

---

# 向量代数与空间解析几何高度总结

## 1、考点内容

向量的概念      向量的线性运算      向量的数量积和向量积      向量的混合积  
两向量垂直、平行的条件      两向量的夹角      向量的坐标表达式及其运算      单位向量  
方向数与方向余弦      曲面方程和空间曲线方程的概念  
平面方程、直线方程  
平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件  
点到平面和点到直线的距离      球面      柱面      旋转曲面  
常用的二次曲面方程及其图形  
空间曲线的参数方程和一般方程  
空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

## 2、考点要求

掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件。  
理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法。  
掌握平面方程和直线方程及其求法。  
会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题。  
会求点到直线以及点到平面的距离。  
了解曲面方程和空间曲线方程的概念。  
了解常用二次曲面的方程及其图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程。  
了解空间曲线的参数方程和一般方程。了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程。

## 一、知识点

### 1. 向量代数

研究的对象为自由向量，研究的空间限于实物空间，即不超过三维的空间。

①向量的一般表示 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,等

●几何表示：以原点为起点的有向线段。

●坐标表示:  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

●投影表示:  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$

## ② 向量的方向角和方向余弦

●  $\vec{a}$  与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的正向且非负的夹角  $\alpha, \beta, \gamma$  称为  $\vec{a}$  的方向角。

●  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  称为  $\vec{a}$  的方向余弦, 且  $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$

● 任意向量  $\vec{r}$  ( $\vec{e}_r$  为  $r$  的单位向量, 并规定  $\vec{e}_r$  离开原点为正方向。)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) = (r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma) = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\Rightarrow (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \vec{e}_r$$

$\vec{e}_r$  称为  $\vec{r}$  的单位向量, 并且  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = |\vec{e}_r|^2 = \sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2} = 1$ 。

## ③ 夹角专题

● 两向量的夹角  $\varphi$  规定: 为两向量不大于  $\pi$  的夹角, 即  $0 \leq \varphi \leq \pi$ 。

\*  $\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Rightarrow$  两向量平行,  $\varphi = \pi \Rightarrow$  两向量反平行;

两向量平行或反平行的充要条件为:  $\vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\vec{a} \neq 0)$ 。

\*  $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Rightarrow$  两向量垂直。

● 直线与平面的夹角  $\theta$  规定: 直线与该直线在平面上的投影直线之间的夹角,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 。

● 平面与平面的夹角  $\psi$  规定: 两平面的公垂面与他们的截痕直线之间的夹角,  $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ 。

又等于他们的法线之间不超过  $\frac{\pi}{2}$  的夹角。

● 定比分点公式:  $P_1, P_2, P$  为同一直线上的三点,

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{P_1 P}|}{|\overrightarrow{P P_2}|} \rightarrow \begin{cases} \lambda > 0, & P \text{ 在 } P_1 \text{ 和 } P_2 \text{ 中} \\ \lambda < -1, & P \text{ 在 } P_2 \text{ 外} \\ -1 < \lambda < 0, & P \text{ 在 } P_1 \text{ 外} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_1 P} = \lambda \overrightarrow{P P_2} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right)$$

④数量积 又称标积或点积，表示为  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

或：  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \Pr j_a \vec{b} = |\vec{b}| \Pr j_b \vec{a} \quad (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$

$$\Pr j_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \text{ 称为 } \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上的投影。}$$

注意：数量积本质上就是一个实数。在三维以上空间的数量积称为内积，且可表示为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle a, b \rangle = (x_1, y_1, z_1, t_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, t_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + t_1 t_2$$

③向量积 又称叉积或外积，表示为  $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\bullet \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

方向规定：转向角不超过  $\pi$  的右手螺旋定则。

$$\bullet \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi,$$

● 几何意义：  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  = 平行四边形的面积；  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ ，且共起点  $\Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  共线。

⑤ 混和积 表示为  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$

$$\bullet \quad [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = V \quad V = 0 \Rightarrow \text{三点共面}$$

● 几何意义：  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$  代表平行六面体的体积；  $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  共面。

## 直线方程

• 方向向量  $\vec{s}$ ：一族与该直线平行的方向数  $l, m, n$ ；一般用  $\vec{s} = (l, m, n)$  表示直线的方向向量。

①一般式方程

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 & \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 & \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}, \quad \vec{n} \text{ 一般表示平面的法线向量。}$$

则直线的方向向量  $\vec{s} = (l, m, n) = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

②点向式（标准式）  $\vec{s} = (l, m, n)$

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

③参数式  $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$   $M(x_0, y_0, z_0)$  为直线上已知点，方向数：  $\vec{s} = (l, m, n)$

④两点式

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

⑤方向角式：  $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ， $\alpha, \beta, \gamma$  为已知。

