姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

# 第七届全国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷
(数学类, 2016年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | | | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 20 | 15 | 15 | 20 | 10 | 10 | 10 | 100 |
| 得分 | | | | | | | | |

注意: 1. 前4大题是必答题, 再从五到十大题中任选3题, 题号要填入上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 设$\Gamma$ 为形如下列形式的2016阶矩阵全体：每行每列只有一个非零元素，且该非零元素为1. 则 $\Sigma_{A\in\Gamma}|A|=\underline{0}$.

(2) 令 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ 收敛, 则 $p$ 的取值范围是 $\underline{p>1}$.

(3) 设 $D: x^2+2y^2\leqslant 2x+4y$, 则积分 $I=\iint_D(x+y)dxdy=\underline{3\sqrt{2}\pi}$.

(4) 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 $a,b,c$ 满足 $\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}^{2016}=I_2$, 则 $X=$ $\underline{(1,0,1)}$或$\underline{(-1,0,-1)}$或$\underline{(1,t,-1)}$或$\underline{(-1,t,1),t\in\mathbb{R}}$.

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中，设 $S$ 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, $\sigma$ 是空间中的平面，它与 $S$ 的交集是一个圆. 求所有这样平面 $\sigma$ 的法向量.

**解:** 由于形如 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ 的平面与 $S$ 只能交于直线或空集, 所以可以设平面 $\sigma$ 的方程为

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

它与 $S$ 交线为圆. 令 $x=\cos\theta$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$, 则 $\sigma$ 与 $S$ 的交线可表达为

$$\Gamma(\theta)=(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma),\ \ \theta\in[0,2\pi].$$

由于 $\Gamma(\theta)$ 是一个圆，所以它到一个定点 $P=(a,b,c)$ 的距离为常数 $R$. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b)^2+(\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma-c)^2=R^2.$$

（5分）

利用

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta),\ \sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

我们可以将上式写成

$$A\cos 2\theta+B\sin 2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中 $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ 为常数. 由于这样的方程对所有 $\theta\in[0,2\pi]$ 恒成立，所以 $A=B=C=D=E=0$.（10分）

特别地，我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0,\ \ B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0;$$

于是得到 $\alpha=0$, $\beta=\pm1$, 平面 $\sigma$ 的法向量为

$$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1)\ or\ (0,-1,1)$$

的非零倍数.

（15 分）

注：如果求得法向量，但没有证明这是所有可能的 $\sigma$ 的法向量，扣 5 分.

三、证明题（15分）设 $A,B$ 为 $n$ 阶实对称矩阵. 证明 $tr((AB)^2)\leqslant tr(A^2B^2)$.

**证明** 存在可逆方阵 $T$ 使得 $T^{-1}AT=\tilde{A}$ 为对角阵. 令 $T^{-1}BT=\tilde{B}$. 则

$$\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)=\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2),\quad \operatorname{tr}(A^2B^2)=\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)$$

(5分)

令 $\tilde{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$, $\tilde{B}=(b_{ij})_{n\times n}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2)&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji}\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}^2b_{ij}^2\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ii}^2+a_{jj}^2)b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2,\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2)-\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ii}-a_{jj})^2b_{ij}^2\leqslant 0.$$

(15分)

四、（本题20分）设单位圆 $\Gamma$ 的外切 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 $\Gamma$ 分别切于 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 令 $P_A, P_B$ 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: $P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}}>2\pi$.

**证明** 设 $\Gamma$ 的圆心为 $O$, $\alpha_i=\frac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1}$, $B_{n+1}=B_1$, 则 $P_A=2\sum_{i=1}^n\tan\alpha_i$, $P_B=2\sum_{i=1}^n\sin\alpha_i$. (2分)

先证:

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x. \tag{1}$$

令 $g(x)=\frac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}-x$, 则 $g(0)=0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\cos^{\frac{4}{3}}x+\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}x\sin^2x}{\cos^{\frac{2}{3}}x}-1\\&=\frac{2\cos^2x+1}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1\\&>\frac{3\sqrt[3]{\cos^2x\cdot\cos^2x\cdot 1}}{3\cos^{\frac{4}{3}}x}-1=0\end{aligned}$$

故 $g(x)$ 严格单调递增, 因而 $g(x)>g(0)=0$. (1) 式得证. (10分)

$$\begin{aligned}P_A^{\frac{1}{3}}\cdot P_B^{\frac{2}{3}}&=2\left(\sum_{i=1}^n\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^n\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}}\\&=2\left(\sum_{i=1}^n\left(\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^n\left(\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\\&\geqslant 2\sum_{i=1}^n\tan^{\frac{1}{3}}\alpha_i\cdot\sin^{\frac{2}{3}}\alpha_i\\&>2\sum_{i=1}^n\alpha_i=2\pi.\end{aligned}$$

(20分)

五、（本题10分）设$u_1,v_1,u_2,v_2$ 为群$G$ 中的元素，满足$u_1v_1=v_1u_1=u_2v_2=v_2u_2$. 若$u_1,u_2$的阶均为8，$v_1,v_2$的阶均为13. 证明：$u_1u_2$ 的阶为4及$v_1v_2$ 的阶为13.

