第五届全国大学生数学竞赛预赛试卷

（非数学类，2013）

一、解答下列各题（每小题 6 分共 24 分，要求写出重要步骤）

1.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

解　因为 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$ （2 分）；

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]$

(2 分)； $=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}$

(2 分)

2.证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛的

解 记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散即可。（2 分）

因为 $a_n\ge\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$。（2 分）

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散，故由比较判别法 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散。（2 分）

3.设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

解　方程两边对 x 求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0$ （1 分）

故 $y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$ （2 分）

将 $x=-2y$ 代入所给方程得 $x=-2,y=1$，

将 $x=0$ 代入所给方程得 $x=0,y=-1$，（2 分）

又 $y''=\dfrac{(2x+2xy'+2y)(2y^2-x^2)-x(x+2y)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$

$$y''\big|_{x=0,y=1,y'=0}=\frac{(0+0-2)(2-0)-0}{(2-0)^2}=-1<0,\ y''\big|_{x=-2,y=1,y'=0}=1>0,$$

故 $y(0)=-1$ 为极大值， $y(-2)=1$ 为极小值。（3 分）

4.过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\ge 0)$ 上的点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标。

解 设切点 A 的坐标为 $\left(t,\sqrt[3]{t}\right)$，曲线过 A 点的切线方程为 $y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$（2 分）；令 $y=0$，由切线方程得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=-2t$。

从而作图可知，所求平面图形的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\left[t-(-2t)\right]-\int_0^t\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1,$$

故 A 点的坐标为 $(1,1)$。（4 分）

二、（满分 12）计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

解 $$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$ （4 分）

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\cdot\left(\arctan e^{-x}+\arctan e^x\right)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$ （2 分）

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$ （4 分）

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8}$$ （2 分）

三、（满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

解 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导必连续，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left[x\cdot\frac{f(x)}{x}\right]=0 \qquad (2\text{ 分})$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0 \qquad (2\text{ 分})$$

由洛必塔法则及定义

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0) \qquad (3\text{ 分})$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$ （2 分）

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，从而由比较判别法的极限形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。（3 分）

四、（满分 12 分）设 $|f(x)|\le\pi,\ f'(x)\ge\pi>0(a\le x\le b)$，证明 $\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\le\dfrac{2}{m}$

解 因为 $f'(x)\ge\pi>0(a\le x\le b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增，从而有反函数（2 分）。

设 $A=f(a),B=f(b),\varphi$ 是 f 的反函数，则 $0<\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}\le\dfrac{1}{m}$ （3 分）

又 $|f(x)|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以 $\left|\int_a^b\sin f(x)dx\right|\overset{x=\varphi(y)}{=}\left|\int_A^B\varphi'(y)\sin ydy\right|$ （3 分）

$$\le\left|\int_0^\pi\varphi'(y)\sin ydy\right|\le\int_0^\pi\frac{1}{m}\sin ydy=-\frac{1}{m}\cos y\Big|_0^\pi=\frac{2}{m} \qquad (2\text{ 分})$$

五、（满分 14 分）设 Σ 是一个光滑封闭曲面，方向朝外。给定第二型的曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)dydz+(2y^3-y)dzdx+(3z^3-z)dxdy$。试确定曲面 Σ，使积分 I 的值最小，并求该最小值。

解 记 Σ 围成的立体为 V，由高斯公式

$$I=\iiint\limits_V(3x^2+6y^2+9z^2-3)dv=3\iiint\limits_V(x^2+2y^2+3z^2-1)dxdydz \qquad (3\text{ 分})$$

为了使得 I 的值最小，就要求 V 是使得的最大空间区域 $x^2+2y^2+3z^2-1\le0$，即

取$V=\{(x,y,z)|x^2+2y^2+3z^2\le 1\}$ ，曲面$\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=1$ （3 分）

为求最小值，作变换$\begin{cases} x=u \\ y=v/\sqrt{2} \\ z=w/\sqrt{3} \end{cases}$，则$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{vmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，

从而$I=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_V (u^2+v^2+w^2-1)\,dudvdw$ （4 分）

使用球坐标计算，得$I=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2-1)r^2\sin\varphi dr$

$=\dfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot 2\pi\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}\cdot 4\pi\cdot\dfrac{-2}{15}=-\dfrac{4\sqrt{6}}{15}\pi$ （4 分）

六、（满分 14 分）设$I_a(r)=\oint\limits_C \dfrac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限$\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$

解 作变换$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \end{cases}$（观察发现或用线性代数里正交变换化二次型的方法），曲线 C 变为uov平面上的椭圆$\Gamma: \dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$（实现了简化积分曲线），也是取正向 （2 分）

而且$x^2+y^2=u^2+v^2, ydx-xdy=vdu-udv$（被积表达式没变，同样简单！），

$I_a(r)=\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{vdu-udv}{(u^2+v^2)^a}$ （2 分）

曲线参数化$u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta, v=\sqrt{2}r\sin\theta, \theta: 0\to 2\pi$，则有$vdu-udv=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$，

$$I_a(r)=\int_0^{2\pi}\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta}{\left(\dfrac{2}{3}r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta\right)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\dfrac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}$$ （3 分）

令 $J_a=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}$，则由于 $\frac{2}{3}<\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta<2$，从而

$0<J_a<+\infty$。因此当 $a>1$ 时 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=0$ 或 $a<1$ 时 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)=-\infty$（2 分）

而 $a=1, J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$

$=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan\theta}{\frac{1}{3}+\tan^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1/3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{1/3}}\Big|_0^{+\infty}=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\sqrt{3}\pi$（3 分）

$I_1(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\pi=-2\pi$。故所求极限为 $I_a(r)=\begin{cases}0, a>1\\-\infty, a<1\\-2\pi, a=1\end{cases}$（2 分）

七（满分 14 分）判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和。

解 （1）记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, n=1,2,3,\cdots$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{\sqrt{n}}=0$, n 充分大时 $0<a_n<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}$ （3 分）

所以 $0<u_n<\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛（2 分）

（2）记 $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k},(k=1,2,3,\cdots)$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)$ （2 分）

$=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{a_n}{n+2}$ （2 分）

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n}-\frac{a_n}{n+2}=1-\frac{1}{n}-\frac{a_n}{n+2}$$ （2 分）

因为 $0<a_n<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n$，所以 $0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$。

因此 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$。（也可由此用定义推知级数的收敛性）（3 分）