数理金融学例题

一.

已知两个股票的股价 X,Y 的四组观测统计值分别为（4，7），（5，10），（7，14），（8，17）。

（1）请用最小二乘法估计一元线性回归模型中 $Y=\beta_0+\beta_1X+\epsilon$中，$\beta_0,\beta_1$的取值。

（2）请计算该模型的拟合优度检验的判定系数。

解:

(1)

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2}=2.4$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}=12-2.4\times 6=-2.4$$

(2)

$$R^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2}=0.993$$

二.

已知某投资者的效用函数为$U(W)=lnW$，某投资收益分布为G（100,400,0.4），问:

（1）该投资者是风险厌恶还是风险偏好？（2）该投资活动的风险溢价是多少?

解:

$$
\begin{aligned}
E[G(100,400;0.4)] = 100 \times 0.4 + 400 \times 0.6 = 280 \\
U\{E[G(100,400;0.4)]\} = \ln(280) = 5.63479 \\
E\{U[G(100,400;0.4)]\} = 0.4 \times \ln(100) + 0.6 \times \ln(400) = 5.43695
\end{aligned}
$$

因为$U\{E[G(100,400;0.4)]\} > E\{U[G(100,400;0.4)]\}$，所以投资者是风险厌恶型的。

设 $\ln(x) = 5.43695$ ， 解 得 $x = 229.74$ ， x 为 确 定 性 收 益 ， 则 风 险 溢 价 为 $280 - 229.74 = 50.26$

三.

考 虑 用100 万 元 的 资 本 投 资 两 种 证 券 ， 他 们 回 报 率 的 均 值 和 标 准 差 分 别 为 : $r_1 = 0.15, \sigma_1 = 0.2, r_2 = 0.18, \sigma_2 = 0.25$ 。若两个回报率的相关系数$\rho = -0.4$，投资者的效用函数为$U = E[r] - 0.5A\sigma^2$，当风险厌恶指数为0.5时，问：（1）求这两个证券的最优组合。(2)最优投资组合下的确定性收益和风险溢价是多少?

解:

设$\omega_1 = y$,则$\omega_2 = 1 - y$

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\
&= W' \Sigma W \\
&= \begin{pmatrix} y & 1-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.4 \\ -0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[r] &= 0.15y + 0.18(1-y) \\
U &= 0.18 - 0.03y - \frac{1}{4}(0.1425y^2 - 0.165y + 0.0625) \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -0.03 - 0.07125y + \frac{0.0165}{4} \\
\Rightarrow y^* &= 0.15789
\end{aligned}
$$

确定性收益：$E[r_f] = U^*$，风险溢价:$E[r] - E[r_f]$

四.

已知投资某风险产品利率为15%，方差为22%。银行利率（无风险利率）为7%，该投资落在资本市场线（CML）上，问：（1）该投资的夏普比率为多少？（2）如果要达到17%的收益，要承担多大的风险？

解：

(1) 夏普比率：$S_p=\frac{a-R_0}{\sigma}=\frac{8}{\sqrt{22}}$

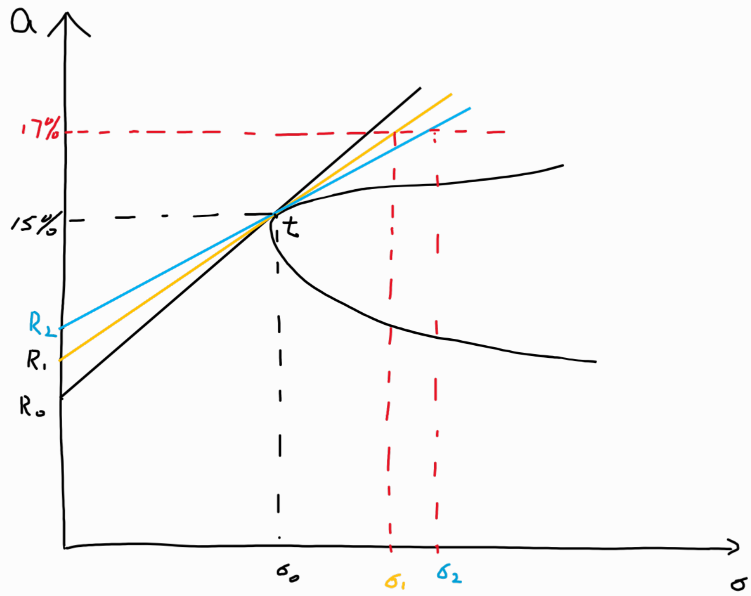
(2)

