

第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷 (数学类, 2015年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	20	15	15	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 v 为直线方向; 直线 L_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 w 为直线方向.

- 1) 证明: 存在唯一点 $P \in L_1$ 和 $Q \in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2 .
- 2) 求 P 点和 Q 点坐标(用 a, b, v, w 表示).

得分	
评阅人	

二、(本题 20 分) A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\operatorname{tr} A^i = i, i = 1, 2, 3, 4$. 求 A 的行列式.

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解.

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}, a_1 > 0$. 求证 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - n)$ 存在.

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = a < 1$. 构造函数列如下: $g_0(x) = f(x)$,

$$g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t) g_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

求证 $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt$$

为常数. 求证: $f(x)$ 必为常数.