证明：首先，令$G_1=(u_1),G_2=(v_1),G_3=(u_2),G_4=(v_2)$,

$$T=\{g_1g_2|g_1\in G_1,g_2\in G_2\},H=\{g_3g_4|g_3\in G_3,g_4\in G_4\}$$

则$T,H$均为$G$ 的Abel子群。进一步，由$(8,13)=1$可知：

$$G_1\bigcap G_2=\{e\},G_3\bigcap G_4=\{e\}$$

结果，$T=G_1G_2$为内直积分解，$H=G_3G_4$为内直积分解。（2分）

其次，分别计算$u_1v_1$ 与$u_2v_2$ 的阶。

若$(u_1v_1)^x=e$, 则$u_1^xv_1^x=e$, 由 $T=G_1G_2$ 为内直积分解得 $u_1^x=e,v_1^x=e$, 从而$8|x,13|x$, 故$o(u_1v_1)=8\times 13$, 即有 $T=(u_1v_1)$. 同理知：$o(u_2v_2)=8\times 13$, 即有$H=(u_2v_2)$。注意到$u_1v_1=u_2v_2$, 故$T=H$.

第三，$u_2\in G_3\subseteq H=T$, 故$u_2$可表为：$u_2=g_1g_2,g_1\in G_1,g_2\in G_2$. 结果$u_2^8=g_1^8g_2^8$, 即 $g_2^8=e$.

令$g_2=v_1^t$, 于是$v_1^{8t}=e$, 得$13|8t$, 故$g_2=e$, 由此得$u_2\in G_1$. 同理可知$v_2\in G_2$.

第四，再次考虑到$u_1v_1=u_2v_2$ 以及$T=G_1G_2$为内直积分解，因此有$u_1=u_2,v_1=v_2$.

最后，直接计算可知，$u_1u_2$ 的阶为4及$v_1v_2$ 的阶为13. (10分）

六、（本题10分）设 $E\subset\mathbb{R}^1$, $E$ 是 $L-$可测的,若 $m(E)>a>0$, 则存在无内点的有界闭集 $F\subset E$, 使得 $m(F)=a$.

**证明:** 令 $E_1=E-\mathbb{Q}$, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数集, 则 $E_1$ 无内点且 $m(E_1)=m(E)$. (2分)

*i)* 存在闭集 $E_2\subset E_1$, 使得 $a<m(E_2)<m(E_1)=m(E)$.

对 $m(E_1)>a+q>a$ 的正实数 $q$, 由测度的连续性知，$\exists\ A\subset E_1$, 使得 $m(A)=a+q$. 由可测集的定义，对 $\frac{q}{2}$, $\exists$ 闭集 $E_2\subset A$, 使得 $m(A-E_2)<\frac{q}{2}$, 于是 $m(E_2)=m(A)-m(A-E_2)>a+q-\frac{q}{2}=a+\frac{q}{2}>a$. 又 $m(E_2)\leqslant m(A)=a+q<m(E_1)$, 即 $a<m(E_2)<m(E_1)=m(E)$. (7分)

*ii)* 令 $f(x)=m(E_2\cap[-x,x])$, $x\in\mathbb{R}$, 可证 $f(x)$ 是连续单增函数且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m(E_2)>a$.

由连续函数的介值性定理知: $\exists\ r>0$, 使得 $f(r)=m(E_2\cap[-r,r])=a$.

令 $F=E_2\cap[-r,r]$, 则$F$为无内点的有界闭集且 $F\subset E,m(F)=a$. (10分)

姓名：________ 准考证号：________ 所在院校：________ 考生座位号：________ 专业：________

密封线 答题时不要超过此线

七、（本题10分）设$\gamma(s), s\in[0,\ell]$是空间中一条光滑闭曲线，以弧长为参数，且曲率$k>0$. 设$\beta:[0,\ell]\to S^2$为单位球面上由$\gamma(s)$的单位主法向量构成的一条简单闭曲线$B$. 证明：$B$将球面分成面积相等的两个部分.

