Frage 1: Berechnen Sie $\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 y\,dy$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \\
\int_0^1 y\,dy &= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{0}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \\
\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 y\,dy &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Frage 2: Die Funktion f sei stetig differenzierbar und von 0 verschieden. Berechnen Sie $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

$$\begin{aligned}
u &= f(x) \\
\frac{du}{dx} &= f'(x) \\
du &= f'(x)dx \\
\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \int \frac{du}{u} \\
&= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| + c \\
&= \ln|f(x)| + c
\end{aligned}$$

Frage 3: Die Funktion f sei stetig differenzierbar. Berechnen Sie $\int f'(x)f(x)\,dx$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \\ g'(x) &= f'(x) \\ \int f'(x)f(x)\,dx &= f(x)f(x) - \int f'(x)f(x)\,dx \quad \Big| + \int f'(x)f(x)\,dx \\ 2\int f'(x)f(x)\,dx &= f(x)f(x) \quad \Big| : 2 \\ \int f'(x)f(x)\,dx &= \frac{(f(x))^2}{2} + c \end{aligned}$$

Frage 4: Wie lauten mögliche Stammfunktionen von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x)$?
Hinweis: $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ g'(x) &= 1 \\ \int 1 \cdot \ln x\,dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx \\ &= x \ln x - \int 1\,dx \\ &= x \ln x - x + c \\ c &= (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 \end{aligned}$$

Frage 5: Die Funktionsgraphen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 - x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 4x - 2$ schließen eine Fläche ein. Wie viele Flächeneinheiten werden eingeschlossen?

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -x^2 - 4x + 5 \\ 0 &= x^2 + 4x - 5 \\ x_{1,2} &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5} \\ x_1 &= -5 \\ x_2 &= 1 \\ \int_{-5}^{1} \left(-x^2 - 4x + 5\right)\,dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_{-5}^{1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 2 + 5\right) - \left(-\frac{-125}{3} - 50 - 25\right) \\ &= \left(\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{100}{3}\right) \\ &= 36 \end{aligned}$$