Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Böhme WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Übungsserie 9 (4.12.2023 - 8.12.2023)

Aufgabe 1 :

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen.

(a)$^{(*)}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k(k+1)!}{2k^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$

(d)$^{(*)}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Aufgabe 2 :

Verwenden Sie das Quotientenkriterium, um die Menge aller reellen Zahlen x zu bestimmen, für die die folgenden Reihen konvergieren (die gesonderte Betrachtung der Randpunkte ist nicht erforderlich).

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{5^k \cdot k}$ (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^k$ (c)$^{(*)}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (x+1)^{2k}$ (e)$^{(*)}$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+2} (x-1)^{3k}$ (f)$^{(*)}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k4^{k-2}} (x-1)^{2k}$

Aufgabe 3 :

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren.

(a)$^{(*)}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{x^3-3x+100}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x+2}{x-1}$ (c)$^{(*)}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2-1}{x^3-2x+1}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}$ (f) $\lim_{x\to 0-0} \frac{|x|}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (h)$^{(*)}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (i) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

Aufgabe 4 :

Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ gilt. Verwenden Sie diese Aussage, um folgende Grenzwerte zu berechnen.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}$ mit $\alpha > 0$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(c)$^{(*)}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

Aufgabe 5 :

Bestimmen Sie die (links-, rechtsseitigen) Grenzwerte folgender Funktionen für $x \to x_0$, sofern diese existieren.

(a) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\,,\ x_0 = 2$

(b)$^{(*)}$ $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}\,,\ x_0 = 2$

(c)$^{(*)}$ $h(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}\,,\ x_0 = 1$

Aufgabe 6 :

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen (auf ihrem gesamtem Definitionsbereich) stetig sind.

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & , \ x > 0 \end{cases}$

(b) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ x\sin\frac{1}{x} & , \ x > 0 \end{cases}$

(c) $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \leq 1 \\ x & , \ 1 < x \end{cases}$

(d)$^{(*)}$ $k : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $k(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \leq 1 \\ -x & , \ 1 < x \end{cases}$

(e)$^{(*)}$ $\ell : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $\ell(x) = \sin^2(\sqrt{1+x^2})$