Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Böhme

WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1

Übungsserie 5 (6.11.2023 - 10.11.2023)

Aufgabe 1 :

Welche der folgenden Funktionen f sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Bilden Sie für die bijektiven Funktionen auch die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$, $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ Was ist, wenn $a = 0$?
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y + x^2$
(c) $f : [0, 2\pi] \to \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit $f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$
(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = |x|$
(e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = |x|$
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin x$
(g) $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \tan x$

Aufgabe 2 :

$(*)$ Welche der folgenden Tabellen definieren Funktionen der links stehenden Größen auf die rechts stehenden Größen?

a	b
1	1.3
2	7.4
3	5.2
4	5.2
5	5.2

a	b
1.0	1.0
1.4	1.4
1.4	1.4
1.5	1.2
1.7	1.8

a	b
1.0	1.0
1.4	1.4
1.4	1.5
1.5	1.2
1.7	1.8

Aufgabe 3 :

$(*)$ Welche der folgenden Funktionen sind injektiv? Bilden Sie für die als injektiv erkannten Funktionen jeweils die Umkehrfunktion - gegebenenfalls unter Einschränkung des Wertebereichs.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 12x^4 - x^2$
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3x + 8$
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = e^x$
(d) $l : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $l(x) = \log_2 x$

Aufgabe 4 :

Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 5 :

$(*)$ Berechnen Sie die folgenden Summen und Produkte:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{5} \frac{1}{6-k}$, (c) $\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{1}{2}$, (d) $\prod\limits_{k=1}^{n} 2$, (e) $\prod\limits_{k=1}^{4} k$.

Aufgabe 6 :

(∗) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(n+1-k)$.

Aufgabe 7 :

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar. Zeigen Sie diese Aussage zusätzlich auf direktem Weg.

Aufgabe 8 :

Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert man

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ \prod_{k=1}^{n} k & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ genau $n!$ verschiedene Möglichkeiten gibt, die ersten n natürlichen Zahlen $1, ..., n$ hintereinander zu schreiben.