证明：设$e_1,e_2,e_3$ 为曲线$\gamma$的Frenet标架：

$$e_1=\frac{d\gamma}{ds},\ e_2=\frac{1}{k}\frac{d^2\gamma}{ds^2},\ e_3=e_1\times e_2.$$

则有

$$\frac{de_1}{ds}=ke_2,\ \frac{de_2}{ds}=-ke_1+\tau e_3,\ \frac{de_3}{ds}=-\tau e_2,$$

其中$\tau$为曲线$\gamma$的挠率. （2分）

设$\beta=e_2:[0,\ell]\to S^2$，为球面上的简单闭曲线，它的弧长参数为$\tilde{s}$. 于是有：

$$\frac{d\beta}{ds}=-ke_1+\tau e_3,\ \frac{d\tilde{s}}{ds}=\sqrt{k^2+\tau^2}.$$

球面在$\beta(s)$点的单位法向量为$\beta$，曲线$\beta(s)$的切向量为$\frac{d\beta}{ds}=-ke_1+\tau e_3$，所以曲线$\beta(s)$在球面上的法向量$\tilde{e}_2$为：

$$\tilde{e}_2=\frac{\beta\times\frac{d\beta}{ds}}{|\beta\times\frac{d\beta}{ds}|}=\frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}(\tau e_1+ke_3).$$

于是，曲线$\beta$在球面上的测地曲率

$$k_g=\frac{d^2\beta}{d\tilde{s}^2}\cdot\tilde{e}_2=(\frac{d^2\beta}{ds^2}(\frac{ds}{d\tilde{s}})^2+\frac{d\beta}{ds}\frac{d^2s}{d\tilde{s}^2})\cdot\tilde{e}_2$$

$$=\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}(-\frac{dk}{ds}e_1+\frac{d\tau}{ds}e_3)\cdot(\tau e_1+ke_3)$$

$$=\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}(k\frac{d\tau}{ds}-\tau\frac{dk}{ds}).$$

（5分）

故有

$$\int_B k_g d\tilde{s}=\int_0^\ell\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}(k\frac{d\tau}{ds}-\tau\frac{dk}{ds})\sqrt{k^2+\tau^2}ds$$

$$=\int_0^\ell\frac{1}{(k^2+\tau^2)}(k\frac{d\tau}{ds}-\tau\frac{dk}{ds})ds=\int_0^\ell\frac{d}{ds}(argtan(\tau/k))ds$$

$$=argtan\frac{\tau}{k}|_0^\ell=0,$$

其中用到闭曲线性质：$k(0)=k(\ell),\tau(0)=\tau(\ell)$. （7分）

由于$B$为简单闭曲线，它围成球面一个单连通区域$D$. 由Gauss-Bonett定理，有

$$\int_B k_g d\tilde{s} + \int_D K dS = 2\pi.$$

对球面而言Gauss曲率$K=1$, 故区域$D$的面积$|D|=2\pi$, 为球面面积的一半.

(10分)

八、（本题10分）实系数多项式$p(x)$的模1范数定义为：$||p||_1 := \int_0^1 |p(x)|dx$.

1. 求二次实系数多项式$p(x)$使得$p(x) \leq x^3$对任意$x \in [0,1]$成立，且$||x^3 - p(x)||_1$达到最小。
2. 求三次实系数多项式$p(x)$使得$p(x) \leq x^4$对任意$x \in [0,1]$成立，且$||x^4 - p(x)||_1$达到最小。

**解**: 1. 令$q(x) = x^3 - p(x)$。我们证明$q(x)$具有形式：$q(x) = xJ^2(x)$。其中$J(x)$为一次多项式。首先说明$q(x)$的根都为实数。实际上$q(x)$必有一实根$\alpha_1$，如另两个为一对共轭复根，则$q(x)$具有形式：$q(x) = (x-\alpha_1)(x^2+ax+b)$，且$a^2-4b<0$。由于$q(x) \geq 0$，$\alpha_1 \leqslant 0$, $q(x) > x(x+a/2)^2$, $\int_0^1 q(x)dx > \int_0^1 x(x+a/2)^2 dx$. 这与$||q(x)||_1$达到最小矛盾！因此，$q(x)$三个根都为实数，设为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。

若$q(x)$的三个互不相等，则$\alpha_i \leq 0$，$\int_0^1 q(x)dx \geq \int_0^1 x^3 > \int_0^1 x(x-1/2)^2 dx$，矛盾！因此$q(x)$有两个相等，设$\alpha_2 = \alpha_3$。故$q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2$，并且$\alpha_1 = 0$时$\int_0^1 q(x)dx$ 会更小。