⑥直线间关系

$$\bullet L_1 // L_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\bullet L_1 \perp L_2 \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$\bullet \angle \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|}$$

• 点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  到直线  $\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}$  的距离  $d$

$$d = \frac{\text{底长为 } |\vec{s}| \text{ 的平行四边形面积}}{|\vec{s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

• 直线到直线的距离  $d$

$$(a) \text{ 两平行直线的距离 } d \text{ 同上} \quad d = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

(b) 两异面直线的距离  $d$ （画出平行六面体图推导出下式）

$$d = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2 \right] \right|}{\left| \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 \right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}$$

其中：  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  和  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  分别为两直线上的任意两点，不管这两点位置如何，

$\overrightarrow{P_1P_2}$  的投影的模都等于  $d$ 。

## 5. 平面方程

①一般式  $Ax + By + Cz + D = 0$

法线方向向量  $\vec{n} = (A, B, C)$

**形象记忆掌握法：“影评”**（隐蔽平行坐标量），如  $y$  不出现，则  $//y$  轴；依此类推。

②点法式  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

③三点式  $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$

④截距式：即平面经过下列三点：  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ ,  $(0, 0, c)$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

⑤平面束方程  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

不包含  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ；如果所求平面通过已知直线（一般式、点向式），则用平

面束方程会比较简便，但必须验证  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  是否满足所求结论，以免遗漏。

⑥平面间的关系

●  $\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

●  $\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

● 夹角  $\theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

● 点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离，对直线到平面的距离只要在已知直线上任取一点即可类似处理

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

● 两平行平面之间的距离

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 6. 平面与直线之关系

$$L \parallel \pi \Rightarrow Al + Bm + Cn = 0$$

$$L \perp \pi \Rightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

$$\text{夹角 } \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

## 7. 曲面及其方程

### 7.1 准线与母线的界定

**准线**一般指基准曲线，如旋转轴，圆或圆锥曲线；**母线**顾名思义是由该曲线旋转或平移（可以是空间平移）后可以生成所要求的曲面的曲线（就像母亲生孩子）；其中的旋转轴和平移基准也就是准线。如一条直线沿某一圆周平移一周形成圆柱面。

### 第 1 技 理解曲面图形。

- 准线和母线都是直线  $\Rightarrow$  旋转形成 锥面（如椭圆锥面等）。
- 准线是直线而母为曲线  $\Rightarrow$  旋转形成 旋转曲面（如单双叶双曲面等）；  
空间平移形成柱面（如椭圆柱面等）。
- 准线和母线都是曲线  $\Rightarrow$  相互正交的两抛物线平移形成马鞍面；  
椭圆沿抛物线伸缩平移形成椭圆抛物面。
- ⊗ 零点法：用于分析二次曲面的准线和母线，以便确定曲面的轮廓。
- ⊗ 截痕法：用于分析二次曲面的细节，以便画出曲面图形。
- ⊗ 伸缩法：用于分析曲面之间的转换，如圆锥面转化为椭圆锥面等。
- ⊗ 动静点转换法：是确定旋转曲面方程和伸缩变形方程的定势手段。

### 7.3 投影方程的确定

任一空间曲线  $\Gamma: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上的投影构成一条平面曲线——**投影曲线**；以

投影曲线为母线沿垂直于平面  $\pi$  的任意准线移动构成**投影柱面**，如直线的投影柱面就是一个垂直于  $\pi$  的平面。

如求曲线  $\Gamma$  在  $xoy$  平面上的投影方程

由  $\Gamma$  中消去  $z \Rightarrow$  得到一个母线  $\parallel z$  轴的柱面方程  $\varphi(x, y) = 0$ 。

则投影于  $XOY$  平面上的投影方程为  $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

**评注** 空间几何解题一般切入点：首先尽可能画出草图，思考所求结论必须知道几个可能的条件，这些条件在题目中一般又是隐含出现的，我们的目标就是从隐含条件推出需要的条件，然后套用直线或平面的方程类型。其中，重点注意已知直线的方向向量和已知平面的法向量与待求直线或平面的关系。

**【例 1】** 求直线  $L: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 + 8t \end{cases}$  在平面  $\pi: x - y + 3z + 8 = 0$  上和三个坐标平面上的投影方程。

解： 第一步 求投影柱面（对直线投影而言投影柱面就是投影平面）方程  $\pi^*$  的  $\vec{n}^*$ ，该平面显然与  $\pi$  垂直，又

$$\vec{s} = \{-1, 2, 8\}, \quad \vec{n} = \{1, -1, 3\}$$

$$\text{则易知 } \vec{n}^* = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \{14, 11, -1\}$$

