Mathematik 1

Übungsserie 3 (23.10.2023 - 27.10.2023)

Aufgabe 1 :

Sei E die Ursprungsebene im $\mathbb{R}^3$, die durch die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Punktes $P = \begin{pmatrix}8\\1\\2\end{pmatrix}$ auf E und ermitteln Sie ebenfalls den Abstand von P zu E.

Aufgabe 2 :

Füllen Sie die Tabelle (ohne Taschenrechner) aus. Nutzen Sie dazu geometrische Überlegungen, Definitionen am Einheitskreis und Additionstheoreme.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin(x)$										
$\cos(x)$										
$\tan(x)$										
$\cot(x)$										

Bemerkung: Diese wichtigen Werte der Winkelfunktionen werden in Mathe 1/2/3 regelmäßig auftauchen. Ein sicherer Umgang mit ihnen ist daher empfehlenswert.

Aufgabe 3 :

(∗) Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) exakte Ausdrücke für $\sin(\frac{\pi}{12})$ und $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Aufgabe 4 :

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$A = \{\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}]\}, \quad B = \{\begin{pmatrix}\cos t\\ t\\ \sin t\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [0, 4\pi]\}, \quad C = \{\begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [-2, 0]\},$$

$$(*)\ D = \{\begin{pmatrix}t^2\\ t\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [-1, 1]\}, \quad (*)\ E = \{\begin{pmatrix}2\cos t\\ 3\sin t\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [0, 2\pi]\},$$

$$F = \{\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [0, 1]\} \cup \{\begin{pmatrix}t\\ 1-t\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [0, 1]\} \cup \{\begin{pmatrix}1-t\\ 0\end{pmatrix} \,\Big|\, t \in [0, 1]\}$$

Aufgabe 5 :

Skizzieren Sie die folgenden Mengen und geben Sie jeweils eine Parameterdarstellung (so wie in der vorherigen Aufgabe) an:

(a) die Strecke vom Punkt $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) (∗) der Kreis parallel zur yz-Ebene mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Radius 2

(c) die Ellipse mit den Scheitelpunkten $\begin{pmatrix} \pm 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$

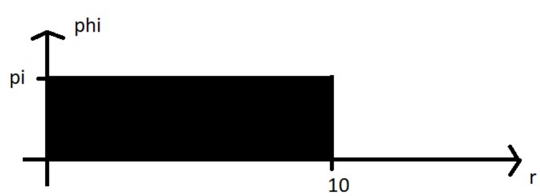
(d) das Quadrat mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) (∗) das Dreieck mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 :

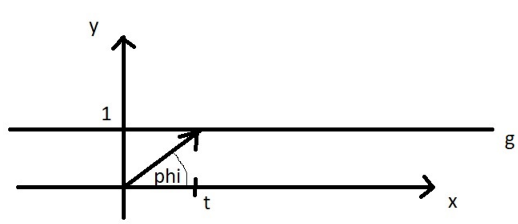
In der Vorlesung wurden ebene Polarkoordinaten eingeführt: Jeder Punkt bzw. Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus dem $\mathbb{R}^2$ kann über seine Länge r und den eingeschlossenen Winkel φ mit der positiven x-Achse dargestellt werden.

(a) Wie sieht das in der r-φ-Ebene gegebene Rechteck



in der x-y-Ebene aus?

(b) Gegeben sei die Gerade $g = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\Big|\, t \in \mathbb{R} \}$ in Parameterform.



Die Strecke zwischen einem Geradenpunkt und dem Ursprung schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel φ ein. Parametrisieren Sie g über den Winkel φ. Gesucht ist also eine Darstellung der Form

$$g = \{ \text{von } \varphi \text{ abhängiger Ausdruck} \,\Big|\, \varphi \in \ldots \}.$$

Aufgabe 7 :

Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten):

(a) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Bigg| \, x^2+y^2+z^2 \leq 4 \text{ und } y \leq 0\}$, (b) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Bigg| \, x^2+y^2+z^2 \leq 2 \text{ und } z \leq 0\}$,

(c) $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Bigg| \, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$, $(d)^{(*)}$ $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Bigg| \, 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$ $(e)^{(*)}$

$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Bigg| \, (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \leq 1\}$

Hinweis: Verwenden Sie bei (e) zunächst eine Verschiebung, bevor Sie Kugelkoordinaten benutzen.