由于$\int_0^1 q(x)dx = \frac{1}{12}(6\alpha_2^2 - 8\alpha_2 + 3)$，当$\alpha_2 = 2/3$即$p(x) = x^3 - q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}x$时，$||x^3 - p(x)||_1$最小。 (6分)

2. 令$q(x) = x^4 - p(x)$。类似于1的分析，$q(x)$的根都为实数，且都为重根。即$q(x) = J^2(x)$, $J(x)$为二次多项式。设$J(x) = x^2+ax+b$，则$f(a,b) := \int_0^1 q(x)dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2$。由

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2}{3}a + b + \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = a + 2b + \frac{2}{3}$$

解得

$$a = -1, \quad b = \frac{1}{6}$$

因此$p(x) = x^4 - (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$. (10分)

九、（本题10分）设 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 是单位圆盘, $f(z)$ 在 $D$ 上解析, $f(0) = 0$, 且在 $D$ 上有 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant 1$. 求证: 在 $D$ 上有 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant \frac{2|z|}{1+|z|}$.

姓名：________ 准考证号：________ 所在院校：________ 考生座位号：________ 专业：________

密封线 答题时不要超过此线

**证明** 设 $\varepsilon > 0$, $g(z) = 1 + \varepsilon - f(z)$. 则 $g(z)$ 在 $D$ 上解析, $g(0) = 1 + \varepsilon > 0$, $\mathrm{Re}\, g(z) = 1 + \varepsilon - \mathrm{Re}\, f(z) \geqslant \varepsilon > 0$. 因而

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|^2 = \frac{|g(z)|^2 - 2(1+\varepsilon)\mathrm{Re}\, g(z) + (1+\varepsilon)^2}{|g(z)|^2 + 2(1+\varepsilon)\mathrm{Re}\, g(z) + (1+\varepsilon)^2} < 1,$$

所以 $\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}$ 是一个将 $D$ 映入 $D$, 将 0 映到 0 的解析函数, 根据 Schwarz 引理, 有

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right| \leqslant |z|.$$

........(5分)

令 $\varepsilon \to 0$, 得到

$$\frac{|f(z)|}{|2-f(z)|} \leqslant |z|.$$

两边平方得, $|f(z)|^2 \leqslant |z|^2(4 - 4\mathrm{Re}\, f(z) + |f(z)|^2)$, 即,

$$(1-|z|^2)|f(z)|^2 \leqslant 4|z|^2(1 - \mathrm{Re}\, f(z)).$$

由于 $(\mathrm{Re}\, f(z))^2 \leqslant |f(z)|^2$, 从上式可得

$$\left(\mathrm{Re}\, f(z) + \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right)^2 \leqslant \frac{4|z|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

由此即得

$$\mathrm{Re}\, f(z) \leqslant \frac{2|z|}{1-|z|^2} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} = \frac{2|z|}{1+|z|}.$$

........(10分)

十、（本题10分）甲袋中有$N-1(N>1)$个白球和1个黑球, 乙袋中有$N$个白球, 每次从甲、乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中, 这样经过了$n$次, 求黑球出现在甲袋中的概率$p_n$，并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

**解** 用$A_n$ 表示事件“经$n$次试验后, 黑球出现在甲袋中”, $\bar{A}_n$ 表示事件“经$n$次试验后, 黑球出现在乙袋中”, $C_n$表示事件“第$n$次从黑球所在的袋中取出一个白球”. 记$p_n = P(A_n)$, $q_n = P(\bar{A}_n) = 1 - p_n$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$. 当$n \geqslant 1$时, 由全概率公式得

$$\begin{aligned}
p_n &= P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n|\bar{A}_{n-1})P(\bar{A}_{n-1}) \\
&= P(C_n|A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(\bar{C}_n|\bar{A}_{n-1})P(\bar{A}_{n-1}) \\
&= p_{n-1}\cdot\frac{N-1}{N} + q_{n-1}\cdot\frac{1}{N} \\
&= \frac{N-1}{N}\cdot p_{n-1} + \frac{1}{N}\cdot(1-p_{n-1}).
\end{aligned}$$

因此可得递推等式

$$p_n = \frac{N-2}{N} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{N}, \quad (n \geqslant 1).$$

(6分)

由于初始条件$p_0 = 1$. 于是由递推关系式并利用等比级数求和公式得

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} + \cdots + \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \\ &= \frac{1}{N}\left[1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right] \Big/ \left(1 - \frac{N-2}{N}\right) + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

故黑球出现在甲袋中的概率为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n$. ........................ (9分)

若 $N = 2$, 则对任何$n$有$p_n = \frac{1}{2}$.

若 $N > 2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$. ................ (10分)