又  $\pi^*$  也通过  $L$ ，可以利用  $L$  上的已知点  $(3, -1, 5)$ ，则  $\pi^*$  为

$$14(x - 3) + 11(y + 1) - 1(z - 5) = 0$$

$L$  在平面  $\pi$  投影正好为  $\pi$  与  $\pi^*$  的交线，其方程为

$$\begin{cases} 14(x - 3) + 11(y + 1) - (z - 5) = 0 \\ x - y + 3z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x + 11y - z - 26 = 0 \\ x - y + 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

直线在三个平面上的投影方程为：

$$XOY \Rightarrow \begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \\ z=0 \end{cases}; \quad XOZ \Rightarrow \begin{cases} x=3-t \\ y=0 \\ z=5+8t \end{cases}; \quad YOZ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1+2t \\ z=5+8t \end{cases}$$

## 8. 二次曲面方程和图形的研究

8.1 准线和母线是研究曲面的核心技术。已知曲面方程，用**零点法**可确定准线和母线，从而确定曲面的生成方式；用**截痕法**可以确定曲面的具体形状；用**伸缩法**可以研究曲面之间的转换，建立新曲面方程和后面的将要建立的旋转曲面方程要使用**动静点转换法**。

### ● 零点法

例如：分析曲面方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$  的图形，令  $x=0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = z \Rightarrow y^2 = -b^2 z$  为一开口向下的抛物线；令  $y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = z \Rightarrow y^2 = a^2 z$  为一开口向上的抛物线；这两个抛物线就构成了该二次曲面的准线和母线，可以想象，该二次曲面是有其中一个抛物线沿另一个抛物线平移生成。

### ● 截痕法

平面  $z=t$  与曲面  $F(x, y, z)=0$  的交线称为截痕，通过综合截痕的变化来了解曲面的形状的方法，称为截痕法。例如：在  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$  中，令  $z=t \Rightarrow \frac{x^2}{(a\sqrt{t})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{t})^2} = 1$ ，这是一条双曲线，也就是用水平平面截该曲面时，其截痕是双曲线。综合零点法的分析，我们就能够确定： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$  正是双曲抛物面，即马鞍面。

### ● 伸缩法

如在曲面  $F(x, y)=0$  上取一静点  $M(x_1, y_1)$ ，现把  $M(x_1, y_1)$  变形为动点  $M(x_2, y_2)$ ，然后想办法消去静点坐标（即**动静点转换法**）。又，给定两了点坐标的伸缩变换关系，如令

$x_2 = x_1; y_2 = \lambda y_1$ ，则： $F(x_1, y_1)=0 \Rightarrow F\left(x_2, \frac{1}{\lambda} y_2\right)=0 \Rightarrow F\left(x, \frac{1}{\lambda} y\right)=0$  称为原曲面经伸缩变形

后的新曲面方程。

例如圆柱面变成椭圆柱面：



$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2 \xrightarrow{x_2=x_1; y_2=\frac{b}{a}y_1} x_2^2 + \left(\frac{a}{b}y_2\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

又如圆锥面变成椭圆锥面:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = z^2 \Rightarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2} = z_1^2 \xrightarrow{x_2=x_1; y_2=\frac{b}{a}y_1, z_2=z_1} \frac{x_2^2 + \left(\frac{a}{b}y_2\right)^2}{a^2} = z_2^2 \Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = z_2^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

常用曲面之一: 柱面

**评注** 柱面是由母线沿准线空间平移形成, 柱面的准线和母线必有一个是直线。其中, 直线为准线, 曲线为母线。如果是圆柱面, 则准线和母线可以互换; 如果为非圆柱面, 如棱柱面, 则必须取直线为准线, 曲线为母线。

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{圆柱面} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{椭圆柱面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{双曲柱面} \qquad x^2 = 2py \quad \text{抛物柱面}$$

特点: 柱面方程中, 柱面轴平行于隐含的坐标轴, 如  $x^2 = 2py$  的轴平行于  $z$  轴。

注意: 在三维情况下圆的方程的一种形式为 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = R \end{cases}$$

**形象记忆掌握法:** 影(隐)评(平)。

### 8.3 常用曲面之二: 旋转曲面(母线沿直线准线旋转移形成)

- 平面曲线  $f(x, y) = 0$  沿  $z$  轴旋转不能形成曲面;
- 平面曲线  $f(x, y) = 0$  沿  $x$  轴旋转  $\Rightarrow f(x, \pm\sqrt{z^2 + y^2}) = 0$ ;
- 平面曲线  $f(x, y) = 0$  沿  $y$  轴旋转  $\Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ 。

● 空间曲线旋转形成的曲面(可以沿任意轴旋转)

$$\text{空间曲线 } \Gamma \text{ 的参数方程: } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}, \text{ 空间曲面 } \Omega \text{ 的参数方程: } \begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ z = z(s, t) \end{cases}$$

