第一讲 O.Stolz 公式

一、序列的情况：

定理 1（$\frac{\infty}{\infty}$）设数列 x_n 严格单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}\quad 则\ \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

定理 2（$\frac{0}{0}$）设数列 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，且 x_n 严格单调递减. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}\quad 则\ \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$$

例 1：

（首都师范大学）设 $\{a_n\}$ 是一数列，试证：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=A$（有限），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

证 由于

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

例 2：求极限 $x_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k$.

解：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{C_{n+1}^k}{C_n^k}-\ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\frac{n+1}{n})^n}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 3：

（上海交大 2004）设 $a_1>0,\ a_{n+1}=a_n+a_n^{-1}, n\ge 1$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

提示：只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=1$，由 O.Stolz 定理知只需证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)=2$，

从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，故，

$$a^2{}_{n+1}-a^2{}_n=\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}+a_n\right)=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_n}=1+\frac{a_{n+1}}{a_n}=2+\frac{1}{a^2{}_n}\to 2.$$

例 4：

（北师大 1996） 设 $x_1\in(0,1)$， $x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,\cdots$. 证明： $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$.

证 由 $x_1\in(0,1)$ 易证 $x_n\in(0,1)$，于是由递推公式得：

$$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1,\quad n=1,2,\cdots.$$

此表明数列 $\{x_n\}$ 严减且有下界，从而极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，在递推公式两边取极限得

$$x=x(1-x),$$

解之得 $x=0, x=1$（由单减性舍去），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

令 $b_n=\dfrac{1}{x_n}$，则 $b_n\to+\infty(n\to\infty)$，且 $b_n<b_{n+1}, n=1,2,\cdots$.由 Stolz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1.$$

二、函数极限的情况：

定理 3（$\dfrac{\infty}{\infty}$） 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，且存在正数 T，满足：

（1） $g(x+T)>g(x), \forall x\geq a$；

（2） $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内闭有界，且 $g(x)\to+\infty(x\to+\infty)$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}a,\\+\infty,\\-\infty.\end{cases}$

定理 4（$\dfrac{0}{0}$） 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，且存在正数 T，满足：

（1） $0<g(x+T)<g(x), \forall x\geq a$；

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)} = \begin{cases} a, \\ +\infty, \\ -\infty, \end{cases}$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} a, \\ +\infty, \\ -\infty. \end{cases}$

例 1：

（柯西定理） 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 有定义，且内闭有界，则

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$；

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \ge c > 0)$.

证 （1）由定理 3 立明.

（2）记 $y=[f(x)]^{\frac{1}{x}}$，则 $\ln y = \dfrac{\ln f(x)}{x}$，于是

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}[\ln f(x+1) - \ln f(x)] = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

由此立得所要证结论.

例 2：

函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，内闭有界，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = l$,（$l$ 为有限数

或 $+\infty$ 或 $-\infty$ ），$n \in Z^+$. 试证明：

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

证 由 Stolz 定理，有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \cdots + 1} = \frac{l}{n+1}.$$

例 3：

设 $x_1 = \sin x > 0,\ x_{n+1} = \sin x_n,\ n = 1, 2, \cdots$. 证 明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{3}}\, x_n = 1$.

证 取定 x 后，则数列 $\{x_n\}$ 是单减有下界，且极限为 0，于是由 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{t\to0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to0} \frac{t^2 \sin^2 t}{t^2 - \sin^2 t} = 3.$$

补充：用定义证明问题，

例 1：

（哈尔滨工业大学 2002，武汉大学 2001）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$.

证 当 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，由极限定义知：$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n| < \varepsilon^3,$$

从而当 $n>N$ 时有

$$\left|\sqrt[3]{x_n}\right| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n} = 0$．当 $a\neq 0$ 时，由于

$$(\sqrt[3]{x_n})^2 + \sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 = (\sqrt[3]{x_n} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{a})^2 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2 \geq \frac{3}{4}(\sqrt[3]{a})^2 > 0,$$

所以，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{(\sqrt[3]{x_n})^2 + \sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2} \leq \frac{4}{3(\sqrt[3]{a})^2}|x_n - a| < \frac{4}{3(\sqrt[3]{a})^2}\varepsilon,$$

由极限定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$.

