Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Böhme

WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Übungsserie 7 (20.11.2023 - 24.11.2023)

Aufgabe 1 :
Es sei $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung, dass gilt:

$$\lim_{k\to\infty} q^k = \begin{cases} \infty\,, & q > 1 \\ 1\,, & q = 1 \\ 0\,, & |q| < 1 \end{cases}$$

(Die *Bernoulli Ungleichung* besagt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \geq -1$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.)

Aufgabe 2 :
Untersuchen Sie die unten angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ an.

(a)$^{(*)}$ $a_n = (\frac{99}{100})^n$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) $a_n = (1 + \frac{1}{100})^n$

(d)$^{(*)}$ $a_n = \dfrac{2n^2 + 10n - 202}{n^3 - 100}$ (e) $a_n = \dfrac{2n^3 - n^2 - n - 1}{3n^3 - 1}$ (f)$^{(*)}$ $a_n = \dfrac{n^3 + 4n^2 - 2n}{n^2 - 2n + 4}$

(g) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2 + n + 1}{5n^2 - 2n + 3}$ (h) $a_n = 3^{-n}(2^n + (-2)^n)$ (i)$^{(*)}$ $a_n = 2^{-n}(2^n + (-2)^n)$

(j) $a_n = \sqrt{n^2 + 23n + 5} - \sqrt{n^2 + 7n}$

Aufgabe 3 :

Geometrische Reihe: Betrachtet wird die Zahlenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, wobei q eine beliebige reelle Zahl ist.

(a) Rechnen Sie nach, dass $s_{n+1} = q^{n+1} + s_n$ und $s_{n+1} = 1 + qs_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Verwenden Sie (a), um zu zeigen:

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases} .$$

(c) Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen q die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mononton, beschränkt oder beides ist, und geben Sie den Grenzwert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ an, falls dieser existiert.

(d) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ für $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{2}{3})^k$.

(e) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^k$ und $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{3})^k$.

Aufgabe 4 :

Zinseszins: $(*)$ Ein Konto bei einer Bank weist zum ersten Januar des Jahres x einen Stand von S€ auf. Die Bank verzinst die Einlage jährlich mit α Prozent. Die Aufzinsung erfolgt jährlich jeweils am 31. Dezember.

(a) Wie hoch ist der Kontostand am ersten Januar des Jahres $x + n$ $(n \in \mathbb{N})$, wenn die Verzinsung über die gesamte Zeit konstant bleibt und keine weiteren Kontobewegungen stattfinden?

(b) Was passiert, wenn die Aufzinsung halbjährlich, z.B. am 30. Juni und am 31. Dezember, erfolgt?

Aufgabe 5 :

Es sei $R > 0$ eine reelle Zahl. Betrachtet wird die durch

$$a_1 = 2R \text{ und } a_{n+1} = R + \frac{Ra_n}{R + a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(b) Geben Sie eine untere Schranke für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 6 :

$(*)$ Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz. Geben Sie, falls möglich, den Grenzwert an:

$$a_1 = 1,\, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 7 :

$(*)$ Betrachtet wird die durch

$$x_1 = 1 \text{ und } x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + \tfrac{2}{x_n}) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv gegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(t + \frac{2}{t}) \geq \sqrt{2}$ für alle $t > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $t \geq \frac{1}{2}(t + \frac{2}{t})$ für alle $t \geq \sqrt{2}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab dem zweiten Glied monoton fallend ist und $x_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \geq 2$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ gilt.

Aufgabe 8 :

Gegeben sind die drei Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}\,,\; b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \text{ und } c_n = \sqrt{n + \tfrac{n}{1000}} - \sqrt{n}\,.$$

Zeigen Sie, dass $a_n > b_n > c_n$ für $1 \leq n < 10^6$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ gilt.