$\Gamma$  沿  $z$  轴旋转后形成的曲面方程为:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)} \cos \theta \\ y = \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t)} \sin \theta \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

【例 3】求曲线  $\begin{cases} y=1 \\ x^2+z^2=3 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周所形成的曲面方程。

解：先将曲线写成参数式

$$\begin{cases} y=1 \\ x^2+z^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t \\ y=1 \\ z=\sqrt{3}\sin t \end{cases}$$

绕  $z$  轴旋转一周后

$$\begin{cases} x = \left( \sqrt{[\sqrt{3}\cos t]^2 + 1} \right) \cos \theta \\ y = \left( \sqrt{[\sqrt{3}\cos t]^2 + 1} \right) \sin \theta \\ z = \sqrt{3}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3\cos^2 t + 1 \\ z = \sqrt{3}\sin t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3(1 - \sin^2 t) + 1 \\ z = \sqrt{3}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - z^2 \\ |z| \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

#### ④ 9 种必须掌握的曲面

1) 椭球锥面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

2) 椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

3) 单叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

4) 双叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

5) 椭圆抛物面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

6) 双曲的抛物面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$  又称马鞍面 (准线与母线是相互正交的抛物线, 母线

抛物线沿准线抛物线平移形成马鞍面, 这是我们需要掌握的唯一一个准线与母线都是非直线的曲面。)

7) 椭圆柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (椭圆  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = h \end{cases}$  母线平行  $z$  轴

8) 双曲柱面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  母线平行  $z$  轴

9) 抛物柱面  $x^2 = ay$  母线平行  $z$  轴

**五星级提示:** 对于一般的曲面方程, 最方便的方法是: 首先令其中一个变量为零, 如能得出母线或准线, 我们就能确定该曲面的形状。

## 二、典型题型

**【例 1】** 证明向量  $\vec{c} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$  表示向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的角平分线方向。

证明: 因为单位向量:  $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ,  $\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

由  $\vec{e}_a$  与  $\vec{e}_b$  为边构成的平行四边形为菱形, 其对角线平分顶角, 则与  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  夹角平分线平行的向量  $\vec{d}$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{e}_a + \vec{e}_b = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ \vec{c} &= \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \cdot \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \lambda \vec{d} \end{aligned}$$

故原命题成立。

**【例 2】** 一向量与  $x, y$  轴夹角相等为  $\alpha$ , 与  $z$  轴夹角为  $2\alpha$ , 试确定该向量的方向。

解: 由于  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , 所以:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha + (2\cos^2 \alpha - 1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 \alpha \cdot (2\cos^2 \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \gamma = \pi; \quad \frac{\pi}{2} \quad (\text{方向角定义要求 } \alpha > 0)$$

故该向量的方向为  $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (0, 0, -1)$  或  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 。

**【例 3】** 过点  $(-1, 0, 4)$ ，平行于平面  $3x - 4y + z = 10$  且与直线  $x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2}$  相交的直线方程。

解：一般切入点：如果所求的直线方向向量不能明显求出，就设直线方程的参数形式。

$$\text{设所求直线方程为: } \begin{cases} x = -1 + lt \\ y = mt \\ z = 4 + nt \end{cases}$$

$$\text{直线与已知平面平行, 则 } \vec{n} \perp \vec{s} \Rightarrow 3l - 4m + n = 0 \quad (1)$$

$$\text{两直线相交, 则将 } \begin{cases} x = -1 + lt \\ y = mt \\ z = 4 + nt \end{cases} \text{ 代入 } x + 1 = y - 3 = \frac{z}{2} \text{ 消去 } (x, y, z) \text{ 得}$$

$$lt - 3 + mt = \frac{4 + nt}{2} \Rightarrow \begin{cases} (m - l)t = 3 \\ (2l - n)t = 4 \end{cases} \Rightarrow 4m + 3n - 10l = 0 \quad (2)$$

联立 (1) (2) 得  $l = \frac{4}{7}n, m = \frac{19}{28}n \xrightarrow{n=28} l = 16, m = 19$ ，所求的直线方程为

$$\begin{cases} x = -1 + 16t \\ y = 19t \\ z = 4 + 28t \end{cases}$$

**【例 4】** 判断  $L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ ；和  $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

是否共面，若在同一平面求交点，若异面求距离？

解： $\vec{s}_1 = (1, 1, 2)$ ； $\vec{s}_2 = (1, 3, 4)$ ；

$$P(-1, 0, 1), Q(0, -1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\} = (1, -1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \text{ 为异面直线。}$$