例 2：

(四川大学，国防科技大学)　设实数列 $\{x_n\}$ 满足条件：$x_n - x_{n-2} \to 0\,(n\to\infty)$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证 由 $x_n - x_{n-2} \to 0\,(n\to\infty)$ 得：$\forall\varepsilon>0, \exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时，有

$$|x_n - x_{n-2}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

记 $y_n = |x_n - x_{n-1}|$，则 $|y_n - y_{n-1}| \leq |x_n - x_{n-2}|$，从而有

$$\begin{aligned}\frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} = \frac{y_n}{n} &\leq \frac{|y_n - y_{n-1}| + |y_{n-1} - y_{n-2}| + \cdots + |y_{N_1+1} - y_{N_1}|}{n} + \frac{y_{N_1}}{n} \\ &\leq \frac{|x_n - x_{n-2}| + |x_{n-1} - x_{n-3}| + \cdots + |x_{N_1+1} - x_{N_1-1}|}{n} + \frac{y_{N_1}}{n}.\end{aligned}$$

注意到 y_{N_1} 是常数，因此 $\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有 $\dfrac{y_{N_1}}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\frac{|x_n - x_{n-2}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

第二讲 极限若干问题

通常根据所求极限式的特征，估计其上下界，然后用数学归纳法等方法证明其单调性和有界性，并注意上下界在证明单调性中的应用，最后往往通过方程求解极限值，注意根的取舍.

一、数列极限

1、 利用单调有界数列必有极限准则

例 1：

设 $f \in C[1,+\infty)$，f 单调递减，$f \geq 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$，求证：$\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

[分析]

1) $S_n - S_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) > \int_n^{n+1} f(n+1)dx - f(n+1) = 0$，故

{ S_n }单调下降。

2）

$$S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx \geq 0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

例 2：

设 $a > 0$，$x_1 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), n = 1, 2, \cdots$.试证明：

（1）极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求之；

（2）级数 $\sum(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1)$ 收敛.

证 （1）$x_{n+1} \geq \sqrt{a}, n = 1, 2, \cdots$.即数列有下界. 又因为

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0, \quad n \geq 2,$$

即数列是单减的，由单调有界定理知其极限存在.

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$，由极限的保序性知 $\alpha \geq \sqrt{a}$. 在递推公式两边取极限得

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{a}{\alpha}),$$

解得 $\alpha = \sqrt{a}$($\alpha = -\sqrt{a}$ 舍去)，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

（2）由（1）知此是正项级数，且$x_n \ge \sqrt{a}$，于是

$$0 \le \frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 = \frac{1}{x_{n+1}}(x_n - x_{n+1}) \le \frac{1}{\sqrt{a}}(x_n - x_{n+1}),$$

由此得

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{x_k}{x_{k+1}} - 1) \le \frac{1}{\sqrt{a}}(x_1 - x_{n+1}) \le \frac{1}{\sqrt{a}}x_1,$$

即部分和有界，故级数收敛.

例 3：

设$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$， 证明$\{a_n\}$收敛。

证明：显然$\{a_n\}$单调递增。设$b_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$，则$b_n$有上界2(可用归纳法证)。且$a_n \le 2b_n$，事实上，$2b_n = \sqrt{2^2+\sqrt{2^{2^2}+\cdots+\sqrt{2^{2^n}}}} \ge a_n$。故$\{a_n\}$有上界4。于是$\{a_n\}$收敛。

2、 利用放缩法

例 1：

计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + a^{2n}}$，其中$a$为常数。

解 令$b = a^2$，则$b \ge 0$，

若$0 \le b \le 2$，则$2 \le \sqrt[n]{2^n + b^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 2^n} \to 2$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + b^n} = 2$，

若$b > 2$，则$b \le \sqrt[n]{2^n + b^n} \le \sqrt[n]{2\cdot b^n} \to b$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + b^n} = b = a^2$，

因此，原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n + b^n} = \max\{2, a^2\}$

例 2：

已知$f(x) \ge 0, f$在$[a,b]$上连续，求证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx} = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}。$$

证：设$M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$，则

$$\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx} \le \sqrt[n]{\int_a^b M^n dx} = M(b-a)^{\frac{1}{n}} \to M。$$

另一方面，根据闭区间上连续函数的性质，$\exists x_0 \in [a,b]$，使得

$f(x_0)=M$。于是$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$x\in[a,b]$时有

$$M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$$

于是，$\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$，有$M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$。而

$$\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}=\sqrt[n]{\int_a^\alpha f^n(x)dx+\int_\alpha^\beta f^n(x)dx+\int_\beta^b f^n(x)dx}$$

$$\geq\sqrt[n]{\int_\alpha^\beta f^n(x)dx}\geq\sqrt[n]{\int_\alpha^\beta (M-\varepsilon)^n dx}=(M-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}\to M$$。

