Technische Universität Ilmenau WS 2023/2024
Institut für Mathematik

Prof. Dr. T. Böhme BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1
Aufgaben zur Vorbereitung der Fachprüfung Mathematik 1
– Ergebnisse –

Aufgabe 1 :

(a) Es gibt einen Studenten der Informatik, der weder C++, noch C# kann.

(b) $\exists x\ \forall N\ \exists n: \ (n > N) \wedge (|a_n - g| > x)$

(c) $\forall N\ \exists n: \ (n > N) \wedge (a_n > b_n)$

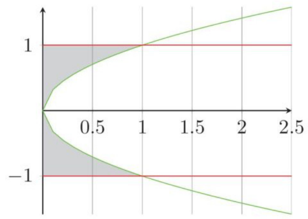
Aufgabe 2 :

(a) $x \in [-1, 5]$,

(b) $x \in (-\infty, -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{33}{4}}] \cup [-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{33}{4}}, \infty)$,

(c) $x \in (-\infty, 7)$.

Aufgabe 3 :



Aufgabe 4 :

- genau eine Lösung für $\alpha \neq \frac{5}{2}$ und $\beta \in \mathbb{R}$
- unendlich viele Lösungen für $\alpha = \frac{5}{2}$ und $\beta = -11$
- keine Lösung für $\alpha = \frac{5}{2}$ und $\beta \neq -11$

Im Fall $\alpha = \frac{5}{2}$ und $\beta = -11$ lautet die Lösungsmenge $\{\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{5}{4} \cdot s \\ -\frac{3}{2} + \frac{s}{4} \\ s \end{pmatrix} | s \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 5 :

Lösung individuell

Aufgabe 6 :

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2 \cdot 3^k = \sum_{k=0}^{n} (2 \cdot 3^k) + 2 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+1} - 1 + 3^{n+1} \cdot 2 = 3^{n+2} - 1$$

Aufgabe 7 :

Die Formel lautet $f^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$. Für den Induktionsschritt ist der Zusammenhang $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$ nützlich.

Aufgabe 8 :

(a) $\frac{1}{2}$, (b) 0, (c) 3,

(d) 3, (e) $\frac{8}{9}$, (f) $e^{-\frac{2}{7}}$,

(g) 0, (h) $-\infty$, (i) Grenzwert existiert nicht.

Aufgabe 9 :

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0 < 1$, somit konvergiert die Reihe.

Aufgabe 10 :

Die Potenzreihen konvergieren für

(a) $x \in [-1, 5)$ (b) $x \in (-4, 0]$ (c) $x \in [-1, 3)$

Hinweis: Durch Anwendung des Quotientenkriteriums erhalten Sie ein offenes Intervall, dessen Randpunkte zusätzlich gesondert untersucht werden müssen.

Aufgabe 11 :

(a) 0, (b) $\frac{1}{2}$, (c) -2,

(d) ∞, (e) $-\infty$, (f) Grenzwert existiert nicht.

Aufgabe 12 :

(a) Stetig, falls $\alpha = 1$, differenzierbar, falls zusätzlich $\beta = 0$.

(b) Stetig, falls $\alpha = 1$, differenzierbar, falls zusätzlich $\beta = 1$.

(c) Stetig, falls $\alpha \sin\beta = 1$ (unendlich viele Kombinationen möglich), differenzierbar, falls zusätzlich $\alpha\cos\beta = 1$. Dies führt zu $\tan(\beta) = 1$, also $\beta = \frac{\pi}{4} \pm k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$, und somit $\alpha = \mp\sqrt{2}$.

Aufgabe 13 :

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz an den Randpunkten/geeigneten inneren Punkten.

Aufgabe 14 :

(a) $f^{(3)}(x) = ((x^2+4x+5)^{-1})'' = (\frac{-2(x+2)}{(x^2+4x+5)^2)})' = \frac{6x^2+24x+22}{(x^2+4x+5)^3}$

(b) $f^{(3)}(x) = (-2x\sin(x^2) + \sin x + x\cos x)'' = (-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - x\sin x + 2\cos x)'$

$$= -12x\cos(x^2) + 8x^3\sin(x^2) - 3\sin x - x\cos x$$

(c) $f^{(3)}(x) = (e^x(\sin x + \cos x))'' = (e^x(2\cos x))' = 2e^x(\cos x - \sin x)$
(d) $f^{(3)}(x) = (2x + \sinh x)'' = (2 + \cosh x)' = \sinh x$
(e) $f^{(3)}(x) = \big(3x^{3x}(\ln x + 1)\big)'' = \big(3x^{3x} \cdot \frac{3(\ln^2 x)x + 6x\ln x + 3x + 1}{x}\big)'$

$$= 3x^{3x} \cdot \frac{9(\ln^3 x)x^2 + 27(\ln^2 x)x^2 + 27(\ln x)x^2 + 9x\ln x + 9x^2 + 9x - 1}{x^2}$$

