Mathematik 1
Übungsserie 6 (13.11.2023 - 17.11.2023)

Aufgabe 1 :

Der *Binomialkoeffizient* ist für natürliche Zahlen n, k mit $n \geq k$ definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Weisen Sie nach, dass

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

gilt.

Aufgabe 2 :

Zeigen Sie – unter Benutzung von Aufgabe 1 – die Gültigkeit des Binomischen Satzes

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Aufgabe 3 :

$(*)$ Zeigen Sie:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad\qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Aufgabe 4 :

$(*)$ Bestimmen Sie das konstante (von x unabhängige) Glied des Terms $(x^2 + \frac{1}{x})^9$.

Aufgabe 5 :

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion (nach n), dass für $n \geq k$ jede n-elementige Menge genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen besitzt.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Satzes und Teilaufgabe (a), dass jede n-elementige Menge genau 2^n Teilmengen hat.

Bemerkung: Die Menge aller Teilmengen einer Menge A heißt Potenzmenge von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ oder 2^A bezeichnet.

Hinweis: Um über Konvergenz und Stetigkeit sprechen zu können, benötigen wir den Betrag zur Abstandsmessung. Der Umgang mit $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$ *soll darum in den nächsten drei Aufgaben geübt werden.*

Aufgabe 6 :

Verifizieren Sie die Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Aufgabe 7 :

$(*)$ Verifizieren Sie die Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Aufgabe 8 :

Stellen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen als Vereinigung von Intervallen dar.

(a) $\left|\dfrac{x+3}{2x-4}\right| > 3$

(b)$^{(*)}$ $|x - 1| + |x + 5| \leq 4$

(c)$^{(*)}$ $||||x| - 2| - 2| - 2| < 2$

(d) $|x^2 + 4x + 1| < 3$

Aufgabe 9 :

Untersuchen Sie die reelle Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit und geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ an, falls dieser existiert.

(a) $a_k = 1$ (b) $a_k = (-1)^k$ (c) $a_k = k$ (d) $a_k = \frac{1}{k}$ (e) $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$