

第五届广东省大学生数学竞赛试卷(经济管理类)

考试时间: 2015 年 10 月 24 日上午 9:00 至 11:30 考试形式: 闭卷考试

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评阅									
审核									

一、填空题(本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{1/t} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} =$ _____。
2. 二重极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (3, -\frac{1}{3})} (2 + xy)^{\frac{1}{y+xy^2}} =$ _____。
3. 设 $f(x)$ 是单调的连续函数, 有可导的反函数 $f^{-1}(x)$, 并且 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 那么积分 $\int f^{-1}(x) dx =$ _____。
4. 积分 $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin^{10} x dx =$ _____。
5. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的隐函数, 且 $z(1, 0) = -1$, 则 $z(x, y)$ 在点 $(1, 0)$ 处的全微分 $dz =$ _____。
6. 设 $z = f(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $f(x, 0) = 1$, $f'_y(x, 0) = x$, 则函数 $f(x, y) =$ _____。
7. 积分 $\int_0^1 dy \int_{y/2}^y \sin(x^2) dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^1 \sin(x^2) dx =$ _____。
8. 试判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 的敛散性 _____ (收敛或发散)。
9. 设直线 $\ell: x + y = 1$, 曲线 $S: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, 则 ℓ 与 S 所围成的平面图形绕直线 ℓ 旋转所得的旋转体的体积 $V =$ _____。
10. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数, $f(1) = 0$; 又二元函数 $z = f(e^x + e^y)$ 满足微分方程 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$, 则 $f(u) =$ _____。

三、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 有三阶导数, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0$, 试证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$$

七、(本题 10 分) 设无穷级数 $a_1 + \frac{a_2}{1+x} + \frac{a_3}{(1+x)^2} + \frac{a_4}{(1+x)^3} + \cdots$, 其中 $a_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}$, 求此无穷级数的收敛域 D , 并求其和函数 $S(x)$ 。