Frage 1: Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 6x + 3$. Bestimmen Sie das erste, zweite und dritte Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 6x + 3 \\
f'(x) &= 3x^2 - 6 \\
f''(x) &= 6x \\
f'''(x) &= 6 \\
T_{f,1,2}(x) &= \frac{f(2)}{0!}(x-2)^0 + \frac{f'(2)}{1!}(x-2)^1 \\
&= \frac{-1}{1}1 + \frac{6}{1}(x-2) \\
&= -1 + 6x - 12 \\
&= 6x - 13 \\
T_{f,2,2}(x) &= T_{f,1,2}(x) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
&= 6x - 13 + (\frac{12}{2!}(x-2)^2) \\
&= 6x - 13 + (6(x^2 - 4x + 4)) \\
&= 6x - 13 + (6x^2 - 24x + 24) \\
&= 6x^2 - 18x + 11 \\
T_{f,3,2}(x) &= T_{f,2,2}(x) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\
&= 6x^2 - 18x + 11 + (\frac{6}{3!}(x-2)^3) \\
&= 6x^2 - 18x + 11 + (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\
&= x^3 - 6x + 3
\end{aligned}$$

Frage 2: Betrachtet wird wie in der Aufgabe zuvor wieder die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 6x + 3$. Bestimmen Sie diesmal die Restglieder für das erste, zweite und dritte Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 6x \\
f'''(x) &= 6 \\
f^{(4)}(x) &= 0 \\
R_{f,1,2}(x) &= \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \\
&= \frac{6\xi}{2}(x - 2)^2 \\
&= 3\xi(x - 2)^2 \\
R_{f,2,2}(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 \\
&= \frac{6}{6}(x - 2)^3 \\
&= (x - 2)^3 \\
R_{f,3,2}(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4 \\
&= \frac{0}{24}(x - 2)^4 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Frage 3: Betrachtet wird die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2 - x \ln x$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_{f,2,x_0}(x)$ 2ten Grades an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 2 - x \ln x \\
f'(x) &= 2x - \ln x - 1 \\
f''(x) &= 2 - \frac{1}{x} \\
T_{f,2,1}(x) &= \frac{f(x_0)}{0!}(x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
&= \frac{3}{1}(x - 1)^0 + \frac{1}{1}(x - 1)^1 + \frac{1}{2}(x - 1)^2 \\
&= 3 + (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2
\end{aligned}$$

Frage 4: Betrachtet wird wie in der Aufgabe zuvor wieder die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2 - x \ln x$. Bestimmen Sie für das Taylorpolynom 2ten Grades um die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ das zugehörige Restglied $R_{f,2,x_0}$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{x^2} \\ R_{f,2,1}(x) &= \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &= \frac{1}{6\xi^2}(x-1)^3 \end{aligned}$$

Frage 5: Betrachtet wird wie in den Aufgaben zuvor wieder die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2 - x \ln x$. Schätzen Sie den Approximationsfehler für das Taylorpolynoms 2ten Grades für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ um die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ ab. (Anmerkung: Abschätzung des Approximationsfehlers heißt Abschätzung des Restglieds.)

$$\begin{aligned} f'''(\frac{1}{2}) &= 4 \\ f'''(1) &= 1 \\ R_{f,2,1}(x) &= \frac{1}{6\xi^2}(x-1)^3 \\ R_{f,2,1}(x) &\leq |\frac{1}{6(\frac{1}{2})^2}| \cdot |(\frac{1}{2} - 1)^3| \\ &\leq |\frac{2}{3}| \cdot |(-\frac{1}{8})| \\ &\leq \frac{2}{24} \\ &\leq \frac{1}{12} \end{aligned}$$