学校________ 院系________ 姓名________ 准考证号________

第四届广东省大学生数学竞赛试卷(经济管理类)

考试时间：2014 年 10 月 25 日上午 9:00 至 11:30　　考试形式：闭卷考试

参考答案

2

一、填空题(本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 设函数 $f(x)=xe^x$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{f^{(n)}(0)}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{f^{(k)}(0)}{n}\right)=$ ____1____。

2. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+1/k}=$ ____$\dfrac{1}{\ln 2}$____。

3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$ ____$\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\dfrac{\pi^2}{2}$____。

4. 积分 $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x=$ ____$\dfrac{\pi+2}{8}$____。

5. 设函数 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 的值为 ____$\left(\dfrac{\pi}{e}\right)^2$____。

6. 设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，且满足 $f(x,2x)=x$，$f'_x(x,2x)=x^2$、$f''_{xx}=f''_{yy}$，则二阶偏导数 $f''_{xy}(x,2x)=$ ____$\dfrac{5x}{3}$____。

7. 二重积分 $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}\big(|x|+|y|\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____$\dfrac{4}{3}$____。

8. 设某微分方程的通解为 $(y-C_2)^2=4C_1x$，则该微分方程为 ____$2xy''+y'=0$____。

9. 第一象限的连续曲线 $y=f(x)$ 过原点 O，$C(x,y)$ 是曲线上的任意点，点 C 在 x 轴和 y 轴上的正投影点分别记为 A 和 B。如果曲边三角形 OBC 的面积总是矩形 $OACB$ 面积的三分之一，则 $f(x)=$ ____$C\sqrt{x}$，其中 $C>0$____。

10. 设 $y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$ 是微分方程 $y'=P(x)y+Q(x)$ 的两个互异解，$y(x)$ 是该微分方程的任一解，则 $\dfrac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=$ ____C (某一常数)____。

二、(本题 8 分) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ 处处可导，试确定参数 a, b 的值。

解：根据 $f(x)$ 的定义易知：

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

首先由于 $f(x)$ 处处可导，所以必处处连续。因此，根据 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ 可得

$$a+b=\frac{1}{2}(a+b+1)\iff a+b=1\iff f(1)=1$$

其次由于

$$\begin{aligned}f'_-(1)&=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1^-}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a\\f'_+(1)&=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2\end{aligned}$$

注意到 $f(x)$ 处处可导，所以必有 $f'_-(1)=f'_+(1)$。由此得到

$$a=2,\ \ b=-1$$

三、(本题 10 分) 设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\,(0<\theta<1)$，又二阶导数 $f''(x)$ 存在，且 $f''(x)\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$。

解：根据题设

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h),\quad 0<\theta<1$$

二根据 Taylor 展开式则得

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$$

两式相减得到

$$hf'(x+\theta h)-hf'(x)=\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$$

从而有

$$\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\frac{1}{2}f''(x)+o(1)$$

在上式中令 $h\to 0$ 两边取极限得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\frac{1}{2}f''(x)$$

由此得到

$$f''(x)\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}f''(x)$$

注意到 $f''(x)\neq 0$，于是我们有

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

四、(本题 8 分) 设函数 $z(x,y)$ 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\sin y + \dfrac{1}{1-xy} \\ z(1,y) = \sin y \end{cases}$，试求函数 $z(x,y)$。

解：先在方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\sin y + \dfrac{1}{1-xy}$ 中将 y 看成常数，然后两边对 x 求积分，得到

$$z(x,y) = -x\sin y - \frac{1}{y}\ln|1-xy| + \varphi(y)$$

其中 $\varphi(y)$ 是待定函数。

其次，根据上面 $z(x,y)$ 的表达式以及条件 $z(1,y) = \sin y$ 得到

$$-\sin y - \frac{1}{y}\ln|1-y| + \varphi(y) = \sin y$$

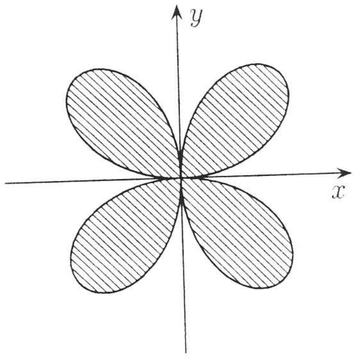
因而有

$$\varphi(y) = 2\sin y + \frac{1}{y}\ln|1-y|$$

于是得到

$$z(x,y) = (2-x)\sin y - \frac{1}{y}\ln\left|\frac{1-y}{1-xy}\right|$$

五、(本题 12 分) 计算二重积分 $\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $r=\sin 2\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 所围成的区域(下图阴影部分)。



解：根据对称性，显然有

$$\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D_1 是区域 D 位于第一象限的部分，即 D_1 是由曲线

$$r=\sin 2\theta,\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

围成的区域。于是，利用极坐标变换可得

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_1} r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin 2\theta} r^3\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^5 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{\pi}\sin^5 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^5 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1} = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