$$a=R_0+\frac{8}{\sqrt{22}}\sigma$$
$$当a=17$$
$$\sigma=\frac{17\%-7\%}{\frac{8}{\sqrt{22}}}=\frac{\sqrt{22}\times 10\%}{8}$$

五.

已知市场均衡下银行存款利率7%，银行贷款利率9%，支付宝借贷利率为10%，市场组合的利率为 =15%，夏普比率为0.5，问基于均值方差模型下，要达到17%的收益，哪种贷款方式风险更高？高多少？（标准差or方差均可）

解：



先计算t点坐标,由市场组合(图中t点)可知：

$$\frac{15\%-7\%}{\sigma_0}=0.5\ \Rightarrow \sigma_0=16\%$$

对于银行贷款(黄线):

$$\text{斜率:}\ \frac{15-9}{16-0}=\frac{3}{8}$$
$$a_1=9\%+\frac{3}{8}\sigma_1\Rightarrow \sigma_1=\frac{17\%-9\%}{\frac{3}{8}}=21.3\%$$

对于支付宝贷款(蓝线):

$$\text{斜率:}\ \frac{15-10}{16-0}=\frac{5}{16}$$
$$a_2=10\%+\frac{5}{16}\sigma_2\Rightarrow \sigma_2=\frac{17\%-10\%}{\frac{5}{16}}=22.4\%$$

风险差值:

$$\sigma_2-\sigma_1=1.1\%$$
$$\sigma_2^2-\sigma_1^2=0.48\%$$

六.

考虑用100万元的资产投资于股票市场和银行，根据历史数据它们的预期回报率分别为：$E[r_p]$=10%， r_f=5%。已知股票市场的风险（标准差）为25%。投资者的效用函数为：$U=E[r]-\frac{1}{2}A\sigma^2$，当风险厌恶指数为4时，求该资本配置的最优组合。

解:

最优组合即为效用最大的组合，即U_{Max}。设投资于股票的比例为y

$$U=E[r]-\frac{1}{2}A\sigma_c^2$$
$$=yEr_p+(1-y)Er_f-\frac{1}{2}Ay^2\sigma_p^2$$
$$\text{Let}\ \frac{\partial U}{\partial y}=0$$
$$\Rightarrow y^*=\frac{Er_p-r_f}{A\sigma_p^2}$$
$$\Rightarrow y^*=0.2$$

七.

已知效用函数 $U = E[r] - \frac{1}{2}A\sigma^2$，在市场均衡下，市场组合 $E[r_M] = 10\%$, $\sigma_M = 5\%, r_f = 5\%$ 已知投资者在市场组合的点达到效用大化，问此时风险厌恶因子$\overline{A}$是多少?

解:

设投资于风险资产的比例为y，由题，市场组合的点，即$y = 1$

根据$y^* = \dfrac{Er_p - rf}{A\sigma_p^2} = 1$，易知$\overline{A} = 20$

(实际出题将不会直接给出市场组合的均值等条件，需要另外计算)

八.

（幼儿园难度）在CAPM 模型中，已知某证券的β系数为1.1，市场期望收益率为7.5%，当前无风险利率为4.5%，

（1）该项目基于SML的预期收益率

（2）若该项目实际收益率为11%，按照α策略应该买进还是卖出？为7%?

