

第四届全国大学生数学竞赛决赛试题标准答案

一、(本题15分): 设 A 为正常数, 直线 ℓ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ ($x > 0$) 所围的有限部分的面积为 A . 证明:

(i) 所有上述 ℓ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ ($x > 0$) 的截线段的中点的轨迹为双曲线.

(ii) ℓ 总是(i)中轨迹曲线的切线.

证明: 将双曲线图形进行45度旋转, 可以假定双曲线方程为 $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. 设直线 ℓ 交双曲线于 $(a, 1/a)$ 和 $(ta, 1/ta)$, $t > 1$, 与双曲线所围的面积为 A . 则有

$$A = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{t})(t - 1) - \int_a^{ta} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{t})(t - 1) - \log t = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}) - \log t.$$

令 $f(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}) - \log t$. 由于

$$f(1) = 0, \quad f(+\infty) = +\infty, \quad f'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{t})^2 > 0, \quad (t > 1),$$

所以对常数 A 存在唯一常数 t 使得 $A = f(t)$ (5分). ℓ 与双曲线的截线段中点坐标为

$$x = \frac{1}{2}(1 + t)a, \quad y = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{t})\frac{1}{a}.$$

于是, 中点的轨迹曲线为

$$xy = \frac{1}{4}(1 + t)(1 + \frac{1}{t}).$$

(10分) 故中点轨迹为双曲线, 也就是函数 $y = \frac{1}{4}(1 + t)(1 + \frac{1}{t})\frac{1}{x}$ 给出的曲线. 该曲线在上述中点处的切线斜率

$$k = -\frac{1}{4}(1 + t)(1 + \frac{1}{t})\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{ta^2},$$

它恰等于过两交点 $(a, 1/a)$ 和 $(ta, 1/ta)$ 直线 ℓ 的斜率:

$$\frac{\frac{1}{ta} - \frac{1}{a}}{ta - a} = -\frac{1}{ta^2}.$$

故 ℓ 为轨迹曲线的切线. (15分)

二、(本题15分): 设函数 $f(x)$ 满足条件: 1) $-\infty < a \leq f(x) \leq b < +\infty$, $a \leq x \leq b$; 2) 对于任意不同的 $x, y \in [a, b]$ 有 $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$, 其中 L 是大

于0小于1的常数. 设 $x_1 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$, $n = 1, 2, \dots$. 证明:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ 存在, 且 $f(x) = x$.

证明: 由题设 $x_1 \in [a, b]$, $f(x) \in [a, b]$, $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + f(x_1)) \in [a, b], \dots$, 继续下去, 对任意 $n \geq 1$ 有 $a \leq x_n \leq b$, 所以 x_n 对任意 $n \geq 1$ 有意义(3分).

由条件2), 有

$$\begin{aligned} |x_3 - x_2| &= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))| \leq \frac{1}{2} (|x_2 - x_1| + |f(x_2) - f(x_1)|) \\ &\leq \frac{1}{2} (|x_2 - x_1| + L|x_2 - x_1|) = \frac{1}{2} (1 + L)|x_2 - x_1|. \\ |x_4 - x_3| &= \frac{1}{2} |(x_3 - x_2) + (f(x_3) - f(x_2))| \leq \frac{1+L}{2} |x_3 - x_2| \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^2 |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

继续下去得

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|, \forall n \geq 3.$$

由于 $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1+L}{2}\right)^k$ 收敛, 从而 $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{k+1} - x_k|$ 收敛, 当然 $\sum_{k=1}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k)$ 也收敛. 故其前 n 项部分和 $\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时极限存在, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. (12分)

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$, $a \leq \lambda \leq b$. 由条件2)知, $f(x)$ 满足Lipschitz条件, 从而是连续的. 在 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 中令 $n \rightarrow \infty$, 得 $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + f(\lambda))$, 即 $f(\lambda) = \lambda$. (15分)

三、(本题15分): 设 n 阶实方阵 A 的每个元素的绝对值为2. 证明: 当 $n \geq 3$ 时,
 $|A| \leq \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} n!$.

证明: (i) 首先, $|A| = 2^n |A_1|$, 其中 $A_1 = \frac{1}{2}A$, 它的所有元素为1或-1. (1分)

(ii) 当 $n = 3$ 时,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\triangleq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$$

上式 b_i 中每项为 ± 1 , 且六项乘积为 -1 , 至少有一个 b_i 为 -1 , 从而这六项中至少有两项相消, 故有 $|A_1| \leq 4 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3!$. 于是命题对 $n = 3$ 成立(9分). (iii) 设此命

题对于一切这样的 $(n-1)$ 阶方阵成立, 那么对 n 阶矩阵的情形, 将 $|A|$ 按第一行展开, 记1行 k 列的代数余子式为 M_{1k} , 便有

$$\begin{aligned} |A| &= \pm 2M_{11} \pm 2M_{12} \pm \cdots \pm 2M_{1n} \leq 2(|M_{11}| + |M_{12}| + \cdots + |M_{1n}|) \\ &\leq 2n \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^n(n-1)! = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}n! \cdots \cdots (15\text{分}) \end{aligned}$$

四、(本题15分): 设 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的可导函数. 对 $x_0 \in (a, b)$, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x \in U \setminus \{x_0\}$ 有 $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点. 类似地, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x \in U \setminus \{x_0\}$ 有 $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 证明: 若 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的可导函数, 且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

