Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. Dr. T. Böhme

WS 2023/2024

BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

# Mathematik 1
## Übungsserie 4 (30.10.2023 - 3.11.2023)

**Aufgabe 1 :**

Bestimmen Sie mit dem Gauß-Jordan-Verfahren die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & + & 10x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 9x_4 & - & 6x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 11x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & 5x_2 & + & 17x_3 & = & 7 \end{array}$$

(d) (∗)

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

(e) (∗)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \end{array}$$

**Aufgabe 2 :**

Für welche Zahlen $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ haben die folgenden linearen Gleichungssysteme
(i) genau eine Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen und (iii) keine Lösung?
(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & \alpha x_3 & = & \beta \end{array}$$

$(b)^{(*)}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & \beta \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1 \end{array}$$

**Aufgabe 3 :**

Welche der folgenden deutschen Sätze und mathematischen Formeln sind Aussagen? Geben Sie, sofern möglich, den Wahrheitswert an.

(a) Am 4. Juli 2025 wird es nachmittags in Ilmenau regnen.

(b) $4 = \sqrt{16}$

(c) $-2 = \sqrt{4}$

(d) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

(e) 3 teilt 1456733214.

(f)$^{(*)}$ Wenn die letzte Ziffer einer natürlichen Zahl $n$ durch 5 teilbar ist, so ist $n$ durch 5 teilbar.

(g)$^{(*)}$ Wenn die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl rational ist, so ist sie eine natürliche Zahl.

**Aufgabe 4 :**

Geben Sie die folgenden Mengen explizit durch Aufzählung ihrer Elemente an.

(a)$^{(*)}$ $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10 \text{ und } n \text{ ist durch 2 teilbar}\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| \leq 1 \text{ und } 7 \cdot x \in \mathbb{Z}\}$.

**Aufgabe 5 :**

Bestimmen Sie, soweit möglich, den Wahrheitswert der folgenden Aussagen und bilden Sie deren Negation.

(a)$^{(*)}$ $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : xy = 1$

(b)$^{(*)}$ $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : (xy = 1) \vee (x = 0)$

(c) $\forall x \in (0, 1]\, \exists y \in (0, 1] : y < x$

(d) $\forall x \in [0, 1]\, \exists y \in [0, 1] : y < x$

*Zur Erinnerung:* $\forall a \in A : P(a)$ *heißt „Für alle Elemente* $a$ *der Menge* $A$ *gilt die Aussage* $P(a)$*." Entsprechend heißt* $\exists a \in A : P(a)$ *„Es gibt ein Element* $a$ *der Menge* $A$*, für das die Aussage* $P(a)$ *gilt."*

**Aufgabe 6 :**

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ und $C = \{a, t\}$. Geben Sie folgende Mengen explizit durch Aufzählung ihrer Elemente an.

(a) $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$,

(b) $A \times (B \cup C)$,

(c)$^{(*)}$ $(A \cup B) \times (B \setminus C)$,

(d)$^{(*)}$ $\{x \in B \mid x \in C\}$. Wie kann man diese Menge noch darstellen?

**Aufgabe 7 :**

Veranschaulichen Sie die folgenden Mengen grafisch in einem $x$-$y$-Koordinatensystem.

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 16\}$,

(b)$^{(*)}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y = x^2) \wedge (y = x)\}$,

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 2x)(y - \frac{x}{2}) < 0\}$,

(d)$^{(*)}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

**Aufgabe 8 :**

Es sei $D$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen $a$ bzw. $b$ haben und dessen Hypotenuse die Länge $c$ hat. Bekanntlich gilt $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras).

(a) Welche Länge hat die Verbindungsstrecke $s$ der Punkte $\binom{x_1}{y_1}$, $\binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ ?

(b) Es seien $a, b, r$ reelle Zahlen. Skizzieren Sie die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \right\}.$$

(c) Stellen Sie die Menge $K$ aller Punkte des $\mathbb{R}^2$, welche vom Punkt $\binom{a}{b}$ einen Abstand von höchstens $r > 0$ haben, in der Form $\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid P(x,y)\}$ mit einer geeigneten Aussageform $P(x,y)$ dar.

**Aufgabe 9 :**

Eine Teilmenge der Ebene heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten $P, Q$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ von $P$ und $Q$ enthält.

(a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt von je zwei konvexen Mengen, selbst eine konvexe Menge ist.

(b) Ist die Vereinigung zweier konvexer Mengen auch immer konvex?

**Aufgabe 10 :**

$(*)$ Sei $M$ eine Menge. Für eine Teilmenge $X$ von $M$ heißt $M \setminus X$ die *Komplementärmenge* von $X$ (bzgl. $M$) und wird mit $\overline{X}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen $A, B, C$ von $M$ folgende Aussagen gelten:

(a) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$,

(b) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$,

(c) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.