Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Lehrgruppe Mathematik

SS 2024
Mathematik 2
GIG

# Übungsserie 1 (8.4.-12.4.)

**Thema: Integration, einfache Differentialgleichungen**

*Empfehlung zum Umgang mit den Aufgaben: Die Aufgaben im oberen Teil (Pflichtteil) des Aufgabenblatts sollten möglichst im Dialog zwischen Übungsleitenden und Teilnehmenden besprochen werden. Sie beziehen sich meist direkt auf die letzten Vorlesungen (in der ersten Woche auf die letzten Vorlesungen des Wintersemesters (einfache Differentialgleichungen), deren Inhalte nicht mehr geübt werden konnten). Die Aufgaben im unteren Teil (Bonusteil) sollten durch die Teilnehmenden in den Übungen vorgerechnet werden, um Bonuspunkte zu erwerben. Die Themen in diesen Aufgaben kamen schon in Vorlesung und Übung dran (in der ersten Woche in einigen Vorlesungen im Januar und in Übungsserie 14 im Wintersemester).*
*Sollte die Übungszeit knapp sein (Feiertagsausfälle usw.), sollten vorrangig die Aufgaben aus dem Pflichtteil besprochen werden. Wenn nicht alle Aufgaben aus dem Bonusteil geschafft werden, ist das nicht schlimm, denn es handelt sich um die „Wiederholung der Wiederholung“.*

## Pflichtteil

1. Frischen Sie den Vorlesungsstoff aus den letzten Mathe-1-Vorlesungen auf:
   (a) Welche Form hat eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen? Wie löst man diesen Typ?
   (b) Welche Form hat eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung? Wie löst man diesen Typ?
   (c) Was ist ein Anfangswertproblem? Wie löst man ein Anfangswertproblem?

2. Bestimmmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und lösen Sie die Anfangswertprobleme, falls Anfangswerte angegeben sind.
   (a) $y' = x^2 e^x$, $y(0) = 3$
   (b) $y' = 2xe^{x^2}$, $y(1) = -2$
   (c) $y' \cdot (1 + x^2) = \arctan x$, $y(1) = \frac{\pi^2}{4}$
   (d) $y' = |x|^3$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen und lösen Sie das Anfangswertproblem, falls Anfangswerte gegeben sind.

   (a) $y' = \sqrt[3]{x}y$, $y(0) = 2$

   (b) $y' = \frac{xy}{1-x^2}$, $y(0) = 0$

   (c) $2x^2y' + y^2 = 0$, $y(2) = 0$

4. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten.

   (a) $y' = y + x$

   (b) $y' = xe^{-x^2} - 2xy$

   (c) $y' = y + \cos x$

## Bonusteil

5. Berechnen Sie (mit Herleitung/Begründung, keine fertigen Ergebnisse aus Nachschlagewerken/Integralrechnern) die folgenden bestimmten oder unbestimmten Integrale:

   (a) $\int \sin^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_0^\pi \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$, (c) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$,

   (d) $\int \sin(x)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$, (e) $\int\limits_0^1 \frac{4x^3-3x^2+6x-1}{x^4-x^3+3x^2-x+2}\,\mathrm{d}x$, (f) $\int\limits_0^{\frac{e-\frac{1}{e}}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$,

   (g) $\int \frac{4x\arctan(x^2)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, (h) $\int\limits_1^2 x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, (i) $\int\limits_2^3 4x\ln(2x)\,\mathrm{d}x$,

   (j) $\int 3e^x\sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x$, (k) $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$, (l) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$,

   (m) $\int (\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} - \frac{1}{x\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$, (n) $\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$,

   (o) $\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x$, für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, (p) $\int (x^2+2x)\sinh(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$,

   (q) $\int \sin(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|a| \neq |b|$,

   (r) $\int \sin(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $|a| = |b|$