解:

(1)$\mu = R_0 + \beta(a_m - R_0) = 4.5\% + 1.1(7.5\% - 4.5\%) = 7.8\%$

(2)

$$\begin{cases} A = 11\% & \alpha > 0, \text{低估, 买} \\ B = 7\% & \alpha < 0, \text{高估, 卖} \end{cases}$$

九.

某项目N年的期望收益为1000万美金，由于项目与市场相关性较小，β=0.6，若当时短期国债的平均收益为10%，市场组合的期望收益为17%，则改项目最大可接受投资成本为多少?（每年计算一次复利）

解:

$$r_1 = 10\% + 0.6(17\% - 10\%) = 14.2\%$$
$$P = \frac{1000}{(1 + 14.2\%)^N}$$

十.远期利率的无套利定价与套利策略

假设现在6个月即期利率为10%（每年计算复利一次，下同），1年期的即期利率是12%，如果有人把今后6个月到1年期的远期利率定为11%，试问这样的市场行情能否产生套利？远期利率的无套利均衡价格应该为多少？

解:

①$r_1 = 10\%$，借入1000万六个月，六个月后还$1000(1 + 10\%)^{1/2} = 1048$

②$r_2 = 12\%$，贷出1000万一年，一年后收$1000(1 + 12\%) = 1120$

③$r_3 = 11\%$，六个月后借入1000万六个月，一年后还$1048(1 + 11\%)^{1/2} = 1104$

④一年后套利得$1120 - 1104 = 16$

⑤无套利均衡

$$1048(1 + r^*) = 1120 \Rightarrow r^* = 14.2\%$$

十一.外汇的无套利定价与套利策略

假定市场条件如下：目前货币市场美元利率为6%，人民币利率为10%，外汇市场上美元与人民币的即期汇率为1美元兑7元人民币（1：7），若一年期的远期汇率也为（1：7）。问（1）是否可以套利，并举例给出套利策略；（2）市场均衡下，一年期的远期汇率应为多少？

解:

①借1美金，兑7元人民币存一年，得$7 \times 1.1 = 7.7$人民币

②一年后兑回1.1美元，

③还$1 \times (1 + 6\%) = 1.06$美元

④一年后套利得$1.1 - 1.06 = 0.04$

⑤无套利均衡

$$\frac{7(1 + 10\%)}{r^*} = 1 \times (1 + 6\%) \Rightarrow r^* = 7.264$$
$$\begin{cases} r < r^* & \text{借低买高} \\ r > r^* & \text{借高买低} \end{cases}$$

十二.

假设证券的收益率由一个单因素模型构成，洪先生拥有一个组合具有如下表所示特征:

	证券A	证券B	证券C
期望收益率	20%	10%	5%
因子载荷	2.0	3.5	0.5
权重	0.20	0.40	0.40

问:

（1）请用套利定价组合条件判断是否能够套利。

（2）洪先生决定通过增加证券A的比重0.2来进行套利，问套利调整后洪先生的证券投资权重分别为多少?

解:

（1）

能够套利需同时满足三个条件:（a)初始成本为零；（b)对因子的敏感度为零；（c)期望回报率为正

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \\ 2\omega_1 + 3.5\omega_2 + 0.5\omega_3 = 0 \\ 0.2\omega_1 + 0.1\omega_2 + 0.05\omega_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，能够套利。

（2）

$$\begin{cases} 0.2 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \\ 2 \times 0.2 + 3.5\omega_2 + 0.5\omega_3 = 0 \\ 0.2 \times 0.2 + 0.1\omega_2 + 0.05\omega_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = -0.1 \\ \omega_3 = -0.1 \end{cases}$$

因此此时的权重为$(0.4, 0.3, 0.3)$

十三.