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$$。

推广： 设$f(x),g(x)\in C_{[a,b]}$，$f(x)\geq 0,g(x)\geq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)g(x)dx}=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$$。

二、函数极限

1、 利用等价代换

当$x\to 0$时，(1) $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim arx\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim$

$\dfrac{(1+x)^b-1}{b}$　　(2) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$。

例 1：

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$。

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x+\sin x}{2}\sin\frac{x-\sin x}{2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\frac{x+\sin x}{2}\cdot\frac{x-\sin x}{2}}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{\sin x}{x})(\dfrac{x-\sin x}{x^3})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\cdot 3x^2}=\dfrac{1}{6}$。

例 2：

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)(\sqrt{1+x}-1)}$。

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}}=1$

例 3：

计算：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t dt - x - \dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t dt - x - \dfrac{x^2}{2}}{(x\cos x-\sin x)\dfrac{x}{2}}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{x^4}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x\cos x-\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{4x^3}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-x\sin x}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x^3}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-1}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-1}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$。

例 4：

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^3(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$.

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{3}$$

2、 利用定积分

例 1：

设 $f\in C[0,1]$，$f(x)>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)}$。

解 令 $S_n=\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)}$，则

$$\ln S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})\to\int_0^1\ln f(x)dx$$ 。故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$$ 。

例 2. 设 $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，求 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 。

解 $\{S_{2n}\}$ 单调递增有上界。

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$=\frac{1}{n}(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{2n})\to\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$，而 $S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$，故 $S_{2n+1}=\ln 2$ 。于是 $\lim_{n\to\infty}S_n=\ln 2$ 。

例 3：

求极限 $x_n=\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$；（清华大学 2000，华东理工 2002）。

提示：$x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p\to\int_0^1x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}\ (n\to\infty)$.

例 4：

求极限 $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$；

提示：$x_n=\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})\to\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2\ (n\to\infty)$.

例 5：求极限

$x_n=\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$；（华中师大 2002，北京工业大学）

两边取对数得

提示：$$\ln x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})\to\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1,$$

所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{4}{\mathrm{e}}$.

3、 利用中值定理

例 1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$。

解　由积分第一中值定理知 $\exists\xi\in(n,n+p)$，有

$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p$，故原式$=\lim\limits_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p=0$。

例 2　设 $P>0$ 是常数，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=0$。

解 由积分第一中值定理知 $\exists\xi\in(n,n+p)$，有

$$\int_n^{n+p}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot P$$

故原式 $=\lim\limits_{\xi\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot P=0$。

例 3：

求下列极限：

（1）$x_n=n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$；　　（2）$x_n=\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}$.

解（1）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1})\cdot\frac{1}{1+\xi^2}=a$，

其中 ξ 介于 $\frac{a}{n}$ 和 $\frac{a}{n+1}$ 之间.

（2）原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(-\sin\xi)=0$，

其中 $\xi\in(\sqrt{n},\sqrt{n+1})$.

例 4：

（武汉大学 2004）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

计算 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+5}t^2\varphi(t)\tan\frac{3}{t^2}dt$，其中 $\varphi(t)$ 连续，且 $\varphi(t)\to 2(t\to+\infty)$.

解 由积分中值定理：$\exists\xi\in(x,x+5)$，使得

$$I=\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+5}t^2\varphi(t)\tan\frac{3}{t^2}\mathrm{d}t=5\lim_{x\to\infty}\xi^2\varphi(\xi)\tan\frac{3}{\xi^2}=15\lim_{x\to\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{\tan\frac{3}{\xi^2}}{\frac{3}{\xi^2}}=15.$$

4、 其他

1、

利用 Stiring 公式

$$n! = \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 \le \theta_n \le 1 .$$

例 1：

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{e^{1-\frac{1}{i}}}{(1+\frac{1}{i})^i}$.

解 $$x_n = \sqrt{n} \frac{\exp(n-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}))}{(\frac{2}{1})(\frac{3}{2})^2(\frac{4}{3})^3\cdots(\frac{n+1}{n})^n} = \frac{\sqrt{n}\, n! \exp(n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}))}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\, n e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{(1+\frac{1}{n})^n e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}} \to \sqrt{2\pi} e^{-(1+c)} (n\to\infty) ,$$

其中 c 为欧拉常数.

