

第七届全国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷
(数学类, 2016年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 20 分) 填空题 (每小题 5 分)

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1. 则

$$\sum_{A \in \Gamma} |A| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是 .

(3) 设 $D: x^2 + 2y^2 \leq 2x + 4y$, 则积分 $I = \iint_D (x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 若实向量 $X = (a, b, c)$ 的三个分量 a, b, c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$,

其中 I_2 为 2 阶单位方阵, 则 $X = \underline{\hspace{2cm}}.$

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2 + 2y^2 = 1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

○ 密封线 答题时不要超过此线 ○

得分	
评阅人	

三、证明题 (15分) 设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2 B^2)$.

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 B_1, B_2, \cdots, B_n . 令 P_A, P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: $P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

准考证号: _____ 所在院校: _____ 专业: _____
学号: _____ 座位号: _____

答题时不要超过此线

密封线

得分	
评阅人	

五、(本题15分) 设 $a(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的连续函数,
且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $a(x) > 0$. 已知 $\int_0^{\infty} a(x) dx = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{a(x)} = 0$, 且 $y'(x) + a(x)y(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$.

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

得分	
评阅人	

六、(本题15分) 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x) = 2 \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt + \frac{x^2}{4}.$$

求 $f(x)$.