有三个证券组合资产X、Y、Z，如表所示

资产	收益率R_i	b_{i1}	b_{i2}	组合平均收益率
X	11%	0.5	2.0	$R_1=20\%$
Y	25%	1.0	1.5	$R_2=8\%$
Z	23%	1.5	1.0	$\lambda_0=10\%$

三种资产组合的预期收益率:

$$\begin{aligned}R_X&=10\%+0.5\times(20\%-10\%)+2.0\times(8\%-10\%)=11\%\\R_Y&=10\%+1.0\times(20\%-10\%)+1.5\times(8\%-10\%)=17\%<25\%\\R_Y&=10\%+1.5\times(20\%-10\%)+1.0\times(8\%-10\%)=23\%\end{aligned}$$

因此我们可以卖出X、Z，买进Y，获得额外的正收益率

假设原本三种资产等额分配，现在将Y的投资比重从1/3增加到1，即$\omega_y=2/3$，要求不增加新的投资，切该组合对每个要素的b值为0，因此

$$\begin{aligned}\omega_x+\omega_y+\omega_z&=0\\\omega_x b_{x1}+\omega_y b_{y1}+\omega_z b_{z1}&=0\\\omega_x b_{x2}+\omega_y b_{y2}+\omega_z b_{z2}&=0\end{aligned}$$

带入数据得

$$\omega_x=-\frac{1}{3},\omega_y=\frac{2}{3},\omega_z=-\frac{1}{3}$$

原组合风险:

$$\begin{aligned}b_1:\frac{1}{3}\times0.5+\frac{1}{3}\times1.0+\frac{1}{3}\times1.5=1.0\\b_2:\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{3}\times1.5+\frac{1}{3}\times1.0=1.5\end{aligned}$$

新组合风险:

$$\begin{aligned}b_1:0\times0.5+1\times1.0+0\times1.5=1.0\\b_2:0\times2+1\times1.5+0\times1.0=1.5\end{aligned}$$