2、对数指数求极限法

例 1：

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{2}{2^2-1})^{\frac{1}{2^{n-1}}} (\dfrac{2^2}{2^3-1})^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots (\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$.

解 记极限式为 x_n，两边取对数得

$$\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} (\ln \frac{2}{2^2-1} + 2 \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + 2^{n-2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1}) .$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1} \ln \frac{2^n}{2^{n+1}-1}}{2^n - 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2^n}{2^{n+1}-1} = -\ln 2 .$$

由 O.Stolz 公式得，

知，原式值为 1/2。

例 2：

（复旦大学 1997）计算 $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

解 由于

$$(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=[1+(x+e^x-1)]^{\frac{1}{x+e^x-1}\cdot\frac{2(x+e^x-1)}{x}},$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+e^x)=2$，所以，$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=e^4$.

例 3：

（浙江大学 2001）计算 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解 令 $y=(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$，则 $\ln y=\tan\dfrac{\pi x}{2}\ln(2-x)$，且

$$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi},$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

3、 等价无穷小量替换法

例 1：

（华中师大 20003）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{3^x-1}.$$

解 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1\sim\dfrac{1}{3}f(x)\sin x,\ 3^x-1\sim x\ln 3,$ 所以由 $f(x)$ 连续得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin x}-1}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{3x\ln 3}=\frac{f(0)}{3\ln 3}.$$

例 2：求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\sin\dfrac{3}{x}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}(1+\frac{x}{n})^n}\mathrm{d}x$.

解：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\sin\dfrac{3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}\ln(1+2^x)=3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2^x)}{x}=3\ln 2.$

（2）令 $y=\frac{1}{n}$, $f(x,y)=\frac{1}{e^{xy}(1+xy)^{1/y}}$，则 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，由含参量积分的性质得

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^1 \frac{1}{e^{xy}(1+xy)^{1/y}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{y\to 0+}\frac{1}{e^{xy}(1+xy)^{1/y}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{e^x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{e},$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}(1+\frac{x}{n})^n}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{e}.$

第三讲 函数相关问题

函数（大纲）

函数是数学分析中的基本概念，主要考察考生对函数的概念及性质的理解和掌握。包括函数的连续性。闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理、根的存在定理），并会应用这些性质。

1、 函数的连续性

例：构造 $[0,1]$ 上的函数，使其分别具有下列性质：

（1）处处不连续；（2）仅在点 $x=2^{-1}$ 处连续；

（3）在无理点连续，在有理点不连续；（4）在每一点的任何领域内均无界.

解（1）狄利克雷函数；

（2）$f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数}, \\ 1-x, & x\text{为无理数}. \end{cases}$ 或 $f(x)=(x-\frac{1}{2})D(x)$，其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数.

（3）黎曼函数；（浙江大学 2001）

（4）$f(x)=\begin{cases} 0, & x\text{为无理数}, \\ p+q, & x=p/q,(p,q)=1. \end{cases}$（上海师大）

2、 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有│f(x)│≤M 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们就称 f(x)在区间 I 有界，否则便称无界。

例：

（华中师范大学）设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上. 若 $\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda\in(0,1)$，都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

证明：$f(x)$ 在 I 的任何闭子区间上都有界.

证 $\forall [a,b]\subset I, \forall x\in(a,b)$，则存在 $\lambda\in(0,1)$，使

$$x=a+\lambda(b-a), \therefore x=\lambda b+(1-\lambda)a,$$

由（1）有

$$f(x)=f(\lambda b+(1-\lambda)a)\le \lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)\le \lambda M+(1-\lambda)M=M$$

其中 $M=\max\{f(a),f(b)\}$，

$\forall x\in[a,b]$，令 $y=(a+b)-x$，那么

$\frac{a+b}{2}=\frac{x+y}{2}$，

$f(\frac{a+b}{2})=f(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})\le\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)\le\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}M$

$\therefore f(x)\ge 2f(\frac{a+b}{2})-M=m_1$。

3、 函数的最值定理

例：

（哈工大 1999）设函数 $f(x)$ 在 R 上连续，若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处达到最小值，$f(a)<a$. 证明：$F(x)=f(f(x))$ 至少在两点达到最小值.

证 由 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$ 得：$\exists M>0(M>|a|)$，使得当 $|x|\ge M$ 时，有 $f(x)>a$. 在区间 $[-M,a]$ 与 $[a,M]$ 上，$f(a)<a<f(\pm M)$，由连续函数介值定理知，存在 $x_1\in[-M,a], x_2\in[a,M]$，使得

$$f(x_1)=f(x_2)=a.$$

从而 $\forall x\in R$，有 $F(x_1)=F(x_2)=f(a)\le f(f(x))=F(x)$，即 $F(x)$ 在 x_1,x_2 处达到最小值.

