第五届全国大学生数学竞赛决赛评分细则

（非数学类，2014）

一、解答下列各题（本题共 28 分，每小题 7 分）

1. 计算积分 $\int_0^{2\pi} x\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dtdx$.

解 1 原式 $=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt\int_0^t xdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt$ （4 分）

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$ （3 分）

解 2 令 $f(x)=\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$，则 $f'(x)=-\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 且 $f(2\pi)=0.$ （2 分）

原式 $=\int_0^{2\pi} xf(x)dx=\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x^2 f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x^2\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ （3 分）

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}.$$ （2 分）

2 设 $f(\mathrm{x})$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $\int_0^1 f(x)dx=1$，求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 $I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$ 取得最小值.

解 $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$\le\left(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right)^{1/2}$$ （3 分）

$$=\left(\int_0^1(1+\mathrm{x}^2)f^2(\mathrm{x})dx\right)^{1/2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}$$ （2 分）

$\int_0^1(1+\mathrm{x}^2)f^2(\mathrm{x})dx\ge\frac{4}{\pi}$. 取 $f(\mathrm{x})=\frac{4}{\pi(1+\mathrm{x}^2)}$ 即可. （2 分）

3. 设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\ne 0$，曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记 Γ 在 xoy 平面上的投影曲线为 S. 求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程.

解. 由两方程定义的曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0.$$ （3 分）

上述两切面的交线就是Γ在P_0点的切线,该切线在xoy面上的投影就是S过(x_0,y_0)的切线.

消去$z-z_0$，我们得到

$$\left(F_xG_z-G_xF_z\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(F_yG_z-G_yF_z\right)_{P_0}(y-y_0)=0,$$ （3 分）

这里$x-x_0$的系数是$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，故上式是一条直线的方程，就是所要求的切线. （1 分）

4 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&a\\1&2&2\end{pmatrix}$，其中$a$为常数，矩阵$B$满足关系式$AB=A-B+E$，其中$E$是单位矩阵且$B\neq E$. 若秩$rank(A+B)=3$，试求常数$a$的值.

解. 由关系式$AB=A-B+E$，得$\Rightarrow(A+E)(B-E)=0$

$\Rightarrow rank(A+B)\le rank(A+E)+rank(B-E)\le 3$ （3 分）

因为$rank(A+B)=3$，所以$rank(A+E)+rank(B-E)=3$

又$rank(A+E)\ge 2$，考虑到B非单位，所以$rank(B-E)\ge 1$，只有$rank(A+E)=2$（2 分）

$$A+E=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&5&a\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-2&-5\\0&-1&a-9\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&13-2a\\0&-1&a-9\\1&2&3\end{pmatrix},$$ 从而$a=\dfrac{13}{2}$. （2 分）

二、（12 分）设$f\in C^4(-\infty,+\infty)$，$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中$\theta$是与$x,h$无关的常数，证明$f$是不超过三次的多项式.

证 由泰勒公式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\eta)h^4 \quad ①$$ （2 分）

$$f''(x+\theta h)=f''(x)+f'''(x)\theta h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)\theta^2h^2 \quad ②$$ （2 分）

其中ξ介于x与$x+h$之间，η介于x与$x+\theta h$之间，由①，②式与已知条件

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$$

可得

$$4\left(1-3\theta\right)f'''(x)=[6f^{(4)}(\eta)\theta^2-f^{(4)}(\xi)]h$$ （3 分）

当$\theta\neq\frac{1}{3}$时，令$h\to 0$得$f'''(x)=0$，此时f是不超过二次的多项式； （2 分）

当$\theta=\dfrac{1}{3}$时，有$\dfrac{2}{3}f^{(4)}(\eta)=f^{(4)}(\xi)$

令$h\to 0$，注意到$\xi\to x,\eta\to x$，有 $f^{(4)}(x)=0$，从而 f 是不超过三次的多项式.（3 分）

三、（12 分）设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，且 $f(0)=1$，试证：当$x\ge 0$时，有$e^{-x}\le f(x)\le 1$成立.

证 设由题设知 $f'(0)=-1$，则所给方程可变形为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.\qquad（3 分）$$

两端对 x 求导并整理得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0,\qquad（2 分）$$

这是一个可降阶的二阶微分方程, 可用分离变量法求得 $f'(x)=\dfrac{C\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$.　（2 分）

由 $f'(0)=-1$得$C=-1$，$f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}<0$，可见 $f(x)$ 单减.

