2016年非数学决赛题参考答案

一、填空题(本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

（1）微分方程 $y''-(y')^3=0$ 的通解为____________________.

解：令 $p=y'$，则 $y''=p'=p^3$，于是 $\dfrac{dp}{p^3}=dx$，积分，有 $-\dfrac{1}{2}p^{-2}=x-c_1$，

即 $p=y'=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2(c_1-x)}}$，积分得 $\underline{y=c_2\pm\sqrt{2(c_1-x)}}$.

（完全正确，给 6 分；缺正负号的，扣一分；填错不给分。）

（2）设 $D:1\le x^2+y^2\le 4$. 则积分 $I=\iint_D (x+y^2)e^{-(x^2+y^2-4)}dxdy$ 的值是__________.

解：利用对称性和极坐标，

$$I=4e^4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_1^2 r^2\sin^2\theta e^{-r^2}rdr$$

$$=\frac{\pi}{2}e^4\int_1^4 ue^{-u}du=-\frac{\pi}{2}e^4(u+1)e^{-u}\Big|_1^4=\underline{\frac{\pi}{2}(2e^3-5)}$$

（完全正确，给 6 分；填错不给分。）

（3）设 $f(t)$ 二阶连续可导，且 $f(t)\ne 0$. 若 $\begin{cases} x=\int_0^t f(s)ds, \\ y=f(t), \end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ =__________.

解：$dx=f(t)dt, dy=f'(t)dt$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)\frac{dt}{dx}=\underline{\frac{f(t)f''(t)-f'(t)^2}{f^3(t)}}.$$

（完全正确，给 6 分；填错不给分。）

（4）设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，$f(x)$ 为多项式，则矩阵 $f(A)$ 的行列式的值为________.

解：$\underline{|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)}$.

（完全正确，给 6 分；填错不给分。）

（5）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin(\pi n!e)\right]$ 的值是__________.

解：因为

$$\pi n!e=\pi n!\left[2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right]=\pi a_n+\frac{\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

其中 a_n 是整数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!e)]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})\right)\right]\underline{=\pi}$.

（完全正确，给 6 分；填错不给分。）

二 (本题满分 14 分) 设 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数，

证明：曲面 $f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 的所有切平面都交于点 (a,b,c).

证：记 $F(x,y,z)=f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})$，则

$$(F_x,F_y,F_z)=(\frac{f_1}{z-c},\frac{f_2}{z-c},\frac{-(x-a)f_1-(y-b)f_2}{(z-c)^2})$$ -------------6 分

取曲面的法向量 $\mathbf{n}=((z-c)f_1,(z-c)f_2,-(x-a)f_1-(y-b)f_2)$.

记 (x,y,z) 为曲面上的点，(X,Y,Z) 为切平面上的点，则曲面上过点 (x,y,z) 的切平面方程为

$$[(z-c)f_1](X-x)+[(z-c)f_2](Y-y)-[(x-a)f_1+(y-b)f_2](Z-z)=0.$$ -----12 分

容易验证，对于任意 (x,y,z)（$z\neq c$），$(X,Y,Z)=(a,b,c)$ 都满足切平面方程.结论得证.

---14 分

三（本题满分 14 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

证明：$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)dt\right)dx=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$

证明：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.令

$$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\text{-}$$

则 $F'(x)=-f(x)$. ---------------------------------5 分

由此

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)dt\right]dx = 2\int_a^b f(x)F(x)dx$$

$$= -2\int_a^b F'(x)F(x)dx = -2\int_a^b F(x)dF(x)$$

$$= -F^2(x)\Big|_a^b = F^2(a) - F^2(b) = F^2(a)$$

$$= \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2$$

--14 分

四 (本题满分 14 分)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，C 是 $p\times q$ 矩阵，证明：$R(AB)+R(BC)-R(B)\le R(ABC)$，其中 $R(X)$ 表示矩阵 X 的秩.

