第五届广东省大学生数学竞赛试卷（高职高专类）

参 考 答 案

一、1. B　　2. A　　3. C　　4. C　　5. C

二、1. e^{-1}　　2. $f'(x_0)$　　3. 1　　4. -1　　5. $\frac{1}{\alpha}F\left(x^{\alpha}\right)+C$

三、解：　由于$x\to 0$时，$\sqrt{1+2x}-1\sim x,\ \tan x\sim x,$

……………(4 分)

故$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

……………(8 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}=1.$$

……………(10 分)

四、解：　由于$g(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[f(x+\frac{\pi}{t})-f(x)\right]=\pi xf'(x)$，

……………(7 分)

又$f(x)$具有二阶导数，故$g(x)$可导且

$$g'(x)=\pi[f'(x)+xf''(x)]$$

……………(3分)

五、解：　因为　$\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}x|\sin x|dx$

……………(4 分)

令　$x=k\pi-t$，得

……………(6 分)

学校________ 院系________ 姓名________ 准考证号________

装------订------线------内------请------勿------答------题

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}(k\pi - t)|\sin(k\pi - t)|\,dt$$
$$= \int_0^{\pi}(k\pi - t)\sin t\,dt$$
$$= \int_0^{\pi} k\pi \sin t\,dt - \int_0^{\pi} t\,\sin t\,dt$$
$$= 2k\pi - \pi$$

……………(8 分)

所以 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx = \sum_{k=1}^{n}(2k\pi - \pi) = n^2\pi$

……………(10 分)

六、 解：$x_1 = 1 < 3$，假设 $x_n < 3$，则 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} < \sqrt{2\times 3 + 3} = 3$.

……………(3 分)

另外，$x_n - x_{n-1} = \sqrt{2x_{n-1}+3} - x_{n-1} = \dfrac{2x_{n-1}+3-x^2_{n-1}}{\sqrt{2x_{n-1}+3}+x_{n-1}} = -\dfrac{(x_{n-1}+1)(x_{n-1}-3)}{\sqrt{2x_{n-1}+3}+x_{n-1}} > 0$

即 $x_n > x_{n-1}$. ……………(5 分)

因此数列单调递增有上界，由单调有界原理可知极限存在，

……………(7 分)

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，对 $x_n = \sqrt{2x_{n-1}+3}$ 两边取极限得 $a = \sqrt{2a+3}$, $a = 3, a = -1$(舍)，

所以 $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$.

……………(10 分)

七、解：由对称性只须考虑以直角三角形绕一直角边转形成的旋转体的体积最大.

……………(2 分)

设三角形的腰长为 a，边长为 $2b$，则直角三角形的斜边为 a，一直角边为 b，

则 $a + b = l$，旋转体体积为 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 b$，其中 $r^2 = a^2 - b^2$，则体积

$$V = \frac{1}{3}\pi(a^2 - b^2)b = \frac{1}{3}\pi(l^2 - 2bl)b$$

……………(5 分)

由 $V'(b) = \frac{1}{3}\pi(l^2 - 4bl) = 0$，得 $b = \frac{1}{4}l$ ，此时又 $V''(b) < 0$ ， $a = \frac{3}{4}l$,

故当 $a = \frac{3}{4}l,\ b = \frac{1}{4}l$ 时所得旋转体体积最大.

……………(10 分)

八、证明 令$F(x)=f(x)e^{g(x)}$，　　……………(4 分)

根据已知有 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，则至少$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=e^{g(\xi)}[f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)]=0.$$

……………(8 分)

而$e^{g(\xi)}\neq 0$，故有$f(\xi)g'(\xi)+f'(\xi)=0$成立.

所以方程$f(x)g'(x)+f'(x)=0$在(a,b)内至少有一个根.

……………(10 分)

九、证明 因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以$F(x)$可导，并且

$$F'(x)=\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x f^3(t)dt\right)'=\frac{(x-a)f^3(x)-\int_a^x f^3(t)dt}{(x-a)^2}$$

……………(3 分)

由中值定理，$\exists\xi\in(a,x)$使得$\int_a^x f^3(t)dt=f^3(\xi)(x-a)$.

……………(6 分)

由于$f(x)$是$[a,b]$上的单调增加函数，容易证明$f^3(x)$也是$[a,b]$上的单调增加函数，　……………(8 分)

因此$f^3(x)\geq f^3(\xi)$ $(\xi\in(a,x))$，于是$F'(x)\geq 0$.所以$F(x)$也是$[a,b]$上单调增加函数.　……………(10 分)