f(x,y) = x$, (b) $\vec{r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $f(x,y) = xy$

Aufgabe 4 :

Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral 2. Art $\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\ d\vec{s}$:

(a) $\vec{r}\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x - z \\ xyz \end{pmatrix}$

(b) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$

(i) $\vec{r}$ beschreibt die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{r}$ beschreibt den Viertelbogen des Einheitskreises von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$