而 $f(0)=1$，所以当$x\ge 0$时，$f(x)\le 1$。　（2 分）

对 $f'(t)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}<0$ 在$[0,x]$上进行积分得

$$f(x)=f(0)-\int_0^x\frac{e^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t\ge 1-\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t=e^{-x}\qquad（3 分）$$

四、（10 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数. 若对任何 x,y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$ 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明 $I\le\dfrac{A}{4}$.

证. $I=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=-\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)d(1-x)$. 对固定 y，$(1-x)f(x,y)\big|_{x=0}^{x=1}=0$，由分

部积分法和可得$\int_0^1 f(x,y)d(1-x)=-\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx$.（3 分）

调换积分次序后可得$I=\int_0^1(1-x)dx\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$.（2 分）

因为 $f(x,0)=0$ 所以$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}=0$，从而$(1-y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=0}^{y=1}=0$. 再由分部积分法得

$$\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy=-\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d(1-y)=\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy.$$（2 分）

$$I=\int_0^1(1-x)dx\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy=\iint_D(1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy.$$（2 分）

因为$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$,且$(1-x)(1-y)$在$D$上非负，故$I\le A\iint_D(1-x)(1-y)dxdy=\frac{A}{4}$.（3 分）

五、（12 分）设函数 $f(x)$ 连续可导，$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right)$，有向曲面$\Sigma_t$是圆柱体 $x^2+y^2\le t^2, 0\le z\le 1$的表面，方向朝外. 记第二型的曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_t}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

求极限$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4}$.

解. 由高斯公式

$$I_t=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint_V(2xz+2yz+x^2+y^2)f'\left((x^2+y^2)z\right)dxdydz$$（3 分）

由对称性$\iiint_V(2xz+2yz)f'\left((x^2+y^2)z\right)dxdydz=0$（2 分）

从而$I_t=\iiint_V(x^2+y^2)f'\left((x^2+y^2)z\right)dxdydz=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f'\left(r^2z\right)r^3dr\right]dz$

$$=2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'\left(r^2z\right)r^3dr\right]dz$$（3 分）

$$\lim_{t\to0^+}\frac{I_t}{t^4}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1\left[\int_0^t f'\left(r^2z\right)r^3dr\right]dz}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^1 f'\left(t^2z\right)t^3dz}{4t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi}{2}\int_0^1 f'\left(t^2z\right)dz=\frac{\pi}{2}f'\left(0\right)$$ （4 分）

六、（12 分）设 A,B 为二个 n 阶正定矩阵，求证 AB 正定的充要条件是 $AB=BA$.

证必要性设 AB 为二个 n 阶正定矩阵，从而为对称矩阵，即 $(AB)^T=AB$. 又 $A^T=A,B^T=B,$ 所以 $(AB)^T=B^TA^T=BA,$ 所以 $AB=BA$. （3 分）

充分性 因为 $AB=BA$，则 $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$，所以 AB 为实对称矩阵.（2 分）.

因为 A,B 为正定矩阵，存在可逆阵 P,Q，使

$$A=P^TP,B=Q^TQ \text{ 于是 } AB=P^TPQ^TQ.$$ （2 分）

所以 $(P^T)^{-1}ABP^T=PQ^TQP^T=(QP^T)^T(QP^T)$，即 $(P^T)^{-1}ABP^T$ 是正定矩阵. （2 分）

所以矩阵 $(P^T)^{-1}ABP^T$ 的特征值全为正实数，而 AB 相似于 $(P^T)^{-1}ABP^T$，所以 AB 的特征值全为正实数。所以 AB 为正定矩阵. （3 分）

七、(12 分)假设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1，$\lim_{n\to\infty}na_n=0$，且 $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$. 证明：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

证 由 $\lim_{n\to\infty}na_n=0,$ 知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}=0,$ 故对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 N_1 使得当 $n>N_1$ 时，有

$$0\le\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3},\ n|a_n|<\frac{\varepsilon}{3}.$$ （2 分）

又因为 $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$，所以存在 $\delta>0$，当 $1-\delta<x<1$ 时，$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.（1 分）

取 N_2，当 $n>N_2$ 时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而 $1-\delta<1-\frac{1}{n}$，取 $x=1-\frac{1}{n}$，则

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$ （2 分）

取 $N=\{N_1,N_2\},$ 当 $n>N$ 时

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_n - A\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1-x^k)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A\right|$$ （3 分）

取 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1-x^k)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1-x)k = \frac{\sum_{k=0}^{n} k|a_k|}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$$ （2 分）

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|x^k < \frac{\varepsilon}{3n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \leq \frac{\varepsilon}{3n}\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3};$$

又因为 $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, 则 $\left|\sum_{k=0}^{n} a_n - A\right| < 3\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. 证毕 （2 分）