(f) $f^{(3)}(x) = \big(e^x((x+1)\sin x + x\cos x)\big)'' = \big(2e^x(\sin x + (x+1)\cos x)\big)'$

$$= 2e^x((x+3)\cos x - x\sin x)$$

(g) $f^{(3)}(x) = \big(\frac{-2}{(2x+1)^2}\big)'' = \big(\frac{8}{(2x+1)^3}\big)' = -\frac{48}{(2x+1)^4}$
(h) [(g2)] $f^{(3)}(x) = \big(e^x\cos(e^x)\big)'' = \big(e^x(\cos(e^x) - e^x\sin(e^x))\big)'$

$$= e^x(-3e^x\sin(e^x) - (e^{2x} - 1)\cos(e^x))$$

(i) $f^{(3)}(x) = \big(e^x(1+x)\big)'' = \big(e^x(x+2)\big)' = e^x(3+x)$

Aufgabe 15 :

(a) $f'(x) > 0$, darum ist f streng monoton wachsend und somit injektiv
$f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und f ist stetig, damit wird nach Zwischenwertsatz auch jedes Ergebnis zwischen 0 und ∞ erreicht und wegen der Monotonie wird der Bereich $[0, \infty)$ auch nicht verlassen, also ist f surjektiv

(b) $f(1) = 2$, also $f^{-1}(2) = 1$ und es gilt $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{13}$

Aufgabe 16 :

Für $x \neq y$ gilt $\frac{\arctan(x)-\arctan(y)}{x-y} = \frac{1}{1+\xi^2}$ mit einem ξ zwischen x und y. Jetzt noch auf beiden Seiten zum Betrag übergehen, die rechte Seite geeignet nach oben abschätzen und die resultierende Ungleichung umstellen. Und natürlich noch über den Fall $x = y$ nachdenken.

Aufgabe 17 :

(a) $D_f = \mathbb{R}$, *Nullstellen:* $x_1 = 2, x_2 = 4$, *Polstellen*: keine, *Verhalten im Unendlichen:* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, *(Lokale) Extrema:* $(2, 0)$ und $(4, 0)$ lokale Minima, $(3, 1)$ lokales Maximum.
(b) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *Nullstellen:* $x = 2$, *Polstellen*: $x = 0$, *Verhalten im Unendlichen:* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ *Verhalten an den Polstellen:* $\lim_{x\to 0-0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$, *(Lokale) Extrema:* keine Extremalstellen
(c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *Nullstellen:* $x = 0$, *Polstellen*: $x = -1$, *Verhalten im Unendlichen:* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *Verhalten an den Polstellen:* $\lim_{x\to -1-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1+0} f(x) = \infty$, *(Lokale) Extrema:* $(0, 0)$ lokales Minimum, $(-2, -4)$ lokales Maximum.
(d) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *Nullstellen:* keine, *Polstellen*: keine, *Verhalten im Unendlichen:* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, *(Lokale) Extrema:* $(0, 1)$ lokales Minimum.

Aufgabe 18 :

(a) Globales Minimum an den Stellen $x = -2, x = 1$ mit dem Funktionswert $f(x) = -7$; globales Maximum an den Stellen $x = -1, x = 2$ mit dem Funktionswert $f(x) = 9$.

(b) Globales Minimum an der Stelle $x = 0$ mit dem Funktionswert $f(x) = 1$; globales Maximum an der Stelle $x = 2$ mit dem Funktionswert $f(x) = \cosh 2 \approx 3.7622$

Aufgabe 19 :

(a) 0,	(b) Grenzwert ex. nicht,	(c) $\frac{1}{2}$,
(d) $-\frac{1}{3}$,	(e) $\frac{1}{2}$,	(f) $e^0 = 1$.

Aufgabe 20 :

(a) $T_{f,3,x_0}(x) = 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3$, $|R_{f,3,x_0}(x)| \leq \frac{32}{3}$,
(b) $T_{f,3,x_0}(x) = 1 + 2(x + 1) + 2(x + 1)^2 + \frac{4}{3}(x + 1)^3$, $|R_{f,n,x_0}(x)| \leq \frac{32}{3}e^4 \approx 582,4$.

Aufgabe 21 :

Mit $f(x) = \ln(x)$ und $x_0 = 1$ ergibt sich $|R_{f,n,x_0}(1,5)| \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} < \frac{1}{100}$ für $n \geq 4$. Es folgt

$$T_{f,4,x_0}(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4,$$

sowie $\ln(1,5) \approx T_{f,4,x_0}(1,5) \approx 0,40104$.

Aufgabe 22 :

(a) $-\frac{1}{2}\cos(x^2 + 2) + C$, (b) 0,
(c) $\frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}\arccos x + C$ *oder alternativ* $\frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + D$,
(d) $\ln|x^2 + 3x + 2|\Big|_1^2 = \ln 2$, (e) $\frac{1}{2}e^{x^2+4} + e^x(x - 1) + C$, (f) $\frac{1}{4}\ln|1 + x^4| + C$.

Aufgabe 23 :

(a) $\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{5} \cdot e^{-2t}$, $L = \frac{\sqrt{5}}{2}(1 - e^{-8\pi})$
(b) $\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{1+t^2}$, $L = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{arsinh}(1)}{2}$
(c) $\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{53} = L$
(d) $\|\vec{r'}(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{t}}$, $L = 2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{arcosh}(9) - \operatorname{arcosh}(3))$

Aufgabe 24 :

$\|\vec{r'}(t)\| = 1$, $\int\limits_{\vec{r}} f \ d\vec{s} = 4\pi$

Aufgabe 25 :

Beide Integrale haben das Ergebnis 3.