4、 函数的介值定理

定理：设函数 y=f(x)在闭区间[a,b]上连续，则在这区间必有最大最小函数值：f(min)=A,f(max)=B,且 A≠B 。那么，不论 C 是 A 与 B 之间的怎样一个数，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得 f(ξ)=C (a<ξ<b)。

例：

（华中科技大学）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证 $f(x)$在(a,b)内连续，则在$[x_1,x_n]$上连续，从而在$[x_1,x_n]$上存在最大最小值，记

$$m=\min_{x\in[x_1,x_2]} f(x),\quad M=\min_{x\in[x_1,x_2]} f(x),$$

则

$$m\le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M,$$

由连续函数介值定理知，$\exists\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得

$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

5、 根的存在定理

又称为零值点定理，即：

若函数 f(x)在闭区间[a,b]上连续，且：f(a)f(b)<0,那么在开区间(a,b)上，至少存在一点 x0,使得：f(x0)=0.

例：

（华中师大 2000，西安交大，北京交大，国防科技大学）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$. 又$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$. 证明：

（1）$F'(x)\ge 2$；

（2）$F(x)=0$在$[a,b]$内有且只有一个根.

证（1）由$f(x)>0$得

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2.$$

（2）由$f(x)>0$得

$$F(a)<0,\quad F(b)>0,$$

由连续函数介值定理知，存在$c\in(a,b)$，使得

$$F(c)=0,$$

又由（1）知$F(x)$在$[a,b]$上严格递增，所以使上式成立的c是唯一的.

第四讲 连续性

定理： 设$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，则

$\forall(\alpha,\beta)\subset[a,b](a\le\alpha<\beta\le b)$，$\exists x_0\in(\alpha,\beta)$使$f(x)$在$x=x_0$处连续。

例 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积，且$\int_a^b f(x)dx<0$。试证明：存在闭区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得当$x\in[\alpha,\beta]$时，$f(x)<0$。

[**分析**] 只需在$[a,b]$区间上找一个连续点x_0，使得$f(x_0)<0$。利用定积分的定义，分点取连续点（上述定理保证存在连续点）即可。

例 2 若$f(x)$可积，则$\int_a^b f^2(x)dx=0 \Leftrightarrow f(x)$在连续点处恒等于 0。

证 （**必要性**） 若$\exists x_0, f(x)$在x_0连续，但$f(x_0)\neq 0$

$\exists x_0\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$有$\forall x\in(\alpha,\beta), f(x)>0$，于是

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx>0\text{，矛盾。}$$

（**充分性**） $\int_a^b f^2(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\dfrac{b-a}{n}=0$（$\xi_i$取连续点）。

例 3 设$f(x)$连续，且当$x>-1$时，$f(x)[\int_0^x f(t)dt+1]=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，求$f(x)$。

解：令$g(x)=\int_0^x f(t)dt+1$，则$f(x)=g'(x)$。于是

$$g'(x)g(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}\text{，两边积分得}$$

$$\int g'(x)g(x)dx=\int\frac{xe^x}{2(1+x)^2}dx\text{，即}\int g(x)dg(x)=\int\frac{xe^x}{2(1+x)^2}dx$$

从而

$$\frac{g^2(x)}{2}=\int\frac{xe^x}{2(1+x)^2}dx\text{，即}g^2(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx\text{。}$$

$$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=\int xe^x d\frac{x}{1+x}=\frac{x^2e^x}{1+x}-\int\frac{x}{1+x}dxe^x=\frac{x^2e^x}{1+x}-\int xe^x dx$$

$$=\frac{x^2e^x}{1+x}-(x-1)e^x+C=\frac{e^x}{x+1}+C\text{，又}g(0)=1\text{，故}C=0\text{。}$$

于是$g(x)=\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}}$。所以

$$f(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2\sqrt{\dfrac{e^x}{x+1}}}\text{。}$$

例 4：

证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义并且是连续的，而且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是一致连续的。

证 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，故 $\exists X>a$，使得当 $x'>X,x''>X$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，故一致连续，从而必有正数 δ' 存在，使得当 $x',x''\in[a,X+1],|x'-x''|<\delta'$ 时，恒有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，令 $\delta=\min\{\delta',1\}$。$\forall x',x''\in[a,+\infty),|x'-x''|<\delta$，则 x' 与 x'' 同时属于 $[a,X+1]$ 或同时满足 $x'>X,x''>X$。因此有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。故 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是一致连续的。