设两直线距离为  $d$ ， $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} = t$ ， $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4} = s$ ，则

$$d = \sqrt{(s-t+1)^2 + (-1+3s-t)^2 + (1+4s-2t)^2} = \sqrt{h}$$

$$h = (s-t+1)^2 + (-1+3s-t)^2 + (1+4s-2t)^2$$

$$\begin{cases} h_s = 52s - 24t + 4 = 0 \\ h_t = -24s + 12t - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{7}{3}, s = 1$$

$$\begin{cases} h_{ss} = 52 = A \\ h_{tt} = 12 = C \\ h_{st} = h_{ts} = -24 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 52 > 0 \\ B^2 - 4AC = -49 < 0 \end{cases}$$

由二元函数极值的充分条件知:  $t = \frac{7}{3}, s = 1$  是最小值点, 所以

$$d = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

也可直接套用公式计算距离  $d$  :

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\} \cdot (\{l_1, m_1, n_1\} \times \{l_2, m_2, n_2\})|}{\sqrt{|\{l_1, m_1, n_1\} \times \{l_2, m_2, n_2\}|}} \\ &= \frac{|\{(0-1), (1-0), (-2+1)\} \cdot (\{1, 1, 2\} \times \{1, 3, 4\})|}{\sqrt{|\{1, 1, 2\} \times \{1, 3, 4\}|}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

【例 5】判断  $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{4}$ ; 和  $L_2: \begin{cases} x-y-3=0 \\ 3x-y-z-4=0 \end{cases}$  的关系。

解: 两直线的有四种关系: 异面; 相交; 平行但不重合; 重合。

$\vec{s}_1 = (2, 3, 4)$ ;  $\vec{s}_2 = (1, -1, 0) \times (3, -1, -1) = (1, 1, 2)$  故不平行, 也不重合;

看两直线有无交点, 将  $L_1$  写成参数式, 代入  $L_2$  的两平面, 看看能否得到同一个  $t$

$$\begin{aligned} x &= 2t, y = -3 + 3t, z = 4t \\ \Rightarrow \begin{cases} 2t - (-3 + 3t) - 3 = 0 \rightarrow t = 0 \\ 2(2t) - (-3 + 3t) - 4t - 4 = 0 \rightarrow t = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

故两直线不相交, 所以两直线异面。

【例 6】求过  $M(2, 3, 1)$  点, 且与直线

$$L_1 \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z+4=0 \end{cases}; \quad L_2 \begin{cases} x=1-3y \\ z=2-y \end{cases} \text{ 都相交的直线方程 } L。$$

解: 由于所求直线  $L$  过  $M(2, 3, 1)$  与  $L_1$  相交, 则  $L$  必在过  $M(2, 3, 1)$  与  $L_1$  的平面  $\pi_1$  上, 同理它也必须过  $M(2, 3, 1)$  与  $L_2$  的平面  $\pi_2$  上,  $\pi_1$  和  $\pi_2$  联立的交面式直线方程即为所求的  $L$  方程。

又, 过  $L_1$  的平面束方程为:  $\lambda(x+y)+(x-y+z+4)=0$

$$\text{将 } M(2, 3, 1) \text{ 带入上式得 } \lambda = -\frac{4}{5} \Rightarrow \pi_1: x-9y+5z+20=0$$

过  $L_2$  的平面束方程为:  $\mu(x+3y-1)+(y+z-4)=0$

$$\text{将 } M(2, 3, 1) \text{ 带入上式得 } \mu = -\frac{1}{5} \Rightarrow \pi_2: x-2y-5z+9=0$$

故所求直线  $L$  方程为 
$$\begin{cases} x-9y+5z+20=0 \\ x-2y-5z+9=0 \end{cases}$$

【例 7】求满足下面条件的直线方程

(a) 过点  $A(1, 0, -2)$ ;

(b) 与平面  $\pi: 3x-y+2z+3=0$  平行;

(c) 与直线  $L_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$  相交。

解: 已知直线  $L_1$  的方向  $\vec{s}_1 = \{4, -2, 1\}$ , 其上由一点  $A_1(1, 3, 0)$ , 根据已知条件(b), 过

$A(1, 0, -2)$  作平行于平面  $\pi$  的平面  $\pi_1$

$$\pi_1: 3(x-1)-y+2(z+2)=0$$

再根据已知条件(c), 作平面  $\pi_2$  通过点  $A(1, 0, -2)$  和直线  $L_1$ , 显然

$$\vec{n}_{\pi_1} = \vec{s}_1 \times \overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 8\vec{j} + 12\vec{k} = (-7, -8, 12)$$

$$\Rightarrow L_1: 7(x-1)+8y-12(z+2)=0$$

所求直线方程为

$$\begin{cases} 3(x-1)-y+2(z+2)=0 \\ 7(x-1)+8y-12(z+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+2z+1=0 \\ 7x+8y-12z-31=0 \end{cases}$$

【例 8】设有直线  $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$

(a) 求与  $L$  关于原点对称的直线  $L_1$  的方程;