证. 我们要证明

$$R(AB)+R(BC)\le R(B)+R(ABC)=R\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}$$ -----------3 分

由于

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_q & O \\ -C & E_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix},$$ ------------7 分

$$\begin{pmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -E_q \\ E_p & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix},$$ -----------10 分

且 $\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E_q & O \\ -C & E_p \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} O & -E_q \\ E_p & O \end{pmatrix}$可逆,

所以

$$R\begin{pmatrix} ABC & O \\ O & B \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}\ge R(AB)+R(BC)$$

----------------------14 分

五 (本题满分 14 分) 设 $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n xdx$,其中 n 为正整数

(1) 若 $n\ge 2$，计算：I_n+I_{n-2}；

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解：(1) $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}xd(\tan x)$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}$$ ----------------------6 分

（2）由于$0<x<\frac{\pi}{4}$，所以$0<\tan x<1$，$\tan^{n+2}x<\tan^{n}x<\tan^{n-2}x$.

从而$I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$，于是$I_{n+2}+I_n<2I_n<I_{n-2}+I_n$.

故$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$，$\left[\frac{1}{2(n+1)}\right]^p<I_n^p<\left[\frac{1}{2(n-1)}\right]^p$. ----------------8 分

当$p>1$时，$|(-1)^n I_n^p|\le I_n^p<\dfrac{1}{2^p(n-1)^p},(n\ge 2)$

由$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^p}$收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$绝对收敛. -------------10 分

当$0<p\le 1$时，由于$\{I_n^p\}$单调减少，并趋于 0，由 Leibniz 判别法，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$收敛.

而$I_n^p>\dfrac{1}{2^p(n+1)^p}\ge\dfrac{1}{2^p}\cdot\dfrac{1}{n+1}$，$\dfrac{1}{2^p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$发散，所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$是条件收敛的.

当$p\le 0$时，由于$|I_n^p|\ge 1$由级数收敛的必要条件，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$发散. -----14 分

六（本题满分 14 分）

设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数．记上半球面 S： $z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$ ，方向向上．若对任何点(x_0,y_0,z_0)和 $r>0$，第二型曲面积分

$$\iint_S P dydz+R dxdy=0.$$

证明：$\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$.

证明： 记上半球面S的底平面为D，方向向下，S和D围成的区域为Ω．由 Gauss 公式，

$$\left(\iint_S+\iint_D\right)P dydz+R dxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$ ------------4 分

由于$\iint_D P dydz+R dxdy=-\iint_D R d\sigma$和题设条件，其中$d\sigma$是$xy$平面上面积微元，我们得到

（*） $$-\iint_D R d\sigma=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

注意到上式对任何 $r>0$ 成立，我们由此证明 $R(x_0,y_0,z_0)=0$.

若不然，设 $R(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

注意到 $\iint\limits_D Rd\sigma = R(\xi,\varsigma,z_0)\pi r^2$，这里 $(\xi,\varsigma,z_0)\in D$. 而当 $r\to 0^+$，

$R(\xi,\varsigma,z_0)\to R(x_0,y_0,z_0)$，故 $(*)$ 左端为一个二阶的无穷小.

类似地，当 $\dfrac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\neq 0$，$\iiint\limits_\Omega\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dv$ 是一个 3 阶无穷小；

而当 $\dfrac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0$ ，该积分趋于零的阶高于 3. 故 $(*)$ 右端阶高于左端. 从而当 r 很小是，

$$\left|\iint\limits_D Rd\sigma\right| > \left|\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv\right|,$$

这与 $(*)$ 矛盾.

----------------------10 分

由于在任何点 $R(x_0,y_0,z_0)=0$，故 $R(x,y,z)\equiv 0$. 代入 $(*)$ 式得到

$$\iiint\limits_\Omega \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dv = 0.$$

重复前面的证明得知 $\dfrac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}=0$. 由 (x_0,y_0,z_0) 的任意性得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$.

-------14 分