Frage 1: Gegeben sei $\vec{r}:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}1\\-2t\end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{r}} 1\ ds$.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\\
\|\dot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{(0)^2+(-2)^2}\\
&= 2\\
\int\limits_{\vec{r}} 1\ ds &= \int\limits_0^2 \|\dot{\vec{r}}(t)\|\ dt\\
&= \int\limits_0^2 2\ dt\\
&= [2t]_0^2\\
&= (2\cdot 2)-(2\cdot 0)\\
&= (4)-(0)\\
&= 4
\end{aligned}$$

Frage 2: Gegeben seien $\vec{r}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$ und $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=x$. Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{r}} f\ ds$.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \begin{pmatrix}-\sin(t)\\\cos(t)\end{pmatrix}\\
\|\dot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{(-\sin(t))^2+(\cos(t))^2}\\
&= 1\\
\int\limits_{\vec{r}} f\ ds &= \int\limits_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\|\ dt\\
&= \int\limits_0^{2\pi} \cos(t)\cdot 1\ dt\\
&= [\sin(t)]_0^{2\pi}\\
&= (0)-(0)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Frage 3: Gegeben seien $\vec{r} : [-1, 0] \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \sqrt{y}$. Berechnen Sie $\int_{\vec{r}} f\, ds$.

Achtung: $f(x, y) = \sqrt{y}$*, wodurch nur der Betrag von* y *berechnet werden kann.*

Aufgrund der Symmetrie von $\vec{r}(t)$ *ist* $\int_{-1}^{0} f(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt = \int_{0}^{1} f(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt$.

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\
\|\dot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} \\
&= \sqrt{1 + 4t^2} \\
\int_{\vec{r}} f\, ds &= \int_{0}^{1} f(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt \\
&= \int_{0}^{1} t \cdot \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \\
u &= 1 + 4t^2 \\
\frac{du}{dt} &= 8t \\
du &= 8t\, dt \\
\int_{0}^{1} t \cdot \sqrt{1 + 4t^2}\, dt &= \int_{0}^{1} t \cdot \sqrt{u}\, dt \\
&= \frac{1}{8} \int_{0}^{1} 8t \cdot \sqrt{u}\, dt \\
&= \frac{1}{8} \int_{\dots}^{\dots} \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{\dots}^{\dots} \\
&= \left[\frac{2}{24} \sqrt{u^3} \right]_{\dots}^{\dots} \\
&= \left[\frac{1}{12} \sqrt{(1 + 4t^2)^3} \right]_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{12} \sqrt{125} \right) - \left(\frac{1}{12} \right) \\
&= \frac{1}{12} \left(\sqrt{125} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

Frage 4: Gegeben seien $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\, d\vec{s}$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\, d\vec{s} &= \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \vec{v}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \right\rangle\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin^2(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (\sin^2(t) \cdot \cos(t) - \cos^2(t) \cdot \sin(t))\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (\sin^2(t) \cdot \cos(t))\, dt - \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2(t) \cdot \sin(t))\, dt \\
\int\limits_0^{2\pi} (\sin^2(t) \cdot \cos(t))\, dt &= \int\limits_0^{2\pi} u^2 \cdot \cos t\, dt \\
u &= \sin t \\
\frac{du}{dt} &= \cos t \\
du &= \cos t\, dt \\
\int\limits_0^{2\pi} u^2 \cdot \cos t\, dt &= \int\limits_{\dots}^{\dots} u^2\, du \\
&= \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\dots}^{\dots} \\
&= \left[\frac{\sin^3(t)}{3} \right]_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left(\cos^2(t) \cdot \sin(t)\right) dt &= \int_0^{2\pi} u^2 \cdot \sin t \, dt \\
u &= \cos t \\
\frac{du}{dt} &= -\sin t \\
du &= -\sin t \, dt \\
\int_0^{2\pi} u^2 \cdot \sin t \, dt &= -\int_0^{2\pi} u^2 \cdot (-\sin t) \, dt \\
-\int_0^{2\pi} u^2 \cdot (-\sin t) \, dt &= -\int_{\dots}^{\dots} u^2 \, du \\
&= -\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\dots}^{\dots} \\
&= -\left[\frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^{2\pi} \\
\int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) \cdot \cos(t) - \cos^2(t) \cdot \sin(t)\right) dt &= \left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^{2\pi} \\
&= ((0) - (0)) + \left(\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Frage 5: Gegeben seien $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\, d\vec{s}$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\, d\vec{s} &= \int\limits_0^1 \left\langle \vec{v}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \right\rangle\, dt \\
&= \int\limits_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \right\rangle\, dt \\
&= \int\limits_0^1 (e^t - e^t \cdot e^{-t})\, dt \\
&= \int\limits_0^1 (e^t - e^0)\, dt \\
&= \int\limits_0^1 (e^t - 1)\, dt \\
&= [e^t - t]_0^1 \\
&= (e - 1) - (1) \\
&= e - 2
\end{aligned}$$