(b) 求与  $L$  关于  $xoy$  平面对称的直线  $L_2$  的方程;

(c) 求与  $L$  关于平面  $\pi: x+y+z=0$  对称的直线  $L_3$  的方程;。

解: (a) 对于任何在直线  $L_1$  上的静点  $P(x, y, z)$ , 由于  $L_1$  与  $L$  关于原点对称, 从而与  $P(x, y, z)$

点关于原点对称的动点  $Q(-x, -y, -z)$  必在  $L$  上, 故

$$L_1 \text{ 的方程为: } \frac{-x-1}{2} = \frac{-y}{1} = \frac{-z-3}{-2} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-2}$$

(b) 对于任何在直线  $L_2$  上的静点  $P(x, y, z)$ , 由于  $L_2$  与  $L$  关于  $xoy$  平面对称, 从而与

$P(x, y, z)$  点关于  $xoy$  平面对称的动点  $Q(x, y, -z)$  必在  $L$  上, 故

$$L_2 \text{ 的方程为: } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{-z-3}{-2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

$$(c) \quad L \text{ 与平面 } \pi \text{ 的交点 } o \text{ 也在所求的直线 } L_3 \text{ 上, 且该点坐标满足 } \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2} \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\text{由上面的方程组得到: } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2} = \frac{(x-1)+y+(z-3)}{2+1-2} = (x+y+z)-4 = -4$$

从而解的交点  $o$  点坐标为  $(-7, -4, 11)$ 。

$L_3$  的方向数可根据向量代数的基础求得:

$$\vec{s}_3 = \vec{s} - 2(\vec{s} \cdot \vec{n}_0) \vec{n}_0 = \vec{s} - 2 \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} \vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} - \frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \frac{4}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{8}{3}\vec{k}$$

故所求直线  $L_3$  的方程为:

$$\frac{x+7}{4} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-11}{-8}$$

【例 9】证明  $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ,  $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$  是异面直线,

并求公垂线方程即公垂线的长。

解:  $L_1$  的方向向量  $\vec{S}_1 = (1, 2, 3)$ , 经过点  $P_1(0, 0, 0)$ ;  $L_2$  的方向向量  $\vec{S}_2 = (1, 1, 1)$ , 经过点  $P_2(1, -1, 2)$ , 由于

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \text{ 所以 } L_1, L_2 \text{ 是异面直线.}$$

公垂线  $L$  的方向向量  $\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

那么, 经过  $L_1$  并且与  $\vec{S}$  平行的平面  $\pi_1$  的方程为

$$\begin{aligned} & \{(x-0), (y-0), (z-0)\} \cdot (\vec{S}_1 \times \vec{S}) = 0 \\ \Rightarrow & \{(x-0), (y-0), (z-0)\} \cdot (\vec{S}_1 \times \vec{S}) = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & 4x + y - 2z = 0 \end{aligned}$$

经过  $L_2$  并且与  $\vec{S}$  平行的平面  $\pi_2$  的方程为

$$\begin{aligned} & \{(x-1), (y+1), (z-2)\} \cdot (\vec{S}_2 \times \vec{S}) = 0 \\ \Rightarrow & \{(x-1), (y+1), (z-2)\} \cdot (\vec{S}_2 \times \vec{S}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & x - z + 1 = 0 \end{aligned}$$

而平面  $\pi_1, \pi_2$  的交线即是公垂线  $L$  的方程

$$L: \begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

公垂线的长  $d$  为  $d = \frac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{S}_1, \vec{S}_2)|}{|\vec{S}_1 \times \vec{S}_2|} = \frac{5}{\sqrt{6}}$



【例 10】求过点  $P(-1,1,2)$  及直线  $L: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{0}$  的平面。

解：将  $L$  写成一般式

$$\begin{cases} -2x-3y+7=0 \\ z+2=0 \end{cases}$$

经过  $L$  的平面束方程为  $2x+3y-7+\lambda(z+2)=0$

以  $P(-1,1,2)$  代入得  $\lambda = \frac{3}{2}$ ，得平面方程为

$$4x+6y+3z-8=0$$

又，采用这个平面束方程时没有包括  $z+2=0$  这个平面，但  $z+2=0$  不经过  $P(-1,1,2)$  点，故不是所求。

【例 11】求经过直线  $L: \begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ ，并且与平面  $x-4y-8z+12=0$  交成二面角为  $\frac{\pi}{4}$  的平面方程。

面方程。

解：平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

又有

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{|\{(1+\lambda), 5, (1-\lambda)\} \cdot \{1, -4, -8\}|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + 5^2 + (1-\lambda)^2} \cdot \sqrt{1+16+64}} \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9|\lambda-3|}{9\sqrt{2\lambda^2+27}} \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

