Mathematik 1
Übungsserie 2 (16.10.2023 - 20.10.2023)

Aufgabe 1 :

Prüfen Sie, ob sich der Vektor $\vec{v}$ als Linearkombination von Vektoren aus der Menge M darstellen lässt. Falls eine Kombination möglich ist: Wie viele Möglichkeiten der Kombination gibt es?

(a) $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\}$

(b) $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\5\end{pmatrix}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\}$

(c) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\}$

Aufgabe 2 :

Es sei g die Gerade, welche in der (x, y)-Ebene durch die Punkte $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ verläuft.

(a) Beschreiben Sie g durch eine Gleichung der Form $ax + by = c$ (parameterfreie Geradengleichung).

(b) Geben Sie eine Parameterdarstellung von g an.

Aufgabe 3 :

($*$) Betrachtet wird die Gerade h in der (x, y)-Ebene mit der Gleichung $4x + 5y = 5$.

(a) Wo schneidet h die x-Achse und wo schneidet h die y-Achse?

(b) Welchen Abstand hat die Gerade h vom Ursprung?

Aufgabe 4 :

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte $A = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g_{AB} und h_{CD}.

(b) Ermitteln Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Darstellung (Koordinatengleichung) für die Ebene E durch die Punkte A, B, C.

(c) Prüfen Sie, ob der Punkt $P = \begin{pmatrix}-6\\7\\4\end{pmatrix}$ auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Aufgabe 5 :

($*$) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Geraden g durch A und B.

(b) Zeigen Sie, dass $C = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nicht auf g liegt. Berechnen Sie den Fußpunkt L des Lotes von C auf g. Liegt L zwischen A und B?

(c) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

orthogonal durchstößt und geben Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes an.

Aufgabe 6 :

Bestimmen Sie jeweils $A \cap B$:

(a) $A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Bigg| \; s, t \in \mathbb{R} \}$,

$B = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \Bigg| \; s \in \mathbb{R} \}$

(b) $A = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \; s, t \in \mathbb{R} \}$,

$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg| \; s, t \in \mathbb{R} \}$

Aufgabe 7 :

Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist das Kreuzprodukt bekanntlich durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.