从而有

$$\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{15}$$

六、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)=f(1-x)$，求 $f(x)$。

解：对方程 $f'(x)=f(1-x)$ 两边求导得微分方程

$$f''(x)+f(x)=0$$

此方程的通解为

$$f(x)=a\cos x+b\sin x$$

其中 a, b 为任意常数。由此得到

$$f'(x)=-a\sin x+b\cos x$$

注意到 $f'(1)=f(0)$ 可得

$$a=-a\sin 1+b\cos 1 \implies b=\frac{a(1+\sin 1)}{\cos 1}$$

从而有

$$f(x)=a\left(\cos x+\frac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right)$$

其中 a 为任意常数。

七、(本题 12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}x^n$ 的收敛域。

解：显然该幂级数的收敛半径大于0，不妨设其和函数为 $S(x)$。在其收敛区间内求二阶导数得到

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}$$

易知，当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}x^{n-2}$ 绝对收敛，而

$$\left|\frac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}\right|\leqslant|x|^{n-2}$$

故当 $|x|<1$ 时幂级数 $S''(x)$ 也绝对收敛。注意到极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)\sin n}{n}$$

不存在，所以级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n-1)\sin n}{n}$$

发散，即当 $x=1$ 时幂级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n-1)\sin n}{n}x^{n-2}$$

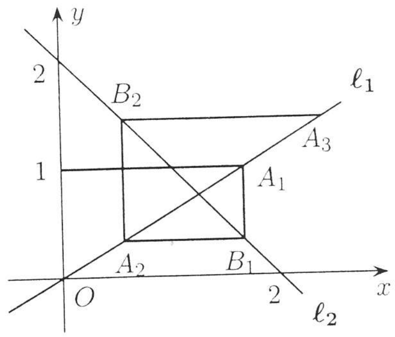
是发散的。于是，由 **Abel** 定理可知，当 $|x|>1$ 时 $S''(x)$ 是发散的，因此 $S''(x)$ 的收敛半径 $R=1$。由于 $S(x)$ 可看成是幂级数 $S''(x)$ 经过两次逐项积分得到的，故 $S(x)$ 的收敛半径 R 也是1。注意到级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}(\pm1)^n$$

也绝对收敛，由此得到 $S(x)$ 的收敛域为 $[-1,1]$。

八、(本题 12 分) 已知两条直线 ℓ_1 : $y=px\,(p\neq 0)$ 和 ℓ_2 : $y=-x+2$。过点 $(0,1)$ 作平行于 x 轴的直线，交直线 ℓ_1 于点 A_1；过点 A_1 作平行于 y 轴的直线，交直线 ℓ_2 于点 B_1；过点 B_1 作平行于 x 轴的直线，交直线 ℓ_1 于点 A_2；过点 A_2 作平行于 y 轴的直线，交直线 ℓ_2 于点 B_2；以此类推，得到点列 $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_n, B_n, \cdots$。试问 p 应满足什么条件时，点 A_n 的横坐标 a_n 构成的序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 有极限，并求此极限。

解：设点 A_n 的坐标为 (a_n, b_n)，因线段 $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$ 平行于 y 轴，所以点 B_{n-1} 的坐标为 $(a_{n-1}, 2-a_{n-1})$；又因线段 $\overline{A_nB_{n-1}}$ 平行于 x 轴，所以点 A_n 的坐标为 $\left(\dfrac{2-a_{n-1}}{p}, 2-a_{n-1}\right)$。由此得到



$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2-a_{n-1}}{p} = \frac{2}{p} - \frac{a_{n-1}}{p} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{a_{n-2}}{p^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^2}\left(\frac{2}{p} - \frac{a_{n-3}}{p}\right) = \cdots\cdots \\
&= 2\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{p^{n-1}}\right] + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{p^{n-1}}
\end{aligned}
$$

而由 $A_1\left(\dfrac{1}{p}, 1\right)$ 知 $a_1 = \dfrac{1}{p}$，所以

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{p^{n-1}}\right] + (-1)^{n-1}\frac{1}{p^n} \\
&= \frac{2}{p}\cdot\frac{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}}{1+\dfrac{1}{p}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{p^n}
\end{aligned}
$$

由上式可得，当 $-1 < -\dfrac{1}{p} < 1$ 即 $p < -1$ 或 $p > 1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2}{p}\cdot\frac{1-\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}}{1+\dfrac{1}{p}} + (-1)^{n-1}\frac{1}{p^n}\right] \\
&= \frac{2}{1+p}
\end{aligned}
$$

又当 $p=1$ 时，点列 $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_n, B_n, \cdots$ 与两直线 ℓ_1 和 ℓ_2 的交点 $(1,1)$ 重合，此时有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$。于是得到当 $p < -1$ 或 $p \geqslant 1$ 时，点 A_n 的横坐标 a_n 构成的序列 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 有极限，其极限值为 $\dfrac{2}{1+p}$。