密封线

姓名

密封线

密封线

# 第七届全国大学生数学竞赛决赛试卷

## (非数学类, 2016 年)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 30 分 | 14 分 | 14 分 | 14 分 | 14 分 | 14 分 | 100 分 |
| 得分 | | | | | | | |

注意：本试卷共六大题，满分 100 分, 考试时间为 150 分钟.

1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边, 写在其他纸上无效.

2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3 当题空白不够, 可写在当页背面, 并注明题号.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一 填空题(本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

（1）微分方程 $y''-(y')^3=0$ 的通解为 ________________.

（2）设 $D:1\le x^2+y^2\le 4$. 则积分 $I=\iint_D (x+y^2)e^{-(x^2+y^2-4)}dxdy$ 的值是________________.

（3）设 $f(t)$ 二阶连续可导，且 $f(t)\neq 0$. 若 $\begin{cases} x=\int_0^t f(s)ds, \\ y=f(t), \end{cases}$

则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________________.

(4) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $n$ 阶方阵 $A$ 的特征值，$f(x)$ 为多项式，则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值为________________.

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin(\pi n!e)\right]$ 的值是________________.

| 得分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

二 (本题满分 14 分)

设函数 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数，曲面 $S$ 由方程 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 确定.证明：该曲面的所有切平面都交于点 $(a,b,c)$.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三（本题满分 14 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 证明：

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)dt\right)dx=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

密封线

姓名

密封线

密封线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四（本题满分 14 分）

设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B$ 是 $n\times p$ 矩阵，$C$ 是 $p\times q$ 矩

证明：$R(AB)+R(BC)-R(B)\le R(ABC)$，其

$R(X)$ 表示矩阵 $X$ 的秩.

| | |
|---|---|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

五（本题满分 14 分）

设 $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x dx$，其中 $n$ 为正整数.

（1）若 $n\geq 2$，计算 $I_n+I_{n-2}$；

（2）设 $p$ 为实数，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

密封线

密封线

密封线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六 (本题满分 14 分)

设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数. 记半球面 $S$: $z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ ，方向上. 若对任何点 $(x_0,y_0,z_0)$ 和 $r>0$，第二型曲面积分

$$\iint_S P\,dydz+R\,dxdy=0.$$

证明: $\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$.