原组合预期收益率：

$$\frac{1}{3}\times 11\%+\frac{1}{3}\times 25\%+\frac{1}{3}\times 23\%=19.67\%$$

新组合预期收益率：

$$0\times 11\%+1\times 25\%+0\times 23\%=25\%$$

因此可以在不增加新投资和不改变系统性风险的情况下，增加5.33%的收益率。

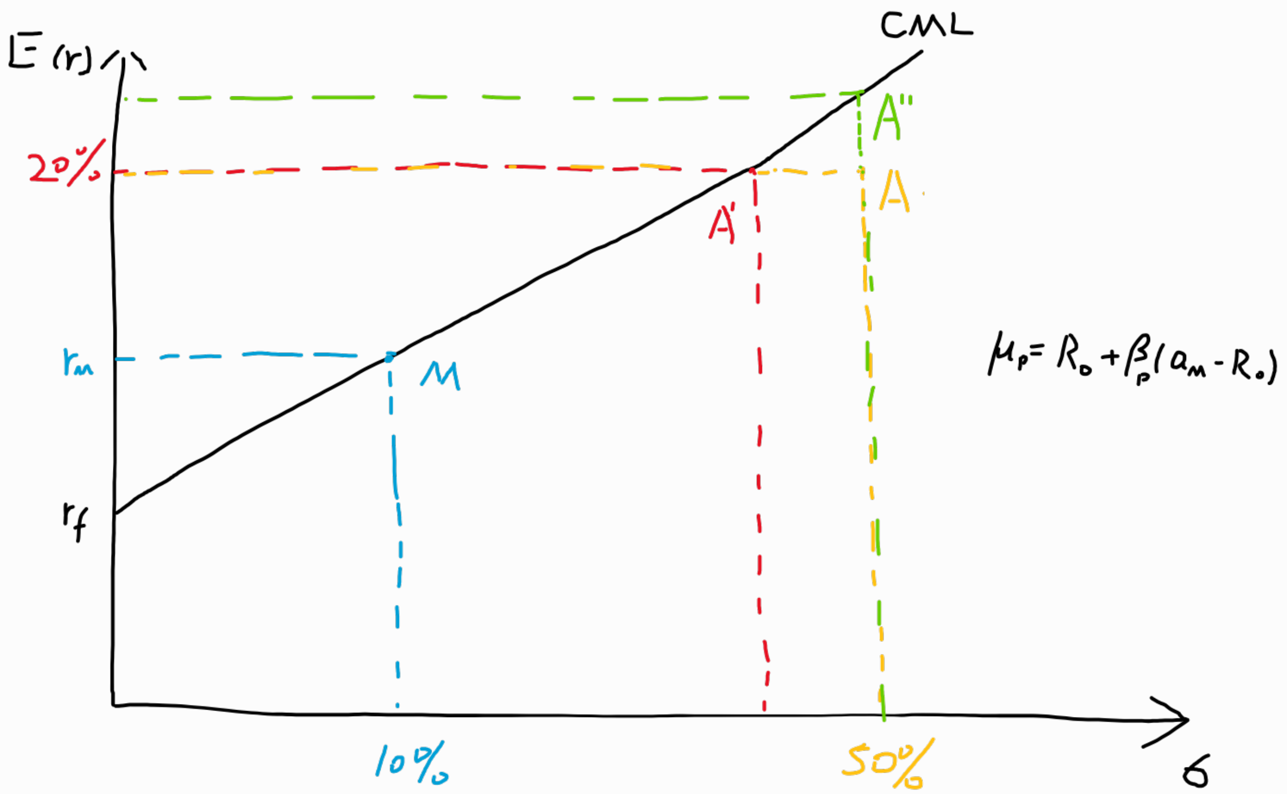
十四.

已知CML外的一个非有效组合 A 点，其中$r_f=5\%,\sigma_A=50\%,E[r_A]=20\%$，市场组合M点$\sigma_M=10\%,\beta_{AM}=2$。

（1）求市场组合M点点收益$E[r_M]$

（2）求A点的非系统风险

解：



(1)

$$\begin{aligned}E[r_A]&=r_f+\beta_{AM}[E(r_M)-r_f]\\ \Rightarrow E[r_M]&=\frac{E[r_A]-r_f}{\beta_{AM}}+r_f\\ &=0.125=12.5\%\end{aligned}$$

(2)

设A'位于SML上，且与A点水平，则

$$E[r_{A'}]=E[r_A]=20\%$$

由于$\mu_p=R_0+\beta_p(R_0-r_f)$，可以得出$\beta_{A'M}=\beta_{AM}=2$

非系统性风险为:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varepsilon A}^2&=\sigma_A^2-\beta_{A'M}^2\sigma_M^2\\ \sigma_{\varepsilon A}^2&=50\%^2-2^2\times10\%^2=0.21\end{aligned}$$

十五.

（证明题）仅考虑有风险资产的投资组合，已知风险资产的期望收益$u=(u_1,\dots,u_n)'$，协方差矩阵Σ。投资在风险资产的比重分别为$W=(w_1,\dots,w_n)'$，且有$W'\Pi=1$。若总投资组合的期望收益为a,试构建以最小化风险为目标函数的均值-方差模型，并推导最优投资组合W_a。

$(\Pi=(1,\dots,1)'\in R^{n\times1},A=\Pi'\Sigma^{-1}\Pi,B=\Pi'\Sigma^{-1}u,C=u'\Sigma^{-1}u,\Delta=AC-B^2)$

解：由题得出方程组:

$$\begin{cases}\sigma^2(W_a)=W'\Sigma W\\ W'\Pi=1\\ W'u=a\end{cases}$$

构建拉格朗日方程:

$$F(W)=W'\Sigma W-2\lambda_1(W'\Pi-1)-2\lambda_2(W'u-a)$$

令$\dfrac{\partial F}{\partial W}=2\Sigma W-2\lambda_1\Pi-2\lambda_2u=0$

则

$$\begin{aligned}\Sigma W&=\lambda_1\Pi+\lambda_2u\\ \Sigma^{-1}\Sigma W&=\Sigma^{-1}(\lambda_1\Pi+\lambda_2u)\\ W&=\Sigma^{-1}(\lambda_1\Pi+\lambda_2u)=W_a\end{aligned}$$