例 5：

设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，f 单调，有 $x_n\in[a,b]$ 使得 $g(x_n)=f(x_{n+1})(n=1,2,\cdots)$。证明：$\exists x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$。

证 不妨设 $f(x)$ 单调递增。

(1) 由题设易知 $\forall k\in\mathbb{Z}^+$，$x_k\neq x_{k+1}$（否则取 $x_0=x_k$ 即可）；

(2) 若 $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ 或 $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$，则根据单调有界原理知 $x_n\to x_0$，x_0 即为所求。

(3) 现设 $x_{k_0}<x_{k_0+1}$，$x_{k_0+1}>x_{k_0+2}$。令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则有

$$h(x_{k_0})=f(x_{k_0})-g(x_{k_0})=f(x_{k_0})-f(x_{k_0+1})<0,$$

$$h(x_{k_0+1})=f(x_{k_0+1})-g(x_{k_0+1})=f(x_{k_0+1})-f(x_{k_0+2})>0$$

在 (x_{k_0},x_{k_0+1}) 上利用连续函数的介值性定理知，$\exists x_0\in(x_{k_0},x_{k_0+1})$，使得 $h(x_0)=0$，即 $f(x_0)=g(x_0)$。

第五讲 导数

例 1：

（武汉大学）设有界函数 $f(x)$ 实数集 R 上二次可微. 证明：$\exists x_0\in R$，使得

$$f''(x_0)=0.$$

证明：若 $f''(x)$ 在 R 上变号，由导函数的介值定理知 $\exists x_0\in R$，使得 $f''(x_0)=0$. 若

$f''(x)$在 R 上不变号，不妨设 $f''(x)>0$，此表明 $f'(x)$ 严增，因此存在 $c\in R,\ f'(c)\neq 0$. 由泰勒定理得

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2,$$

其中 ξ 介于 x 与 c 之间. 由 $f''(x)>0$ 知 $f''(\xi)>0$. 于是，若 $f'(c)>0$，令 $x\to+\infty$ 得 $f(x)\to+\infty$，若 $f'(c)<0$，令 $x\to-\infty$ 得 $f(x)\to+\infty$，这与 $f(x)$ 有界矛盾，故 $f''(x)$ 在 R 上变号，从而结论成立.

例 2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，$x_0\in(a,b), f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

（1）$a<a_n<x_0<b_n<b$；

（2）$a_n\to x_0, b_n\to x_0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(x_0)。$$

[分析]

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}-f'(x_0)=\lambda_n\left(\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}-f'(x_0)\right)+$$

$+\mu_n\left(\dfrac{f(a_n)-f(x_0)}{a_n-x_0}-f'(x_0)\right)$，其中 $\lambda_n=\dfrac{b_n-x_0}{b_n-a_n},\mu_n=\dfrac{a_n-x_0}{b_n-a_n}$。

例 3：设 $f(x)=arc\tan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(n)}(0)$。

解 因 $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$，故

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1},$$

因此

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & n=0\\ 0, & n=2k\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)! & n=2k-1\end{cases}\qquad (k\in\mathbb{Z}^+)。$$

例 4：（西北工业大学）设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$（n个 f），求 $f_n'(x)$.

解 由数学归纳法易证：

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\quad n\in Z^+.$$

于是

$$f_n'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}\right)'=\frac{\sqrt{1+nx^2}-\dfrac{nx^2}{\sqrt{1+nx^2}}}{1+nx^2}=\frac{x}{\sqrt{(1+nx^2)^3}}.$$

例 5：（厦门大学）已知 $f'(x)=ke^x$, k 为不等于零的常数，求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数。

解 记 $y=f(x)$，其反函数记为 $x=\varphi(y)$，则

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

于是

$$\varphi''(y)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{f'(x)}\right)}{\dfrac{dy}{dx}}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{1}{k^2e^{2x}}.$$

例 6：已知 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 由参数方程求导公式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}$$

$$=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

第六讲 积分

1、 不定积分

例 1 计算

(1) $\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x(x+1)}dx$； （2） $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

解 (1) $\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x(x+1)}dx = -\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{(1+\frac{1}{x})}d(1+\frac{1}{x})$

$$= -\int \ln(1+\frac{1}{x})d(1+\frac{1}{x})$$

$$= -\frac{1}{2}\ln^2(1+\frac{1}{x})+c.$$

（2） $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1})$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c$$

解法二

$$原式 = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + c$$

例 2 计算：

（1）$\int \frac{dx}{x+x^{n+1}}$；　　（2）$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解（1）$=\int \frac{dx}{x(1+x^n)}=\int (\frac{1}{x}-\frac{x^{n-1}}{1+x^n})dx=\ln|x|-\frac{1}{n}\ln|1+x^n|+c$；

（2）$=\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}d(x^2+1)=\frac{1}{2}\int (\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})d(x^2+1)$

$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+c$.

