学校________ 院系________ 姓名________ 准考证号________

装 订 线 内 请 勿 答 题

第四届广东省大学生数学竞赛试卷（高职高专类）

参考答案

一、1.(A)　2.(B)　3.(B)　4.(C)　5.(D)

二、1.　0　　2.　$\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$　　3.　$\dfrac{2}{\pi}$　　4.　0　　5. 不能

三、解　考虑到

$$\frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(b-a)}\frac{\sin(b-a)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$=\frac{1}{\sin(b-a)}\frac{\sin\left[(x+b)-(x+a)\right]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$=\frac{1}{\sin(b-a)}\frac{\sin(x+b)\cos(x+a)-\sin(x+a)\cos(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

$$=\frac{1}{\sin(b-a)}\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}-\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\right]$$

……………(6分)

所以

$$\int\frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx=\int\frac{1}{\sin(b-a)}\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}-\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(b-a)}\int\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}-\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}\right|+C$$

……………(10分)

四、解　本题比较简便的解法是用幂级数展开式或泰勒公式的唯一性。如果没学过幂级数或泰勒公式可用以下方法。

对 $f(x)=\arctan x$ 求导得

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　或　$\left(1+x^2\right)f'(x)=1$　　……………(2分)

再求导得

$$\left(1+x^2\right)f''(x)+2xf'(x)=0$$

两边再求n-2阶导数,并利用乘积的高阶导数的莱布尼兹公式，得

$$\left(1+x^2\right)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x)=0$$

……………(4分)

令$x=0$得

$$f^{(n)}(0)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)=0$$

得如下递推公式

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$$ ……………(6分)

由于$f(0)=\arctan 0=0$，所以$n=2m$为偶数时，$f^{(2m)}(0)=0$

由于$f'(0)=\left.\dfrac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$，所以$n=2m+1$为奇数时，

$$f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!$$ ……………(10分)

五、解　由　$a_{n+2}=\dfrac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}\quad(n=1,2,\cdots)$

得　$$\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{a_n+a_{n+1}}{2a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$$ ……………(2分)

若记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，则 $b_1=1$，$b_2=\dfrac{1}{2}$，$b_{n+2}=\dfrac{1}{2}(b_n+b_{n+1})\quad(n=1,2,\cdots)$，

用数学归纳法容易证明$b_1>b_3>\cdots>b_{2n+1}>\cdots>b_{2n}>\cdots>b_4>b_2$，因此$\{b_{2n}\}$和$\{b_{2n+1}\}$都收敛.

……………(4分)

设$\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n}=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n+1}=\beta$，则 $b_{2n}=\dfrac{1}{2}(b_{2n-1}+b_{2n-2})$两端取极限,可得$\alpha=\beta$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$存在. ……………(6分)

若$\alpha\neq 0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{\alpha}$. 将$b_{k+2}=\dfrac{1}{2}(b_k+b_{k+1})$从$k=1$到$k=n$相加，得

$$\sum_{k=3}^{n+2}b_k=\frac{1}{2}b_1+b_2+\sum_{k=3}^{n}b_k+\frac{1}{2}b_{n+1}$$

或　$$b_{n+2}+b_{n+1}=\frac{1}{2}b_1+b_2+\frac{1}{2}b_{n+1}$$

即 $b_{n+2}+\frac{1}{2}b_{n+1}=\frac{1}{2}b_1+b_2$ ……………(8分)

取极限，并考虑 $b_1=1$，$b_2=\frac{1}{2}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha=\frac{2}{3}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\alpha}=\frac{3}{2}$. ……………(10分)

六、证明 假设方程 $f(x)=0$ 的某两个不同根 $x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 之间没有 $g(x)=0$ 的根，设 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. ……………(4分)

因为在 $[a,b]$ 内 $g(x)\neq 0$，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$.在 $[a,b]$ 上应用罗尔中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}=0$$ ……………(8分)

即 $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$

这与对一切 x 都有 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ 矛盾. ……………(10分)

七、解 设直角三角形斜边长为 c 且斜边与水面（即一直角边）夹角为 α.
……………(2分)

令 x 轴铅直向下，且原点在水面. 则与水面垂直的直角边长为 $c\sin\alpha$.任取小区间 $[x,x+dx]$. 在这个小区间上，水对薄板的压力为

$$P(\alpha)=\int_0^{c\sin\alpha}x\left[(c\sin\alpha-x)\cot\alpha\right]dx$$

$$=\int_0^{c\sin\alpha}(cx\sin\alpha-x^2)\cot\alpha dx$$

$$=\frac{c^3}{6}\sin^2\alpha\cos\alpha\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$ ……………(6分)

令 $P'(\alpha)=0$，得 $\sin\alpha(3\cos^2\alpha-1)=0$. 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一驻点

$\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ， ……………(8分)

所以$\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时薄板所受水的压力最大. ……………(10分)

八、解 因为$f'(x)=2^x\ln 2-2x$，$f''(x)=2^x\ln^2 2-2$，$f'''(x)=2^x\ln^3 2<0$，

……………(3分)

所以$f''(x)$至多一个零点，$f'(x)$至多两个零点，$f(x)$至多三个零点.

……………(6 分)

由于$f(0)=f(1)=0$，又由于$f(4)=-1<0$，$f(5)=6>0$，所以存在$\xi\in(4,5)$，使得$f(\xi)=0$．由此可见$f(x)=2^x-1-x^2$在实数范围内有且仅有三个零点.

……………(10 分)

九、解 由于对任意的x及h均成立$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\dfrac{1}{2}h\right)$，

以$2h$代h，得 $f(x+2h)-f(x)=2hf'(x+h)$. ……………(2 分)

再以x代$x+h$，得$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$. ……………(5 分)

对h微分两次，得$f''(x+h)-f''(x-h)=0$， ……………(8 分)

令$x=h$,得到$f''(2x)=f''(0)$，即对任何x有$f''(x)=$ 常数，从而$f(x)$为二次函数.

……………(10 分)