高数多元函数微分学题型分析

李老师

说明：本章是考试中涉及比较多的，原因是几何应用借用了向量的思想（平面和线）。

注意事项：

一、讨论分段函数的连续性、可导性、可微性，必须熟练掌握，尤其是可导的定义。

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

而证明可微，就想可微的定义，即：$\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}\to 0\Leftrightarrow$ 可微。

二、对于隐函数求导部分，先弄清楚一个思想，根据题意，特别是所求的，搞清楚哪些是自变量，哪些是因变量。

1、求 $F(x,y,z)=0$ 中一阶偏导数时，方法如下：

1）推导法，如要求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，注意 y是常量，z看作是x,y的二元函数。

2）公式法，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}$，这里的$x,y,z$ 是同一等级的关系，对一个求偏导，其他 2 个都是常量；这与推导法完全不同。

3）微分的不变性，这里的x,y,z 也是同一等级的关系，通过两边去全微分，找出 dz,dx,dy 三者的方程关系。

对于上述三个方法，考试中，根据个人的熟练程度，看选择哪个方便。

尤其是遇到 $z=yf(x+y+z,xyz)$ 这样的题目时，一定要注意左右都有字母 z。可构建 $F(x,y,z)=z-yf(x+y+z,xyz)$，利用公式法比较方便。

2、求 $F(x,y,z)=0$ 中二阶偏导数时，就不要想什么公式法及微分法了，就直接用推导法来求，如求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$时，在一阶的基础上，再对 x 求导时，注意 y是常量，z看作是x,y的二元函数。

求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 时，在一阶的基础上，再对 y 求导时，注意 x是常量，z看作是x, y的二元函数。

3、对于方程组的情形 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 时，一般不死套书上的公式，因为太麻烦，难以记忆和容易出错，因此常按推导上述公式的方法来做题。（即建立二元一次线性方程组）

三、曲线与曲面问题

1、曲面 $F(x,y,z)=0$ 存在切平面和法线；

$F(x,y,z)=0$，过曲面上任一点的切平面的法向量：$\vec{n}=(F_x', F_y', F_z')$

过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面的法向量 $\vec{n}=(F_x'(P_0), F_y'(P_0), F_z'(P_0))$

点法式可建立切平面方程：$F_x'(P_0)(x-x_0)+F_y'(P_0)(y-y_0)+F_z'(P_0)(z-z_0)=0$

点向式可建立法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x'(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(P_0)}$

对于显函数 $z=f(x,y)$ 表示的曲面，可以转换为 $F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$ 表示的曲面，然后利用上述结论求解。

2、空间曲线，存在切线与法平面

1）曲线方程为参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，则切线的方向向量为：$\vec{T}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

点向式可建立切线方程：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$

点法式可建立法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

2）若曲线为一般式方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

做题方法（有三个方法）：

（1）公式法： $\vec{T}=(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_M, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_M, \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_M)$

点向式可建立切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_M}=\dfrac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_M}=\dfrac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_M}$

点法式可建立法平面方程：$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_M\,(x-x_0)+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_M\,(y-y_0)+\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_M\,(z-z_0)=0$

（2）推导法

$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，即将一般式方程看作$\begin{cases}x=x\\y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$，

因此只需要对方程组的两边 x 求导：$\begin{cases}F_y\dfrac{dy}{dx}+F_z\dfrac{dz}{dx}=-F_x\\G_y\dfrac{dy}{dx}+G_z\dfrac{dz}{dx}=-G_x\end{cases}$

解这个二元一次线性方程组，即可得到过点 M 的切线的方向向量：$\vec{T}=(1,\dfrac{dy}{dx}|_M,\dfrac{dz}{dx}|_M)$

进而可以写出切线方程与法平面方程。

（3）根据向量的关系来求方向向量

曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$是两个曲面相交，根据曲面的理论，

曲面 $F(x,y,z)=0$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面的法向量 $\vec{n}_1=(F_x'(P_0),F_y'(P_0),F_z'(P_0))$

曲面 $G(x,y,z)=0$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面的法向量 $\vec{n}_2=(G_x'(P_0),G_y'(P_0),G_z'(P_0))$