2、 定积分

例 1：设 $f(x)>0$，且单减，试证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx$ 同时敛散.

分析：由题设知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，设为 A，则 $A\geq 0$. 若 $A>0$，则易证两积分均发散. 若 $A=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. 由狄利克雷判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x)\cos 2xdx$ 收敛，从而由

$$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} f(x)dx-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} f(x)\cos 2xdx$$

知两积分具有相同的敛散性.

例 2：

设 f 在 $[a,b]$ 连续，且单调增加，证明：

$$\int_a^b tf(t)dt\geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt.$$

证明 令 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，则 $F(a)=0$，又

$$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt$$

$$=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]\geq 0 \qquad (a<\xi<x)$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增，故得 $F(b)\geq F(a)=0$.

第七讲 级数

例 1：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{2n\sin\frac{1}{n}}\cdot a_n\right)=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？试证之.

解 由于 $\dfrac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}\to 1$（$n\to\infty$），而 $0<n^{-2n\sin\frac{1}{n}}=n^{-2\cdot\frac{\sin n^{-1}}{n^{-1}}}\le\left(n^{-2}\right)^{\frac{3}{4}}$（$n$ 充分大），由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$ 收敛，再由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 2：

（哈尔滨工大 2000）证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证 设 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则 $b_n=S_n-S_{n-1}$，于是由 $\sum\limits_{n=1}b_n$ 收敛知：$\exists M>0$，$|S_n|\le M$，$n=1,2,\cdots$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛知：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，$\forall n,m>N_1$，有

$$|a_n-a_{n-1}|+|a_{n+1}-a_n|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|<\varepsilon,$$

又 $\{S_n\}$ 收敛，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2>0$，$\forall n>N_2$，$m>N_2$，有 $|S_n-S_m|<\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}+1$，于是，当 $n,m>N$ 时，

$$\begin{aligned}&|a_nb_n+a_{n+1}b_{n+1}+\cdots+a_mb_m|\\&=|a_n(S_n-S_{n-1})+a_{n+1}(S_{n+1}-S_n)+\cdots+a_m(S_m-S_{m-1})|\\&\le M\left[|a_{n+1}-a_n|+|a_{n+2}-a_{n+1}|+\cdots+|a_m-a_{m-1}|\right]+M(|a_m-a_n|)+|a_n||S_m-S_{n-1}|\\&<3M\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}a_nb_n$ 收敛.

例 3：

试构造一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，使它满足：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；　　（2）$a_n\ne o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$满足（2），将两者结合起来，构造级数如下：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

即当n是整数平方时，$a_n=\frac{1}{n}$，否则$a_n=\frac{1}{n^2}$，显然$a_n\neq o\left(\frac{1}{n}\right)$，同时

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k^2\leq n}\frac{1}{k^2}\leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<+\infty$$

故此级数收敛.

（北师大）证明：极限 $\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)]$存在有限.

例 4：

证 令$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，则f在$[2,+\infty)$上非负单减，所以

$$\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)=\int_2^n f(x)dx<\int_2^{n+1}f(x)dx<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k},$$

从而得 $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)>-\ln(\ln 2)>0$，即数列有下界．又

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}f(x)dx<\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}dx=0$$

，

即数列单减，从而极限存在且有限.

