第二届全国大学生数学竞赛预赛试题（非数学类，2010）答案

一、（本题共 5 小题，每小题各 5 分，共 25 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）

（1）设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：$x_n=\dfrac{(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})}{1-a}=\dfrac{(1-a^{2^{n+1}})}{1-a}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解：$\ln e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})-x=\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}，所以 \lim_{n\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

（3）设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n dx(n=1,2,\cdots)$.

解：$I_n=\dfrac{n}{s}\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^{n-1}dx=\dfrac{n}{s}I_{n-1}$，$I_1=\dfrac{1}{s^2}$，所以 $I_n=\dfrac{n!}{s^{n+1}}(n=1,2,\cdots)$.

（4）设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\dfrac{1}{r})$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解：$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-f'(\dfrac{1}{r})\dfrac{1}{r^2}\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}f'(\dfrac{1}{r})$，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^6}f''(\dfrac{1}{r})-\dfrac{r^2-3x^2}{r^5}f'(\dfrac{1}{r})$，

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{r^6}f''(\dfrac{1}{r})-\dfrac{r^2-3y^2}{r^5}f'(\dfrac{1}{r})$，所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''(\frac{1}{r})+\frac{1}{r^3}f'(\frac{1}{r}).$$

（5）求直线 l_1：$\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线 l_2：$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

解：在 l_1 上任取一点 $A(t,t,0)$，l_2 上任取一点 $B(4s+2,-2s+1,-s+3)$，

设 $f(s,t)=|AB|^2=(4s-t+2)^2+(2s+t-1)^2+(s-3)^2$，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial s}=8(4s-t+2)+4(2s+t-1)+2(s-3)=42s-4t+6=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial t}=-2(4s-t+2)+2(2s+t-1)=-4s+4t-6=0\end{cases}，\Rightarrow\begin{cases}s=0\\t=\dfrac{3}{2}\end{cases}，$$

由于 $f(s,t)$ 的最小值存在，又 $f(s,t)$ 只有一个驻点，所以 $f_{\min}(s,t)=\dfrac{19}{2}$，那么

直线 l_1 与直线 l_2 的距离为 $\sqrt{f_{\min}(s,t)}=\dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

二、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\beta<0$，且存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

证明：因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\beta<0$，所以存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(x_1)=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调

减少，在 $(x_1,+\infty)$ 上单调增加，$f(x_1)$ 是最小值，$f(x_1)\le f(x_0)<0$，存在 ξ 在 x 与 x_0 之间，$f(x)=f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$．于是 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，所以在 $(-\infty,x_1)$ 及 $(x_1,+\infty)$ 上恰好各有一个实根．

三、（本题 15 分）设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ 其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 出相切，求函数 $\psi(t)$．

解：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(1+t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{2^3(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，$(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$，

$\psi'(t)=3t^2+\dfrac{1}{e}t+\dfrac{1}{e}-3$，

$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+(\dfrac{1}{e}-3)t+2$．

四、（本题 15 分）设 $a_n>0,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

（1）当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛；

（2）当 $\alpha\le1$，且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散．

证明：（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}=a_1^{1-\alpha}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha}\le a_1^{1-\alpha}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\dfrac{1}{x^\alpha}dx=\int_{a_1}^{S_\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}dx<+\infty$，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛．

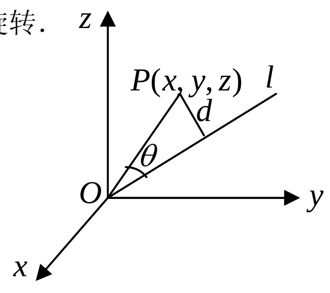
（2）当 $\alpha\le1$，令 $D_n=\sum\limits_{i=n}^{n}\dfrac{a_i}{S_i^\alpha}$ 对于任意 $n,m\in N$，有

$$D_{n+m}-D_{n-1}=\sum_{i=n}^{n+m}\frac{a_i}{S_i^\alpha}\ge\sum_{i=n}^{n+m}\frac{a_i}{S_{n+m}^\alpha}=\frac{1}{S_{n+m}^\alpha}\sum_{i=n}^{n+m}a_i=\frac{S_{n+m}-S_{n-1}}{S_{n+m}^\alpha}\ge\frac{S_{n+m}-S_{n-1}}{S_{n+m}}=1-\frac{S_{n-1}}{S_{n+m}}$$