证明: 因为 $f(x)$ 不是一次函数, 故存在 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 使得三点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 不共线. 不妨设

$$f(x_2) - \left(f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) \right) > 0 \cdots \cdots (3\text{分})$$

令

$$g(x) = -\varepsilon(x - x_2)^2 + f(x_2) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x - x_2).$$

取定 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $g(x_1) > f(x_1)$ 和 $g(x_3) > f(x_3)$. 令 $h(x) = g(x) - f(x)$. 则有 $h(x_1) > 0$ 和 $h(x_3) > 0$, 且 $h(x_2) = 0$. 令 $h(\xi) = \min_{x \in [x_1, x_3]} h(x)$, 则 $h(\xi) \leq 0, \xi \in (x_1, x_3)$, 并且 $f'(\xi) = g'(\xi)$ (10分). 故

$$f(x) \leq g(x) - h(\xi), \quad x \in (x_1, x_3).$$

注意到 $g(x) - h(\xi)$ 的图像是一个开口向下的抛物线, 故对 $x \neq \xi$ 有

$$g(x) - h(\xi) < g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) - h(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi),$$

即

$$f(x) < f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi), \quad x \in (x_1, x_3) \setminus \{\xi\} \cdots \cdots (15\text{分})$$

五(本题20分): 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 记

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若 $|A| = -12$, A 的特征值之和为 1, 且 $(1, 0, -2)^T$ 为 $(A^* - 4I)x = 0$ 的一个解. 试

给出一正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 使得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化为标准型.

解: 首先,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 |A| - x_2 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} - x_4 \begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{12} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -12x_1^2 + (x_2, x_3, x_4)A^* \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 为关于 x_1, x_2, x_3, x_4 的二次型(2分).

其次, 由 $(A^* - 4I)x = 0$ 得 $(|A|I - 4A)x = 0$, 即 $(A + 3I)x = 0$. 故由 $(1, 0, -2)^T$ 为 $(A^* - 4I)x = 0$ 的一个解知, A 有特征值 -3 (4分). 现可设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, -3$. 于是由 $|A| = -12$ 及 A 的特征值之和为 1, 得方程组

$$\lambda_1 + \lambda_2 - 3 = 1, \quad -3\lambda_1\lambda_2 = -12,$$

得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. 所以 A 的全部特征值为 $2, 2, -3$. 结果, 对应特征值 -3 的特征空间 V_{-3} 的维数为 1, 对应特征值 2 的特征空间 V_2 的维数为 2 (6分).

注意到 $(1, 0, -2)^T$ 是 A 相应于特征值 -3 的一个特征向量, 因此它是 V_{-3} 的基. 求解下列线性方程组的基础解系: $t_1 - 2t_3 = 0$, 得到正交基础解: $\alpha = (0, 1, 0)^T$, $\beta = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})^T$, 且令 $\gamma = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})^T$, 则 α, β 为 V_2 的标准正交

基, α, β, γ 为 \mathbb{R}^3 的标准正交基. 事实上, 因为 A 为实对称矩阵, $V_2 = V_3^\perp$, 它是唯一的, 维数为 2 (12分). 现在 A 可写成 $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$, 其中 $P =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \text{ 从而得 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} P^T.$$

$$A^* = |A|A^{-1} = -12P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T,$$

(15分). 令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 则由 P 为正交矩阵知:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \text{ 为正交变换, 其中 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \text{ 它使得}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -12x_1^2 + (x_2, x_3, x_4)P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= -12y_1^2 - 6y_2^2 - 6y_3^2 + 4y_4^2, \end{aligned}$$

为 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准型 (20分).

六、(20分): 设 \mathbb{R} 为实数域, n 为给定的自然数, A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合. 证明:

$$\inf_{b \in \mathbb{R}, a > 0, P(x) \in A} \frac{\int_b^{b+a} |P(x)| dx}{a^{n+1}} > 0.$$

证明: 我们证明对任意 n 次首一实系数多项式, 都有 $\int_b^{b+a} |P(x)| dx \geq c_n a^{n+1}$, 其中 c_n 满足 $c_0 = 1, c_n = \frac{n}{2n+1} c_{n-1}, n \geq 1$ (3分). 我们对 n 用归纳法. $n =$

0时 $P(x) = 1$. 则

$$\int_b^{b+a} |P(x)| dx = a \geq c_0 a,$$

结论成立(5分). 下设结论在 $k \leq n-1$ 时成立. 设 $P(x)$ 是一个 n 次首一多项式, 则对任意给定的 $a > 0$ 来说 $Q(x) = \frac{2}{na}(P(x + \frac{a}{2}) - P(x))$ 是一个 $(n-1)$ 次首一多项式. 由归纳法假设, 有

$$\int_b^{b+a/2} |Q(x)| dx \geq \frac{c_{n-1}}{2^n} a^n. \dots\dots (10分)$$

由此推出

$$\begin{aligned} \int_b^{b+a} |P(x)| dx &= \int_b^{b+a/2} (|P(x)| + |P(x + a/2)|) dx \\ &\geq \int_b^{b+a/2} (|P(x+a/2) - P(x)|) dx = \frac{na}{2} \int_b^{b+a/2} |Q(x)| dx \geq \frac{na}{2} c_{n-1} \left(\frac{a}{2}\right)^n = c_n a^{n+1}. \end{aligned}$$

(20分)