

姓名: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_

所在院校: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

密

封

线

第三届中国大学生数学竞赛决赛试卷  
(数学类, 2012)

考试形式: 闭卷      考试时间: 150 分钟      满分: 100 分

题 目	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	15	15	10	10	15	20	15	100
得 分								

- 注意: 1. 所有答题都必须写在此试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.  
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.  
3. 如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标记题号.

得 分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 设有空间中五点:  $A(1,0,1)$ ,  $B(1,1,2)$ ,  $C(1,-1,-2)$ ,  $D(3,1,0)$ ,  $E(3,1,2)$ . 试求过点  $E$  且与  $A,B,C$  所在平面  $\Sigma$  平行而与直线  $AD$  垂直的直线方程.

得 分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有两阶导数, 且  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上黎曼可积, 证明

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

密-----封-----线

得 分	
评阅人	

三、 (本题 10 分) 设  $k_0 < k_1 < \dots < k_n$  为给定的正整数,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为实参数. 指出函数  $f(x) = \sin k_0x + A_1 \sin k_1x + \dots + A_n \sin k_nx$  在  $[0, 2\pi)$  上零点个数的(当  $A_1, A_2, \dots, A_n$  变化时的)最小可能值并加以证明.

得 分	
评阅人	

四、 (本题 10 分) 设正数列  $a_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ ,  
 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n < +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$ . 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 1.$$

密 封 线

得 分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 设  $A, B$  分别是  $3 \times 2$  和  $2 \times 3$  实矩阵, 若  $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 求  $BA$ .

得 分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设  $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$  是数域  $F$  上两个矩阵集合, 称它们在  $F$  上相似: 如果存在  $F$  上与  $i \in I$  无关的可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}A_iP = B_i, \forall i \in I$ .

证明: 有理数域  $\mathbf{Q}$  上两个 矩阵集合  $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ , 如果它们在实数域  $\mathbf{R}$  上相似, 则它们在有理数域  $\mathbf{Q}$  上也相似.

得 分	
评阅人	

七、 (本题 15 分) 设  $F(x), G(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的两个非负单调递减函数,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(F(x) + G(x)) = 0$ .

(i) 证明:  $\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} xF(xt) \cos t \, dt = 0$ .

(ii) 若进一步有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (F(t) - G(t)) \cos \frac{t}{n} \, dt = 0$ .

证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (F(t) - G(t)) \cos(xt) \, dt = 0$ .