因为 $S_n\to\infty(n\to\infty)$，存在 $m\in N$，使得 $\dfrac{S_{n-1}}{S_{n+m}}<\dfrac{1}{2}$，$D_{n+m}-D_{n-1}=\sum\limits_{i=n}^{n+m}\dfrac{a_i}{S_i^\alpha}>1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

由柯西准则，D_n 发散，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散．

五、（本题 15 分）设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ)，（其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le1$，其中（$0<c<b<a,$ 密度为 1）绕 l 旋转．



（1）求其转动惯量；

（2）求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值．

解：设 $P(x,y,z)$ 是椭球体中任意一点，则其到 l 的距离

$$d=|\overrightarrow{OP}\times(\alpha,\beta,\gamma)|=|\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$
$$=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2\sin^2\theta}=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OP}|^2\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2-[|\overrightarrow{OP}|\cdot(\alpha,\beta,\gamma)]^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2}$$

所以 $I_l = \iiint\limits_{\Omega} d^2\rho dv = \iiint\limits_{\Omega}[x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2]dv$

$$= \iiint\limits_{\Omega}[(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2]dv - 2\iiint\limits_{\Omega}(\alpha\beta xy+\beta\gamma yz+\alpha\gamma xz)dv,$$

由 Ω 的对称性有 $\iiint\limits_{\Omega} xydv = \iiint\limits_{\Omega} yzdv = \iiint\limits_{\Omega} xzdv = 0$，

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2dv = \int_{-a}^{a}(x^2\iint\limits_{D(x)}dydz)dx = \int_{-a}^{a}\pi bcx^2(1-\frac{x^2}{a})dx = \frac{4}{15}\pi a^3bc,$$

其中 $D(x)$：$\frac{y^2}{b^2(1-x^2/a^2)}+\frac{z^2}{c^2(1-x^2/a^2)}\le 1$，由对称性有：

$$\iiint\limits_{\Omega} y^2dv = \frac{4}{15}\pi ab^3c,\quad \iiint\limits_{\Omega} z^2dv = \frac{4}{15}\pi abc^3,$$

所以 $I_l = \frac{4\pi abc}{15}[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2]$.

因为 $a>b>c>0$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$，当 $\gamma=1$ 时，$\alpha=\beta=0$，I_l 最大，

$$I_{\max} = \frac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2).$$

当 $\alpha=1$ 时，$\beta=\gamma=0$，I_l 最小，

$$I_{\min} = \frac{4\pi abc}{15}(b^2+c^2)$$

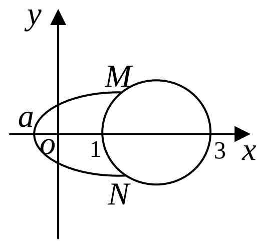
六、（本题 15 分）设函数 $\varphi(x)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意光滑简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

（1）设 L 为正向曲线 $(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

（2）求函数 $\varphi(x)$ 的表达式；

（3）设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

解：（1）在 L 上任取两点 M、N, 围绕原点作闭曲线(如图)，记弧 $MaN3M = C_1$，弧 $MaN1M = C_2$，则 $L = C_1 - C_2$，



$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_{C_1}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} - \oint_{C_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = 0.$$

（2）由（1）的证明方法可知，在半平面 $y>0$ 内积分与路径无关，得：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则

$$\frac{2x(x^4+y^2)-4xy^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2} = \frac{\varphi'(x)x^4-4x^3\varphi(x)+y^2\varphi'(x)}{(x^4+y^2)^2}$$

比较等式两边，得：$\begin{cases} x\varphi'(x)-4\varphi(x)=2x^2 \\ \varphi'(x)=-2x \end{cases}$，$\Rightarrow$ $\varphi(x)=-x^2$.

（3）令 C 为正向曲线 $x^4+y^2=1$，

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_C 2xydx - x^2dy = -4\iint\limits_D xdxdy = 0,$$

这里 D：$x^4+y^2\le 1$，最后的等号是根据对称性.