Technische Universität Ilmenau WS 2023/2024
Institut für Mathematik

Prof. Dr. T. Böhme BT, EIT, II, MIW, WSW, BTC, FZT, LA, MB, MTR, WIW

Mathematik 1

Übungsserie 11 (18.12.2023 - 20.12.2023 und 4.1.2024 - 5.1.2024)

Aufgabe 1 :

Bestimmen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = (x^4 + 2x - 1)^2$, (b) $f(x) = \sin(x^2 + x - 1)$, (c) $f(x) = (\sin x)(\cos x)$.

Aufgabe 2 :

Bestimmen Sie die 5-te Ableitung $f^{(5)}(x)$ der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^3 - 17x^4$, (b) $f(x) = \sin(2x + 3)$, (c) $f(x) = 3e^{2x+1}$.

Aufgabe 3 :

$(*)$ Berechnen Sie die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \sin x$, (b) $f(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 4 :

$(*)$ Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und die erste Ableitung f'.

(a) $f(x) = \sin((2x + 1)\pi)$, (b) $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$,

(c) $f(x) = \cos x \sin^2 x$, (d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Aufgabe 5 :

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen f.

(a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (2x)^{\sin x}$,

(b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^a a^x$, $a > 0$,

(c)$^{(*)}$ $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (\sqrt{x})^{\tan x}$.

Hinweis: Stellen Sie die Funktionen zuerst in der Form $e^{h(x)}$ mit geeignetem $h(x)$ dar und wenden Sie dann die Kettenregel an.

Aufgabe 6 :

Bilden Sie mit Hilfe der Differenziationsregel der Umkehrfunktion die Ableitung

(a) der arccos-Funktion, (b)$^{(*)}$ der arctan-Funktion.

Aufgabe 7 :

Bestimmen Sie jeweils alle lokalen Maximal- und Minimalstellen der folgenden Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = (x-1)x(x+1)$,

(b) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$,

(c)$^{(*)}$ $f(x) = \frac{x^3}{10(x-2)}$,

(d)$^{(*)}$ $f(x) = e^{x^2}$.

Aufgabe 8 :

Bestimmen Sie alle globalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(a) $a = -1,\ b = 1,\ f(x) = x \sin x$,

(b)$^{(*)}$ $a = -2,\ b = -\frac{3}{4},\ f(x) = \frac{x^3}{3x+2}$.

Aufgabe 9 :

Unter allen Rechtecken mit dem Umfang $\ell > 0$ ist das mit dem größten Flächeninhalt zu finden.

Aufgabe 10 :

$(*)$ Für welche Zahlen a ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + \sin x$ monoton steigend?