第八届全国大学生数学竞赛决赛试题参考答案

（非数学类，2017 年）

一、填空题

1.过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为______________.

答案：$y-3z=0$.

2. 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=\mathrm{e}^{\cot y}$，则 $f(x,y)=$______________.

答案：$f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

3.已知 A 为 n 阶可逆反对称矩阵，b 为 n 元列向量，设 $B=\begin{pmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{pmatrix}$，则 $\operatorname{rank}(B)=$______.

答案：n.

4. $\sum\limits_{n=1}^{100}n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分为________.

答案：18.

5. 曲线 $L_1:y=\dfrac{1}{3}x^3+2x(0\le x\le 1)$ 绕直线 $L_2:y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积为______________.

答案：$\dfrac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi$.

二、设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$.

证 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{2\cos x}{\sin^3 x}=\frac{2(x^3\cos x-\sin^3 x)}{x^3\sin^3 x},\qquad (1)\qquad \text{-------------------(3 分)}$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}-x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{\cos^{4/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-2/3}x\sin^2 x}{\cos^{2/3}x}-1=\frac{2}{3}\cos^{2/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-4/3}x-1 \qquad \text{------------------(6 分)}$$

由均值不等式，得

$$\frac{2}{3}\cos^{2/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-4/3}x=\frac{1}{3}(\cos^{2/3}x+\cos^{2/3}x+\cos^{-4/3}x)>\sqrt[3]{\cos^{2/3}x\cdot\cos^{2/3}x\cdot\cos^{-4/3}x}=1,$$

所以当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$，从而 $\varphi(x)$ 单调递增，又 $\varphi(0)=0$，因此 $\varphi(x)>0$，即

$$x^3\cos x-\sin^3 x<0.$$

由（1）式得 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减. ---------------------- (10 分)

由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x\tan^2 x}\right)=2\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{2}{3},$$

所以 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有

$$\frac{4}{\pi^2}<\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{2}{3}. \qquad \text{---------------------- (14 分)}$$

三、设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数，且满足 $0\le f(x)\le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

证明：当 $0\le x\le 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}}f(t)\mathrm{d}t\le 11,$$

并给出取等号的条件.

证 由条件 $0\le f(x)\le 1$，有

$$\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}}f(t)\mathrm{d}t\le\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x} \qquad \text{--------------- (3 分)}$$

利用离散柯西不等式，即：$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^n a_i^2.\sum_{i=1}^n b_i^2$，等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立.

有

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}$$

$$\le\sqrt{1+2+\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}(x+27)+\frac{3}{2}(13-x)}=11. \qquad \text{---------------------- (8 分)}$$

且等号成立的充分必要条件是:

$$\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{13-x}=\frac{1}{2}\sqrt{x+27}\text{，即 } x=9. \qquad \text{--------------------- (10 分)}$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}}f(t)\mathrm{d}t\le 11.$$

特别当 $x=9$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{3}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{6}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{2}f(t)\mathrm{d}t$$

根据周期性，以及 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，有

$$\int_0^{3}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{6}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{2}f(t)\mathrm{d}t=11\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=11, \qquad \text{------------------ (14 分)}$$

所以取等号的充分必要条件是 $x=9$.

四、设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 记球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 外侧的单位法向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \qquad \text{--------------- (2 分)}$$

考虑曲面积分等式:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S. \qquad (1) \qquad \text{--------------- (5 分)}$$

对两边都利用高斯公式，得

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v \qquad (2)$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}v \qquad (3) \text{ ------ (10 分)}$$

将（2）、（3）代入（1）并整理得

$$I=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left(1-(x^2+y^2+z^2)\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\int_0^1(1-\rho^2)\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}. \qquad \text{---------------- (14 分)}$$

五、设n阶方阵A,B满足$AB=A+B$，证明：若存在正整数k，使$A^k=O$（O为零矩阵），则行列式$|B+2017A|=|B|$.

证　由$AB=A+B\Rightarrow(A-E)(B-E)=E$，则$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

化简可得到

$$AB=BA \qquad \text{---------------- (4 分)}$$

（I）若B可逆，则由$AB=BA$得$B^{-1}A=AB^{-1}$，从而$\left(B^{-1}A\right)^k=\left(B^{-1}\right)^kA^k=O$，所以$B^{-1}A$的特征值全为 0，则$E+2017B^{-1}A$的特征值全为 1，因此

$$\left|E+2017B^{-1}A\right|=1$$

$$|B+2017A|=|B|\left|E+2017B^{-1}A\right|=|B|. \qquad \text{----------------- (10 分)}$$

（II）若B不可逆，则存在无穷多个数t，使$B_t=tE+B$可逆，且有$AB_t=B_tA$. 利用（I）的结论，有恒等式

$$|B_t+2017A|=|B_t|.$$

取$t=0$，得

$$|B+2017A|=|B|. \qquad \text{------------------ (14 分)}$$

六、设$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

（1）证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在；

（2）记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$的敛散性.

解　（1）利用不等式：当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，有

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\le\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}=0, \qquad \text{-------------- (2 分)}$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)\right]\geq 1+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right]=\frac{1}{n}>0,$$

所以$\{a_n\}$单调减少有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在. ------------------- (5 分)

（2）显然，以a_n为部分和的级数为$1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln n+\ln(n-1)\right)$，则该级数收敛于$C$，且$a_n-C>0$. 用$r_n$记该级数的余项，则

$$a_n-C=-r_n=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln k+\ln(k-1)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{k}\right).$$

根据泰勒公式，当$x>0$时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$，所以

$$a_n-C>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right).$$ ------------------- (10 分)

记$b_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2(k-1)^2}-\frac{1}{k}\right)$，下面证明正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散. 因为

$$c_n\triangleq n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2(k-1)(k-2)}\right)<nb_n<n\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)=\frac{1}{2},$$

而当$n\to\infty$时，$c_n=\frac{n-2}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=\frac{1}{2}$. 根据比较判别法可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散.

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$发散. ------------------- (14 分)