5. Berechnen Sie (mit Herleitung/Begründung, keine fertigen Ergebnisse aus Nachschlagewerken/Integralrechnern) die folgenden bestimmten oder unbestimmten Integrale:

   (a) $\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= \cos(x) \\ \mathrm{d}u &= \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ \int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \int u^2\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int u^2\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{u^3}{3} \\ &= \frac{\sin^3(x)}{3} \end{aligned}$$

   (b) $\int_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi (1-\cos^2(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ u &= \cos(x) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\sin(x) \\ \mathrm{d}u &= -\sin(x)\mathrm{d}x \\ \int_0^\pi (1-\cos^2(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^\pi (1-\cos^2(x))(-\sin(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_1^{-1} (1-u^2)\,\mathrm{d}u \\ &= -\left(\int_1^{-1} 1\,\mathrm{d}u - \int_1^{-1} u^2\,\mathrm{d}u\right) \\ &= -\left[u\right]_1^{-1} - \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1} \\ &= -(-1-1) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(c) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x \\
f' &= \sin(x) \\
g &= \sin^3(x) \\
\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\sin^3(x) - \int -\cos(x)\frac{\mathrm{d}(\sin^3(x))}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\int \cos(x)\sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\int (1-\sin^2(x))\sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\int \sin^2(x) - \sin^4(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\left(\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x - 3\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x \\
4\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\sin^3(x) + 3\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
f'(x) &= \sin(x) \\
g(x) &= \sin(x) \\
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\sin(x) - \int -\cos(x)\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int (1-\sin^2(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
2\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\sin(x) + \int 1\,\mathrm{d}x \\
\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{-\cos(x)\sin(x)}{2} + \frac{x}{2} \\
4\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\sin^3(x) - \frac{3\cos(x)\sin(x)}{2} + \frac{3x}{2} \\
\int \sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{-\cos(x)\sin^3(x)}{4} - \frac{3\cos(x)\sin(x)}{8} + \frac{3x}{8} \\
\int\limits_0^{2\pi} \sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-\cos(x)\sin^3(x)}{4} - \frac{3\cos(x)\sin(x)}{8} + \frac{3x}{8}\right]_0^{2\pi} \\
&= \left(\frac{-1\cdot 0}{4} - \frac{3\cdot 1\cdot 0}{8} + \frac{3\cdot 2\pi}{8}\right) - \left(\frac{-1\cdot 0}{4} - \frac{3\cdot 1\cdot 0}{8} + \frac{3\cdot 0}{8}\right) \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(d) $\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
f' &= e^{-2x} \\
g &= \sin(x) \\
\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{-2x}\sin(x)}{2} - \int -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{e^{-2x}\sin(x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
f' &= e^{-2x} \\
g &= \cos(x) \\
\int e^{-2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} - \int -\frac{e^{-2x}(-\sin(x))}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2x}\cos(x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{e^{-2x}\sin(x)}{2} - \frac{e^{-2x}\cos(x)}{4} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
\frac{5\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x}{4} &= -\frac{e^{-2x}\sin(x)}{2} - \frac{e^{-2x}\cos(x)}{4} \\
\int e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2e^{-2x}\sin(x) - e^{-2x}\cos(x)}{5} + C \\
&= -\frac{e^{-2x}(2\sin(x) - \cos(x))}{5} + C
\end{aligned}$$

(e) $\int\limits_0^1 \frac{4x^3-3x^2+6x-1}{x^4-x^3+3x^2-x+2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
u &= x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2 \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 4x^3 - 3x^2 + 6x - 1 \\
\mathrm{d}u &= (4x^3 - 3x^2 + 6x - 1)\,\mathrm{d}x \\
\int\limits_0^1 \frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 1}{x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \frac{4x^3 - 3x^2 + 6x - 1}{u}\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_2^4 \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= [\ln|u|]_2^4 \\
&= \ln(4) - \ln(2) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$