Frage 1: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$
Summenregel: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{x^3}{3})' - (2x^2)' + (4x)' - (5)' \\ &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

Frage 2: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = x \sin(ax + 3)$
Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \cdot \sin(ax + 3) + x \cdot (\sin(ax + 3))' \\ &= 1 \cdot \sin(ax + 3) + x \cdot \cos(ax + 3) \cdot (ax + 3)' \\ &= 1 \cdot \sin(ax + 3) + x \cdot \cos(ax + 3) \cdot a \\ &= \sin(ax + 3) + ax \cdot \cos(ax + 3) \end{aligned}$$

Frage 3: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$
Summenregel: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$
Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((\sin x)^3)' + ((\cos x)^3)' \\ &= 3(\sin x)^2 \cdot (\sin x)' + 3(\cos x)^2 \cdot (\cos x)' \\ &= 3(\sin x)^2(\cos x) + 3(\cos x)^2(-\sin x) \\ &= 3(\sin x)(\sin x)(\cos x) + 3(\cos x)(\cos x)(-\sin x) \\ &= 3(\sin x)(\sin x)(\cos x) - 3(\cos x)(\cos x)(\sin x) \\ &= 3 \sin x \cos x \cdot (\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

Frage 4: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$
Quotientenregel: $[\frac{g(x)}{h(x)}]' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)' \cdot x^2 - \cos x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{-\sin(x) \cdot x^2 - \cos(x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x) \cdot 2}{x^3} \\ &= \frac{-x \sin x - 2 \cos x}{x^3} \end{aligned}$$

Frage 5: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = x + \sqrt{x}$
Summenregel: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' + (x^{\frac{1}{2}})' \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Frage 6: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}$
Summenregel: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$
Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' + ((x^2 + 3)^{\frac{1}{2}})' \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 3)' \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot 2x \\ &= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} \\ &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \end{aligned}$$

Frage 7: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{bx + c})^2$
Summenregel: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$
Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sqrt{a} - \sqrt{bx + c}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{bx + c})' \\ &= 2(\sqrt{a} - \sqrt{bx + c}) \cdot (-\frac{1}{2}(bx + c)^{-\frac{1}{2}}) \cdot (bx + c)' \\ &= 2(\sqrt{a} - \sqrt{bx + c}) \cdot -\frac{1}{2\sqrt{bx + c}} \cdot b \\ &= -\frac{\sqrt{a} - \sqrt{bx + c}}{\sqrt{bx + c}} \cdot b \\ &= -(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{bx + c}} - \frac{\sqrt{bx + c}}{\sqrt{bx + c}})b \\ &= (-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{bx + c}} + 1)b \\ &= b(1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{bx + c}}) \end{aligned}$$

Frage 8: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = 2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^6}$
Summenregel: $[g(x) + h(x)]' = g'(x) + h'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2)' - (3x^{-1})' + (4x^{-2}) - (5x^{-6})' \\ &= 0 - (-1 \cdot 3x^{-2}) + (-2 \cdot 4x^{-3}) - (-6 \cdot 5x^{-7}) \\ &= 3x^{-2} - 8x^{-3} + 30x^{-7} \\ &= \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{30}{x^7} \end{aligned}$$

Frage 9: Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion: $f(x) = (e^x \cdot \ln x)^2$
Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} \cdot \ln^2 x \\ f'(x) &= (e^{2x})' \cdot \ln^2 x + e^{2x} \cdot (\ln^2 x)' \\ &= 2e^{2x} \cdot \ln^2 x + e^{2x} \cdot 2(\ln x) \cdot (\ln x)' \\ &= 2e^{2x} \cdot \ln^2 x + e^{2x} \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2(e^{2x})(\ln x)(\ln x) + 2(e^{2x})(\ln x)(\frac{1}{x}) \\ &= 2e^{2x} \cdot \ln x \cdot (\ln x + \frac{1}{x}) \end{aligned}$$

Frage 10: Bestimmen Sie $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$ für die Funktion: $f(x) = \sqrt{1 + (\cos(x^2))^2}$
Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1 + (\cos(x^2))^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 + (\cos(x^2))^2)' \\ &= \frac{1}{2}(1 + (\cos(x^2))^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\cos(x^2) \cdot (\cos(x^2))' \\ &= \frac{1}{2}(1 + (\cos(x^2))^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\cos(x^2) \cdot (-\sin x^2) \cdot (x^2)' \\ &= \frac{1}{2}(1 + (\cos(x^2))^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\cos(x^2) \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + (\cos(x^2))^2}} \cdot 2\cos(x^2) \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x \\ &= -\frac{2\cos(x^2) \cdot \sin(x^2) \cdot 2x}{2\sqrt{1 + (\cos(x^2))^2}} \\ &= -\frac{\cos(x^2) \cdot \sin(x^2) \cdot 2x}{\sqrt{1 + (\cos(x^2))^2}} \end{aligned}$$

Hinweis: $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3\cdot 2}}{\sqrt{2\cdot 2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2})$

$$
\begin{aligned}
f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) &= -\frac{\cos(\frac{\sqrt{\pi}}{2})^2 \cdot \sin(\frac{\sqrt{\pi}}{2})^2 \cdot 2(\frac{\sqrt{\pi}}{2})}{\sqrt{1 + (\cos(\frac{\sqrt{\pi}}{2})^2)^2}} \\
&= -\frac{\cos(\frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{1 + (\cos(\frac{\pi}{4}))^2}} \\
&= -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} \\
&= -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} \\
&= -\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \\
&= -\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}
$$