Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Böhme

WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1

Aufgaben zur Vorbereitung der Fachprüfung Mathematik 1

Aufgabe 1 :

Bilden Sie jeweils die Negation der Aussage.

(a) Jeder Student der Informatik kann C++ oder C#.

(b) $\forall x \, \exists N \, \forall n \colon (n > N) \to (|a_n - g| \le x)$,

(c) $\exists N \, \forall n \colon (n > N) \to (a_n \le b_n)$.

Aufgabe 2 :

Stellen Sie die folgenden Mengen reeller Zahlen als Vereinigung von Intervallen dar.

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid ||x-2|-1| \le 2\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 3 \ge 5\}$,

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+10}{x-7} < 1\}$.

Aufgabe 3 :

Skizzieren Sie die Menge $\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y^2 \text{ und } |y| \le 1\right\}$ in der (x,y)-Ebene.

Aufgabe 4 :

Untersuchen Sie, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssytem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & + & \alpha z & = & 0 \\ 2x & + & 10y & & & = & \beta + 1 \end{array}$$

genau eine, unendlich viele und keine Lösungen hat.
Berechnen Sie im Fall der unendlich großen Lösungsmenge alle Lösungen.

Aufgabe 5 :

Betrachten Sie Ihr Geburtsdatum in der Form $ab.cd.efgh$ und ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & hz & = & g \\ ax & - & 2y & + & z & = & c \\ ex & + & fy & + & bz & = & d \end{array}$$

Aufgabe 6 :

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Summenformel $\sum\limits_{k=0}^{n} 2 \cdot 3^k = 3^{n+1} - 1$.

Aufgabe 7 :

Finden Sie eine Formel für die n-te Ableitung von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-3x}$ und beweisen Sie Ihre Behauptung durch vollständige Induktion.

Aufgabe 8 :

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-10}{2n^2+3\sqrt{n}+7}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+(-1)^n n}{n^2}$,

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k$, (e) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} (\frac{2}{3})^k$, (f) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{7n})^{2n}$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^2+4}{4n^4+n^2-n}$, (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2-2n}{4-n^2}$, (i) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{-n}(5^n+(-5)^n)$.

Aufgabe 9 :

Zeigen Sie mit dem Quotientenkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ konvergent ist.

Aufgabe 10 :

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzbereich:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-4)^k}{6^k\sqrt{k}}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\cdot 2^k}(x+2)^k$, (c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3k}}{k\cdot 8^{k-1}}$.

Aufgabe 11 :

Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{6}{x^3-1} - \frac{2}{x-1}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x^2+1}{x^2-1}$, (e) $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x^2+1}{x^2-1}$, (f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Aufgabe 12 :

Bestimmen Sie reelle Zahlen α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (i) stetig und (ii) differenzierbar ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{2}) & x \le 0 \\ \alpha + \beta x & x > 0 \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 0 \\ \alpha + \beta x & x > 0 \end{cases}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 0 \\ \alpha \sin(x+\beta) & x > 0 \end{cases}$.

Aufgabe 13 :

Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen im angegebenen Intervall I mindestens eine Lösung haben.

(a) $\ln x = \cos x$ mit $I = (\frac{1}{10}, \frac{\pi}{2})$, (b) $x^2 = e^{-x}$ mit $I = (0, 2)$.

Aufgabe 14 :

Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen folgender Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ der maximale Definitionsbereich sei.

(a) $f(x) = \arctan(x+2)$, (b) $f(x) = x\sin x + \cos(x^2)$, (c) $f(x) = e^x \sin x$,

(d) $f(x) = x^2 + \cosh x$, (e) $f(x) = x^{3x}$, (f) $f(x) = xe^x \sin x$,

(g) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, (g) $f(x) = \sin(e^x)$, (h) $f(x) = xe^x$.

Aufgabe 15 :

Gegeben sei die Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(x) = x\sqrt{x^5+3}$.

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(2)$.

Aufgabe 16 :

Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.

Hinweis: Mittelwertsatz

Aufgabe 17 :

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich D, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, Nullstellen und Polstellen, die rechts- und linksseitigen Grenzwerte an den Polstellen sowie alle lokalen Extrema.

(a) $f(x) = (x-2)^2(x-4)^2$, (b) $f(x) = \frac{x-2}{x}$,

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ (d) $f(x) = e^{x^2}$.

Aufgabe 18 :

Bestimmen Sie alle globalen Extrema der folgenden Funktionen f.

(a) $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^3 - 12x + 1$,

(b) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cosh x$.

Aufgabe 19 :

Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie diese, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{e^x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-x+\sin x}{x(1-\cos x)}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x})$, (f) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^{(3x)}$.

Aufgabe 20 :

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das 3. Taylorpolynom $T_{f,3,x_0}(x)$ an der Stelle x_0 und geben Sie für den Approximationsfehler $|f(x) - T_{f,3,x_0}(x)|$ im Intervall I eine obere Schranke an.

(a) $f(x) = 2x^2 + \sin(2x)$, $x_0 = 0$, $I = [-1,2]$,

(b) $f(x) = e^{2x+2}$, $x_0 = -1$, mit $I = [-2,1]$.

Aufgabe 21 :

Verwenden Sie den Satz von Taylor, um $\ln(1.5)$ mit einer Genauigkeit von 0.01 zu berechnen.

Aufgabe 22 :

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int x \sin(x^2+2)\,dx$, (b) $\int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos(2x)\,dx$, (c) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$,

(d) $\int\limits_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$, (e) $\int x(e^{x^2+4}+e^x)\,dx$, (f) $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$.

Aufgabe 23 :

Berechnen Sie die Längen der folgenden Kurven:

(a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(t) \\ e^{-2t}\sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 4\pi]$, (b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

(c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $t \in [-1, 0]$, (d) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\sqrt{t} \end{pmatrix}$, $t \in [1,4]$

Aufgabe 24 :

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ und sei $\vec{r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{r}} f\ ds$.

Aufgabe 25 :

Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{r}_i} \vec{v}\ d\vec{s}$, $i \in \{1,2\}$ entlang der beiden Wege $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$ und $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$.