代入$\begin{cases}W'\Pi=1\\ W'u=a\end{cases}$，得

$$\begin{cases}\lambda_1\Pi'\Sigma^{-1}\Pi+\lambda_2\Pi'\Sigma^{-1}u=1\\ \lambda_1\Pi'\Sigma^{-1}u+\lambda_2u'\Sigma^{-1}u=a\end{cases}$$

由$A=\Pi'\Sigma^{-1}\Pi,B=\Pi'\Sigma^{-1}u,C=u'\Sigma^{-1}u,\Delta=AC-B^2$

$$\begin{cases}\lambda_1 A+\lambda_2 B=1\\ \lambda_1 B+\lambda_2 C=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\frac{C-aB}{\Delta}\\ \lambda_2=\frac{aA-B}{\Delta}\end{cases}$$

则

$$W_a=\Sigma^{-1}(\frac{C-aB}{\Delta}\Pi+\frac{aA-B}{\Delta}u)$$

十六.聚类分析指标

中心化变换:

$$x_{ij}^*=x_{ij}-\bar{x}_j\ \ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

x_{ij}表示第i个

标准化变换:

$$x_{ij}^*=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{s_j}\qquad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

其中s_j是标准差

极差标准化变换

$$x_{ij}^*=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{R_j}\qquad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

其中R_j是标准差

极差正规化变换(规格化变换)

$$x_{ij}^*=\frac{x_{ij}-\min\limits_{1\le t\le n}x_j}{R_j}\qquad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

对数变换

$$x_{ij}^*=\ln(x_{ij})\qquad(x_{ij}>0;i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

欧式距离

$$d_{ij}(2)=\sqrt{\sum_{t=1}^{m}|x_{it}-x_{jt}|^2}$$

马氏距离

$$d_{ij}(M)=(X_{(i)}-X_{(j)})'S^{-1}(X_{(i)}-X_{(j)})$$

十七、最短距离法和最长距离法聚类

设有5个产品，分别对每个产品测得一项质量指标X，其值如下：1，2，4.5，6，8.试对这5个产品按质量指标进行分类.

解:

设样品间的距离取为欧式距离，类间的距离取为最短距离，分别将5个产品设为五类: G_1,G_2,G_3,G_4,G_5.

因为只有一项指标，所以类间的欧式距离

$$\begin{aligned}
D(i,j)&=\sqrt{(i-j)^2}=|i-j|\\
D(1,2)&=|1-2|=1\\
D(1,3)&=|1-4.5|=3.5\\
D(1,4)&=|1-6|=5\\
&\cdots\\
D(4,5)&=|6-8|=2
\end{aligned}$$

则有距离矩阵

$$D_1=\begin{array}{c|ccccc}
 & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5\\
\hline
G_1 & 0 & & & & \\
G_2 & \color{red}{1} & 0 & & & \\
G_3 & 3.5 & 2.5 & 0 & & \\
G_4 & 5 & 4 & 1.5 & 0 & \\
G_5 & 7 & 6 & 3.5 & 2 & 0
\end{array}$$

可以看出$D(1,2)$是最小的，因此设$G_6=\{1,2\}$

运用最短距离法，类间距离为

$$
\begin{aligned}
D(6,3) &= \min\{D(1,3), D(2,3)\} = 2.5 \\
D(6,4) &= \min\{D(1,4), D(2,4)\} = 4 \\
D(6,5) &= \min\{D(1,5), D(2,5)\} = 6
\end{aligned}
$$