得平面方程为

$$x+20y+7z-12=0$$

由于平面束方程没有包括  $x-z+4=0$ ，故需要验证如下

$$x-z+4=0 \Rightarrow \vec{s}_1 = (1, 0, -1)$$

$$x-4y-8z+12=0 \Rightarrow \vec{s}_2 = (1, -4, -8)$$

$$\cos \theta = \frac{|\{1, 0, -1\} \cdot \{1, -4, -8\}|}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{1+16+64}} =$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{9}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

所以, 所求的平面方程为

$$x + 20y + 7z - 12 = 0 \text{ 或 } x - z + 4 = 0$$

**【例 12】** 设直线  $L: \begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上, 而平面  $\pi$  与曲面  $z = x^2 + y^2$  相切于点

$P(1, -2, 5)$ , 求  $a, b$  之值。

解: 平面束方程为

$$x + y + b + \lambda(x + ay - z - 3) = 0 \Rightarrow (1 + \lambda)x + (a + \lambda)y - z - 3 + \lambda b = 0$$

$$\text{又 } z = x^2 + y^2 \Rightarrow F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0$$

$$\text{切平面法向向量为 } \vec{n} = (F_x, F_y, F_z) \Rightarrow (-2x, -2y, 1) = (-2, 4, 1)$$

则平面束方程中只有过的  $P(1, -2, 5)$ , 且其法线平行  $\vec{n}$  的平面才能满足要求, 即

$$\begin{cases} (1 + \lambda) + (a + \lambda)(-2) - 5 - 3 + \lambda b = 0 \\ \frac{1 + \lambda}{-2} = \frac{a + \lambda}{4} = \frac{-1}{1} \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1, a = -5, b = -2.$$

**【例 13】** 求直线  $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$  上的投影直线  $l_0$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的曲面方程。

解: 再次提示: 如果所求的平面通过一已知直线, 则使用平面束方程简便。

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

经过  $l$  的平面束方程为

$$x - y - 1 + \lambda(y + z - 1) = 0 \Rightarrow x + (\lambda - 1)y + \lambda z - (1 + \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 - (\lambda - 1) + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\Rightarrow x - 3y - 2z + 1 = 0$$

$$\text{所求 } l_0 \text{ 为 } \begin{cases} x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{将 } l_0 \text{ 写成参数式 } \begin{cases} x-3y-2z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-\frac{1}{2}(t-1) \end{cases}$$

绕  $y$  轴旋转一周后形成的曲面方程

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos \theta \\ y = y(t) = t \\ y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = x^2(t) + y^2(t) \\ & \Rightarrow x^2 + z^2 = x^2(t) + y^2(t) = 4t^2 + \frac{1}{4}(t-1)^2 \\ & \xrightarrow{t=y} x^2 + z^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2 \\ & \Rightarrow 4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

## 第2技 动静转换法求旋转曲面方程。

【例1】求曲线  $L \begin{cases} z = f(y) \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转形成的曲面  $S$  的方程。

解：建立旋转面、锥面与柱面的方程的一般方法是等效变换静点和动点的所满足的几何关系。

设曲线  $L \begin{cases} z = f(y) \\ x = 0 \end{cases}$  存在一静点  $P(0, y_0, z_0)$ ，对任意在旋转面上的动点  $Q(x, y, z)$ ，其坐标

关系为

$$\begin{aligned} & \begin{cases} z = z_0 \\ x^2 + y^2 = y_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = z \\ y_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \text{代入 } L \text{ 的方程，得曲面 } S \text{ 的方程为} \\ & z_0 = f(y_0) \Rightarrow z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}$$

【例2】求直线  $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$  绕直线  $L_2: \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$  旋转一周的曲面方程。

解：设直线  $L_1$  上的一静点  $P(x_0, y_0, z_0)$ ，对应的旋转曲面上任意动点  $Q(x, y, z)$ 。  $O'(2, 3, z_0)$

为旋转中心，显然  $z = z_0$ ，则

$$\overline{O'P} = \overline{O'Q} \Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2$$

又  $P(x_0, y_0, z_0)$  在  $L_1$  上, 故有:

$$\begin{cases} x_0 = 3 + 2t \\ y_0 = 1 + 3t \\ z_0 = -1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2z + 5 \\ y_0 = 3z + 4 \\ z_0 = z \end{cases} \text{ 代入 } (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 \text{ 得所求的曲面方程为:}$$

$$x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0$$

**【例 3】** 求准线  $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = h \end{cases}$ , 母线方向为  $\vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  的柱面方程。