曲线的切线的方向向量为 $\vec{T}$，显然 $\vec{T}\perp\vec{n}_1,\vec{T}\perp\vec{n}_2$，

所以 $\vec{T}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\F_x'(P_0)&F_y'(P_0)&F_z'(P_0)\\G_x'(P_0)&G_y'(P_0)&G_z'(P_0)\end{vmatrix}$，因此可以写出切线方程及法平面方程。

（4）还可根据曲面的思想构造切线方程【**本方法其实是上述方法（3）的不同写法，都起到了异曲同工的妙处**】

曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$的切线既在曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的切平面上，又在曲面 $G(x,y,z)=0$ 在点 P_0 的切平面上，故该切线为两切平面的交线，切线方程为两切平面方程的联立。

曲线$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$在点$P_0$的切线方程为：

$$\begin{cases} F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0 \\ G'_x(P_0)(x-x_0)+G'_y(P_0)(y-y_0)+G'_z(P_0)(z-z_0)=0 \end{cases}$$

由上述切线方程，可求其方向向量：$\vec{T}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F'_x(P_0) & F'_y(P_0) & F'_z(P_0) \\ G'_x(P_0) & G'_y(P_0) & G'_z(P_0) \end{vmatrix}$，

点法式可以写出法平面方程。

四、方向导数与梯度

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}|_{P_0}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}|_{P_0}\cos\gamma$$

$$=(\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0},\frac{\partial u}{\partial y}|_{P_0},\frac{\partial u}{\partial z}|_{P_0})\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=grad_u(P_0)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$=|grad_u(P_0)|\cos\theta$　（其中θ 是梯度（向量）$grad_u(P_0)$与l的夹角）

显然，点P_0是固定好的，梯度这个向量也就固定好了，因此可以讨论什么时候取最大值。

（1）u在点P_0处沿方向l的方向导数，等于梯度在方向l上的投影，$|grad_u(P_0)|\cos\theta$；

（2）当θ=0，即$\cos\theta=1$，沿着梯度的方向，可以让方向导数达到最大值。

$$\max(\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0})=|grad(P_0)|=\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0})^2+(\frac{\partial u}{\partial y}|_{P_0})^2+(\frac{\partial u}{\partial z}|_{P_0})^2}$$

即当u在点P_0可微时，u在点P_0的梯度方向是当u值增长最快的方向；

（3）当$\theta=\pi$，即$\cos\theta=-1$，即方向与梯度方向相反，$u(x,y,z)$在点P_0处沿方向$-grad_u(P_0)$的方向导数最小，最小值$\min(\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0})=-|grad(P_0)|=-\sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x}|_{P_0})^2+(\frac{\partial u}{\partial y}|_{P_0})^2+(\frac{\partial u}{\partial z}|_{P_0})^2}$

（4）当$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，即所沿着的方向与梯度方向垂直，方向导数为0，

五、函数的极值与最值

1、极值的充分条件：

$z=f(x,y)$ ，先找出驻点，$f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$

设$A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$, （1） $B^2-AC<0,$是极值，当$A>0,$取得极小值；当$A<0,$取得极大值。

（记忆方法，关于$A>0,A<0,$利用顺时针旋转90度来帮助记忆。）

（2） $B^2-AC>0$，不是极值；

（3） $B^2-AC=0$，本方法失效。

2、最值问题（拉格朗日乘数法）

构造拉格朗日函数，求最值即可。

本章题目类型分析：

类型 1、求二元函数的极限
方法：四则运算、夹逼性准则、换元后变为一元函数求极限、利用无穷小与有界函数的乘积还是无穷小等等

类型 2、判断多元函数的极限不存在
选 2 条特殊的路径导数极限不同或者不存在即可。

类型 3、判断多元函数的可导性、可微性
都是从定义出发。

类型 4、求偏导，前面已介绍过，一个题，一般是有 3 个方法。

类型 5、求多元隐函数组的偏导数（主要利用多元隐函数组求偏导数的方法、用全微分一阶形式不变性）

类型 6、求方向导数与梯度（用方向导数的定义、用梯度定义）

类型 7、求极值，找出多元函数的驻点和不可导点，对于驻点用二元函数取到极值的充分条件判断或用定义判断；对于偏导数不存在的点用定义判断。

其他类型，求曲线及曲面的几何应用，直接按前面的进行分析即可。