则距离矩阵为

$$
D_2 = \begin{array}{c|cccc}
 & G_6 & G_3 & G_4 & G_5 \\
\hline
G_6 & 0 & & & \\
G_3 & 2.5 & 0 & & \\
G_4 & 4 & \color{red}{1.5} & 0 & \\
G_5 & 6 & 3.5 & 2 & 0
\end{array}
$$

由于$D(3,4)$，因此设$G_7 = \{3,4\}$

再次运用最短距离法，类间距离为

$$
\begin{aligned}
D(7,6) &= \min\{D(3,6), D(4,6)\} = 2.5 \\
D(7,5) &= \min\{D(3,5), D(4,5)\} = 2
\end{aligned}
$$

则距离矩阵为

$$
D_3 = \begin{array}{c|ccc}
 & G_6 & G_7 & G_5 \\
\hline
G_6 & 0 & & \\
G_7 & 2.5 & 0 & \\
G_5 & 6 & \color{red}{2} & 0
\end{array}
$$

由于$D(7,5)$，因此设$G_8 = \{7,5\} = \{3,4,5\}$

此时类间距离

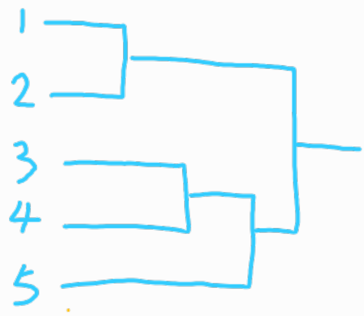
$$
D(8,6) = \min\{D(7,6), D(5,6)\} = 2.5
$$

距离矩阵为

$$
D_4 = \begin{array}{c|cc}
 & G_6 & G_8 \\
\hline
G_6 & 0 & \\
G_8 & \color{red}{2.5} & 0
\end{array}
$$

设$G_9 = \{7,5\} = \{3,4,5,1,2\}$

作出谱系聚类图



(聚类顺序表示为线的长短)

当使用最长距离法时，解题方法一样，$D(p,q)=\min\{d_{jk}|j\in G_p,k\in G_q\}$更改为$D(p,q)=\max\{d_{jk}|j\in G_p,k\in G_q\}$，寻找距离矩阵中**最小值**聚类.

十八.重心法聚类

设有六个样品，每个只测量一个指标，分别是1，2，5，7，9，10，试用重心法将它们聚类。

（某一类G_k的重心为$\bar{X}_k$，它与新类G_r的距离是$D^2(k,r)=\frac{n_p}{n_r}D^2(k,p)+\frac{n_q}{n_r}D^2(k,q)-\frac{n_p}{n_r}\frac{n_q}{n_r}D^2(p,q)$）

解:

设样品间的距离取为欧式距离，类间的距离取为最短距离，分别将6个样品设为五类: G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6.

则距离平方矩阵为

$$D_1=\begin{array}{c|cccccc} & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 \\ \hline G_1 & 0 & & & & & \\ G_2 & 1 & 0 & & & & \\ G_3 & 16 & 9 & 0 & & & \\ G_4 & 36 & 25 & 4 & 0 & & \\ G_5 & 64 & 49 & 16 & 4 & 0 & \\ G_6 & 81 & 64 & 25 & 9 & 1 & 0 \end{array}$$

设$G_7=\{1,2\},G_8=\{5,6\}$

运用重心法计算类间距离:

$$
\begin{aligned}
D^2(k,r) &= \frac{n_p}{n_r}D^2(k,p) + \frac{n_q}{n_r}D^2(k,q) - \frac{n_p}{n_r}\frac{n_q}{n_r}D^2(p,q) \\
D^2(7,8) &= \frac{1}{2}D^2(7,5) + \frac{1}{2}D^2(7,6) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}D^2(5,6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2(7,5) = D^2(5,7) &= \frac{1}{2}D^2(5,1) + \frac{1}{2}D^2(5,2) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}D^2(1,2) \\
&= \frac{64}{2} + \frac{49}{2} - \frac{1}{4} = \frac{225}{4} \\
D^2(7,6) = D^2(6,7) &= \frac{1}{2}D^2(6,1) + \frac{1}{2}D^2(6,2) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}D^2(1,2) \\
&= \frac{81}{2} + \frac{64}{2} - \frac{1}{4} = \frac{289}{4} \\
D^2(5,6) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^2(7,8) &= \frac{225}{8} + \frac{289}{8} - \frac{1}{4} = 64 \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

