Technische Universität Ilmenau WS 2023/2024
Institut für Mathematik

Prof. Dr. T. Böhme BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1

Übungsserie 13 (15.1.2024 - 19.1.2024)

Aufgabe 1 :

($*$) Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$.

(a) Geben Sie für $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung $f^{(k)}(x)$ von f an.

(b) Stellen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das n-te Taylorpolynom $T_{f,n,x_0}(x)$ von f an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ auf.

(c) Wie groß muss n gewählt werden, damit der Approximationsfehler $|f(x) - T_{f,n,x_0}(x)|$ für $x \in (-1, 1)$ nicht größer als $\frac{1}{100}$ ist?

(d) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} T_{f,n,x_0}(x) = f(x)$.

Aufgabe 2 :

Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$.

(a) Bestimmen Sie das erste, zweite, dritte und vierte Taylorpolynom der Funktion f an den Entwicklungsstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

(b) Bestimmen Sie das Restglied des dritten Taylorpolynoms von f an den Entwicklungsstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.

(c) Welche Beziehung besteht zwischen f und den dritten Taylorpolynomen von f an den Entwicklungsstellen $x_0 = 0$ bzw. $x_1 = 1$?

Aufgabe 3 :

($*$) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1-x}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der bereits bekannten geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

Für welche $x \in (-1, 1)$ konvergiert die Taylorreihe von f gegen $f(x)$?

Aufgabe 4 :

Verwenden Sie den Satz von Taylor, um $f(x_0)$ mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{1}{100}$ genau zu berechnen.

(a) $f(x_0) = \sin 3$,

(b)$^{(*)}$ $f(x_0) = \ln(1.1)$.

Aufgabe 5 :

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung.

(a) Eine differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, wenn für alle $x \in (a, b)$ gilt $f'(x) = 0$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$.

(c) Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und gilt $f(c) = f(d) = 0$ für zwei Zahlen c, d mit $a < c < d < b$, so hat die Ableitung f' von f eine Nullstelle zwischen c und d.

(d) Die Gleichung $x^3 - 3x + c = 0$ hat für kein reelles c zwei Lösungen zwischen 0 und 1.

Aufgabe 6 :

Geben Sie für die folgenden Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils eine Stammfunktion $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

(a) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, *Hinweis: Fallunterscheidung nach* $a \neq -1$ *und* $a = -1$.

(b) $f(x) = \sin x$,

(c) $f(x) = \cos x$,

(d) $f(x) = e^x$,

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$,

(f) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

(g) $f(x) = \sinh x$,

(h) $f(x) = \cosh x$,

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(k)$^{(*)}$ $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

Hinweis: Für die Teilaufgaben e, f, i, j und k verwende man die im Abschnitt über Umkehrfunktionen und deren Ableitungen erworbenen Erkenntnisse.