解: 设  $P(x, y, z)$  (动点) 为所求柱面上的一点, 按该题的含义, 形成柱面的是准线沿母线平移生成, 故必在准线上有一点  $Q(x_0, y_0, z_0)$  (静点) 满足  $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{s}$ , 即

$$\begin{cases} x_0 = x + at \\ y_0 = x + bt \\ z_0 = x + ct \end{cases}$$

$$\text{而 } Q(x_0, y_0, z_0) \text{ 满足 } \begin{cases} f(x_0, y_0) = 0 \\ z_0 = h \end{cases}, \text{ 从而 } h = z_0 = z + ct \Rightarrow t = \frac{h-z}{c} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x + a\frac{h-z}{c} \\ y_0 = y + b\frac{h-z}{c} \end{cases}$$

$$\text{所以所求的旋转曲面方程为: } f\left(x + \frac{a}{c}(h-z), y + \frac{b}{c}(h-z)\right) = 0$$

**评注** 动静转换法思想是求旋转曲面的方程重要技巧。

• **重点注意一: 直线的一般式、点向式与参数式相互转化技巧:**

$$\text{一般式 } L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{matrix}$$

$$\text{点向式 (标准式) } L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad \vec{S} = (l, m, n)$$

$$\text{参数式 } L: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad M(x_0, y_0, z_0) \text{ 为直线上已知点, 方向数: } \vec{S} = (l, m, n)$$

点向式与参数式相互转化很明显, 在点向式中任取两个方程即可转化为一般式, 而一般式化为点向式却没那么容易, 一般的思考方法如下:

第一步: 求直线的方向数  $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (l, m, n)$ ;

第二步：视一个变量为常数，如视  $z$  为常数，解出  $\begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z) \end{cases}$ ，任取一个  $z$  值，

便得到一个确定点的坐标  $(x_0, y_0, z_0)$ ；

第三步：根据点向式确定直线方程。

【例 1】使用点向式（又称对称式）方程及参数方程表示直线  $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ 。

解：先找出这直线上的一点  $(x_0, y_0, z_0)$ ，例如，可以取  $x_0 = 1$ ，代入方程组，得

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = -2 \\ y - 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -2)$$

下面再找出这直线的方向向量  $\vec{s}$ ，由于两平面的交线与这两平面的法线向量  $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ ，

$\vec{n}_2 = (2, -1, 3)$  都垂直，所以可取

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

故直线的点向式方程为： $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}$

$$\text{令 } \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \text{ 就是参数方程。}$$

• 重点注意二：在求直线或平面方程中，其本质上是在操作直线的  $\vec{s}$  和平面的  $\vec{n}$  之间的关系，也就是向量代数的运算关系，如正交或平行等等。而求曲面方程，本质上是在操作母线和准线。

## 第 8 章 向量代数与空间解析模拟题

1、设向量  $\vec{a} = \{4, 5, -3\}$ ， $\vec{b} = \{2, 3, 6\}$ ，求对应的单位向量  $\vec{a}_0$  以及  $\vec{b}$  的方向余弦。并求实数  $\lambda, \mu$  满足什么条件才能使  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$  与  $z$  轴垂直。

2、求过直线  $\begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$ ，且与平面  $2x - y + 5z + 2 = 0$  垂直的平面方程。

3、求过点  $M(-1, 0, 1)$  且垂直于直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{1}$  又与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$  相交的直线方程。

4、设直线  $L: \begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上, 而平面  $\pi$  过点  $(1, -2, 5)$  且垂直于直线

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-1}, \text{ 求 } a, b \text{ 的值。}$$

5、求通过直线  $\begin{cases} 2x+y=0 \\ 4x+2y+3z=6 \end{cases}$  且切于球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  的平面方程。

6. 曲线  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x+z=1 \end{cases}$  在  $xOz$  平面上的投影。

7. 求  $L_1: \begin{cases} 3x+4y-19=0 \\ y+3z+2=0 \end{cases}$  与  $L_2: \begin{cases} 9x+2y+14=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$  的公垂线方程。

8. 某平面垂直  $xy$  平面, 并通过由  $P(1, -1, 1)$  到直线  $L: \begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$  的垂线, 求平面方程。

## 第 8 章 向量代数与空间解析几何模拟题答案

1、 $\vec{a}^0 = \left\{ \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}, -\frac{3}{\sqrt{50}} \right\},$

$$\vec{b} \text{ 的方向余弦为 } \cos \alpha = \frac{2}{7}, \quad \cos \beta = \frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}; \quad \lambda = 2\mu.$$

2、 $7x+14y+5=0$

3、 $\frac{x+1}{13} = \frac{y}{16} = \frac{z-1}{25}$

4、 $a=-5, \quad b=-2$

5、 $z=2$

6、 $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$  且满足条件  $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\sqrt{17}}{2}.$

7、 $\begin{cases} 16x+27y+17z-90=0 \\ 58x+6y+31z-20=0 \end{cases}$  或  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{-6}$

8、 $x+2y+1=0$