因此距离平方矩阵为

$$
D_2 = \begin{array}{c|cccc}
 & G_7 & G_3 & G_4 & G_8 \\
\hline
G_7 & 0 & & & \\
G_3 & 12.25 & 0 & & \\
G_4 & 30.25 & \color{red}{4} & 0 & \\
G_8 & 64 & 20.25 & 6.25 & 0
\end{array}
$$

设$G_9 = \{3,4\}$，计算距离后得到距离平方矩阵

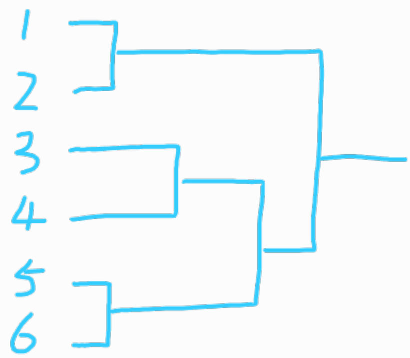
$$
D_3 = \begin{array}{c|ccc}
 & G_7 & G_9 & G_8 \\
\hline
G_7 & 0 & & \\
G_9 & 20.25 & 0 & \\
G_8 & 64 & \color{red}{12.5} & 0
\end{array}
$$

设$G_{10} = \{8,9\} = \{5,6,3,4\}$，计算距离后得到距离平方矩阵

$$
D_4 = \begin{array}{c|cc}
 & G_7 & G_{10} \\
\hline
G_7 & 0 & \\
G_9 & \color{red}{39.0625} & 0
\end{array}
$$

设$G_{11} = \{7,10\} = \{1,2,5,6,3,4\}$

作出谱系聚类图



十九.单因素模型（单因子模型）

已知有如下因子模型：$r_i = a_i + b_i f + e_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$，某投资组合$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$. 证明当$n$趋近无穷大时，该投资组合的非因子风险趋近于0.

解：

$r_i = a_i + b_i f + e_i$为单因子模型，则r_i为证券i的实际收益率，$E[r_i] = a_i$为期望收益率，f为共同因素偏离其期望的离差，其期望值为0，标准差为σ_f，b_i为证券i收益率对共同因素的敏感度，e_i为证券i的随机扰动项。因此有

$$
\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= E[r_i - E(r_i)]^2 \\
&= E[(a_i + b_i f + e_i) - a_i]^2 \\
&= E[b_i f + e_i]^2 \\
&= b_i^2 \sigma_f^2 + \sigma_{e_i}^2
\end{aligned}
$$

其中，$b_i^2 \sigma_f^2$为证券i的因素风险，$\sigma_{e_i}^2$为非因子风险。

易得，$\sigma_{ij} = b_i b_j \sigma_f^2$

组合P的方差为：

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 b_i^2 \sigma_f^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_{e_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i}^{n} \omega_i \omega_j b_i b_j \sigma_f^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j b_i b_j \sigma_f^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_{e_i}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j \right) \sigma_f^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_{e_i}^2 \\
&= b_p^2 \sigma_f^2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_{e_i}^2
\end{aligned}
$$

若$\omega_i = \frac{1}{n}$，则有$\sigma_p^2 = b_p^2\sigma_f^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{e_i}^2$，因此，当$n$趋近于无穷时，$\frac{1}{n^2}$趋于0，则非因子风险趋近于0.

（完）