Technische Universität Ilmenau WS 2023/2024
Institut für Mathematik

Prof. Dr. T. Böhme BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Übungsserie 12 (8.1.2024 - 12.1.2024)

Aufgabe 1 :

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^5 + x$ bijektiv ist und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 2 :

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren, mit Hilfe der Grenzwertregel von Bernoulli und l'Hospital.

(a) $\lim\limits_{x\to e} \frac{e-x}{\ln x - 1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x \ln x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x \cdot \ln x$, (e)$^{(*)}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}$, (f)$^{(*)}$ $\lim\limits_{x\to \infty} (x \ln \frac{x+1}{x-1})$.

Aufgabe 3 :

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden durch Potenzreihen gegebenen Funktionen:

(a) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, $|x| < 1$ (b)$^{(*)}$ $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, (c)$^{(*)}$ $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Bemerkung: Es gilt $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \sinh x$ *und* $h(x) = \cosh x$.

Aufgabe 4 :

Berechnen Sie mittels Differenziation der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ mit $|x| < 1$ die Summen der folgenden Reihen (bei $|x| < 1$):

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k$, (b)$^{(*)}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$.

Aufgabe 5 :

Betrachtet wird die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Stellen Sie das zweite Taylorpolynom $T_{f,2,x_0}(x)$ von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ auf.

(b) Schätzen Sie den Approximationsfehler $|f(x) - T_{f,2,x_0}(x)|$ für $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ab.

Aufgabe 6 :

Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + \sin x$.

(a) Stellen Sie das dritte Taylorpolynom $T_{f,3,x_0}(x)$ von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ auf.

(b) Bestimmen Sie eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \varepsilon$ gilt

$$|f(x) - T_{f,3,x_0}(x)| < \tfrac{1}{24}.$$