第八讲 多元函数的积分

大纲：矢量及其运算和空间解析几何，多元函数的微分及其性质和应用。二重积分、三重积分、第一、二类曲线与曲面积分的计算，三个重要公式：Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式以及曲线积分与路径无关性的应用和计算。

1、第一、二类曲线

定理 1 设有光滑曲线

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta],$$

函数$f(x,y)$为定义在L上的连续函数，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

定理 2 设有光滑曲线

$$L：\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}，\ t\in[\alpha,\beta],$$

且 A， B 的坐标分别为 $(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 与 $(\varphi(\beta),\psi(\beta))$，又设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 为 L 上的连续函数，则沿 L 从 A 到 B 的第二型曲线积分为

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt.$$

2、第一、二类曲面积分

定理 3 设有光滑曲面

$$S：\ z=z(x,y)，\ (x,y)\in D，$$

$f(x,y,z)$ 为 S 上的连续函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

定理 4 若光滑曲面 S 由参数方程给出：

$$S：\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

$f(x,y,z)$ 为 S 上的连续函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)ds=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

其中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,$$

$$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v,$$

$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

这里还要求 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 中至少有一个不等于零。

定理 5 设 $R(x,y,z)$ 是定义在光滑曲面

$$S：\ z=z(x,y)，\ (x,y)\in D_{xy}，$$

上的连续函数，以 S 的上侧为正侧（这时 S 的法线与 z 轴成锐角），则有

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy.$$

定理 6 若光滑曲面 S 由参数方程给出：

$$S: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

P,Q,R 为 S 上的连续函数，若在 D 上各点它们的 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 不同时为零，则分别有

$$\iint_S Pdydz = \pm\iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv,$$

$$\iint_S Qdzdx = \pm\iint_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv,$$

$$\iint_S Rdxdy = \pm\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv,$$

其中正负号分别对应曲面 S 的两个侧：当 uv 平面的正方向对应于曲面 S 所选定的正向一侧时，取正号，否则取负号。

（1）格林（*Green*）公式

定理 11 若函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在闭区域 D 上连续，且有连续的一阶偏函数，则

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

这里 L 为区域 D 的边界，并取正方向.

（2）曲线积分与路径的无关性

定理 12 设 D 是单连通闭区域. 若 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在 D 内连续，且具有一阶连续偏导数，则下列四个条件等价：

1^0 对 D 内任一按段光滑封闭曲线 L，有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$；

2^0 对 D 内任一按段光滑曲线，曲线积分 $\oint_L Pdx + Qdy$ 只与 L 的起点及终点有关，而与路线无关；

3^0 $Pdx + Qdy$ 是 D 内某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，即在 D 内有 $du = Pdx + Qdy$；

4^0 在 D 内处处有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

注： 满足条件 3^0 中的函数 $u(x,y)$，称为 $Pdx + Qdy$。求原函数可用特殊路线.

3、Stokes 公式

定理 13 设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线．若 P，Q，R 在 S（连同 L）上连续，且具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

其中 S 的侧与 L 的方向按右手法则确定．

定理 14 设$\Omega\subset R^3$为空间单连通区域．函数 P、Q、R 在Ω上连续，且有一阶连续偏导数，则下列四个条件是等价的：

（1）对于Ω内任一按段光滑的封闭曲线 L 有：

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=0；$$

（2）对于Ω内任一光滑（按段）的曲线 L 上的曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ 与路线无关；

（3）$Pdx+Qdy+Rdz$ 是Ω内某一函数的全微分；

（4）$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$，$\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$在 R 内处处成立．

4、Gauss 公式

定理 15 设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成．若函数 P，Q，R 在 V 上连续，且有一阶连续偏导数，则

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\ .$$

其中 S 取外侧．

求 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x$

解 原式$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y-\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\mathrm{d}y-\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}\left(y^2\right)=\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}(e-1)$。

计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

解：设 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,x\le y\le 1\}$

则 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$

$=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy+\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx$

$=2\int_0^1 xe^{x^2}dx=e-1$

设 $\Omega=\{(x,y,z)\in R^3\,|-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le 0,\,a>0\}$，$S$ 为 Ω 的边界曲面外侧，计算

$$I=\oiint\limits_S\frac{ax\,dydz+2(x+a)y\,dzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$$

解： $S_1:z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$（下侧），$S_2:\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$（上侧），$\because \iint\limits_{S_2}=0$，

$$\therefore\ \oiint\limits_S=\iint\limits_{S_1}+\iint\limits_{S_2}=\iint\limits_{S_1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\iint\limits_{S_1}axdydz+2(x+a)dzdx=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\oiint\limits_{S_1+S_2}-\iint\limits_{S_2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\oiint\limits_{S_1+S_2}axdydz+2(x+a)ydzdx=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\iiint\limits_\Omega[a+2(x+a)]dV$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\iiint\limits_\Omega(3a+2x)dV=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\iiint\limits_\Omega 3adV=\frac{3a}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3=\frac{2\pi a^4}{\sqrt{a^2+1}}$$