专业：＿＿＿＿ 考生座位号：＿＿＿＿ 所在院校：＿＿＿＿ 准考证号：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿

密 封 线

第四届全国大学生数学竞赛预赛试卷

（非数学类，2012）

考试形式：闭卷　　考试时间：150 分钟　　满分：100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满　分	30	10	10	12	12	12	14	100
得　分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题共 5 小题，每小题各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$；

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$；

(3) 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$；

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L (x+2y)udx+(x+u^3)udy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$；

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.

姓名：
准考证号：
所在院校：
考生编号：
专业：

密 封 线

得　分	
评阅人	

二、（本题 10 分）

计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$.

得　分	
评阅人	

三、（本题 10 分）

求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解，精确到 0. 001.

姓名：______ 准考证号：______ 所在院校：______ 考生编号：______ 专业：______

密 封 线

得　分	
评阅人	

四、（本题 12 分）

设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0$， $f(0)=0$， $f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

.

得　分	
评阅人	

五、（本题 12 分）

求最小实数C，使得对满足$\int_0^1 |f(x)|dx = 1$的连续的函数$f(x)$，都有$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \le C$.

专业：______ 考生编号：______ 所在院校：______ 准考证号：______ 姓名：______

线 封 密

得 分	
评阅人	

六、（本题 12 分）

设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的上半部分. 定义三重积分

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

得　分	
评阅人	

七、（本题 14 分）

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为正项级数，那么

（1）若$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

（2）若$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.