第八届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷
(数学类, 2017年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

专业: 考生座位号: 所在院校: 准考证号: 姓名:

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \underline{0}$.

(2) 设a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足 $\underline{a>27 \ or\ a<-37}$.

(3) 计算曲面积分$I=\iint_S \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $(a>0$为常数$)$, 其中S : $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=\underline{-\frac{\pi}{2}a^3}$.

(4) 记两特征值为1，2的2阶实对称矩阵全体为Γ.$\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示A的$(2,1)$位置元素. 则集合$\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$的最小元 $=\underline{\frac{-1}{2}}$.

参考答案. 因为该多项式无3次方项，故4个根之和为0。行列式的每一列加到第一列即可得行列式值为0。

参考答案. 记: $f(x)=3x^4-8x^3-30x^2+72x+a$. $f'(x)=12x^3-24x^2-60x+72=12(x^3-2x^2-5x+6)=12(x-1)(x-3)(x+2)$. f 在 -2 和 3 取得极小值 $-152+a$ 和 $-27+a$, f 在 1 取得极大值 $37+a$.

因此, 当且仅当 $a>27$ 或 $a<-37$ 时方程有虚根.

解: 令曲面 S_1 : $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2 \\ z=0 \end{cases}$, 取下侧，则$S_1 \cup S$为闭下半球面的内侧.
设其内部区域为Ω，令D为xOy平面上的圆域$x^2+y^2 \leqslant a^2$，则利用高斯公式，得

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{a}\Big\{\iint_{S\cup S_1} - \iint_{S_1} [axdydz+(z+a)^2dxdy]\Big\} \\
=& \frac{1}{a}\Big[-\iiint_{\Omega}(3a+2z)dv + \iint_{D} a^2dxdy\Big] \\
=& \frac{1}{a}\Big[-2\pi a^4 - 2\iiint_{\Omega} zdv + \pi a^4\Big] \\
=& -\pi a^3 - \frac{2}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a rdr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{0} zdz \\
=& -\frac{\pi}{2}a^3.
\end{aligned}
$$

参考答案. $A = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^T, Q$ 可表为$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.
故$a_{21} = -\sin t \cos t$, 立即得结果。

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面Γ的方程为$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设P为空间中的平面，它交抛物面Γ于曲线C. 问：C是何种类型的曲线？证明你的结论.

解：交线为抛物线或为椭圆 （5分）

1) 如果平面P平行于$z-$轴，则相交曲线$C=\Gamma\cap P$可以经过以$z-$为旋转轴的旋转，使得P平行于$yz-$平面，C的形状不变. 所以可不妨设P的方程为$x=c$, 交线C的方程为$z=\frac{1}{2}(c^2+y^2)$. 将C投影到$yz-$平面上，得到抛物线$z-\frac{c^2}{2}=\frac{1}{2}y^2$. 由于平面$P$平行于$yz-$轴，故交线为抛物线. （10分）

2) 如果平面P不平行于$z-$轴，我们设P的方程为$z=ax+by+c$. 代人旋转抛物面Γ的方程为$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，得到

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+2c:=R^2.$$

将$C=\Gamma\cap P$垂直投影到$xy-$平面，得到圆周$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. 令Q是以这个圆为底的圆柱，则C也是圆柱Q与平面P的交线. 在圆柱Q中从上或从下放置半径为R的球体，它与平面P相切于F_1和F_2，与圆柱Q相交于圆D_1和D_2. 对$C=Q\cap P$上的任意一点A, 过A点的圆柱母线交圆D_1于B_1, 交圆D_2为B_2. 则线段B_1B_2为定长. 这时，由于球的切线长相等，得到

$$|AF_1|+|AF_2|=|AB_1|+|AB_2|=|B_1B_2|,$$

为常数. 故曲线C为椭圆. （15分）

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、证明题（15分）设n阶方阵A, B满足: 秩$(ABA) =$ 秩(B). 证明：AB与BA相似.

证明: 设

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q, \quad B = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}P^{-1}$$

其中P, Q是可逆方阵，B_1是r阶方阵，则有

(5分)

$$AB = P\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}, \quad BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix}Q, \quad ABA = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}Q.$$

由$\operatorname{rank} ABA = \operatorname{rank} B_1 = \operatorname{rank} B$可得，存在矩阵$X, Y$使得$B_2 = B_1 X$, $B_3 = YB_1$. 从而有

$$AB = P\begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix}P^{-1},$$
$$BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} I & O \\ Y & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -Y & I \end{pmatrix}Q.$$

因此，AB与BA相似. （15分）

姓名: 准考证号: 所在院校: 考生座位号: 专业:
密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、（本题20分）对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的(复值)函数 $\varphi(x)$，称 $\varphi\in\mathscr{S}$, 如果 $\forall\, m,k\geqslant 0$ 成立

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^m\varphi^{(k)}(x)|<+\infty.$$

若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义 $\hat{f}(x):=\int_{\mathbb{R}}f(y)e^{-2\pi ixy}\,dy\quad(\forall\, x\in\mathbb{R})$. 证明: $\hat{f}\in\mathscr{S}$, 且

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,dy,\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

证明: 由于 $f\in\mathscr{S}$, 因此存在 $M_1>0$ 使得

$$|2\pi ixf(x)|\leqslant\frac{M_1}{x^2+1},\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

这样, $\int_{\mathbb{R}}(-2\pi iy)f(y)e^{-2\pi ixy}\,dy$ 关于 $x\in\mathbb{R}$ 一致收敛, 从而可得 （2分）

$$\frac{d}{dx}\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}-2\pi iyf(y)e^{-2\pi ixy}\,dy. \tag{2}$$

（4分）

同理可得

$$\frac{d^n}{dx^n}\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}(-2\pi iy)^nf(y)e^{-2\pi ixy}\,dy. \tag{3}$$

而利用分部积分立即得到

$$(f^{(n)})^\wedge(x)=(2\pi ix)^n\hat{f}(x),\qquad \forall\, n\geqslant 0. \tag{4}$$

结合 (3)—(4) 并利用 $f\in\mathscr{S}$, 可得对任何 $m,k\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&x^m\frac{d^k}{dx^k}\hat{f}(x)\\ =\;&\frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{\mathbb{R}}\frac{d^m}{dy^m}\Big((-2\pi iy)^kf(y)\Big)\,e^{-2\pi ixy}\,dy\end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}$ 上有界. 从而 $\hat{f} \in \mathscr{S}$. 于是, $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy}\, dy$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}
&\int_{-A}^{A} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy}\, dy \\
=\ &\int_{-A}^{A} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i(x-t)y}\, dt \\
=\ &\int_{-A}^{A} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{2\pi ity}\, dt \\
=\ &\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-A}^{A} f(x-t) e^{2\pi ity}\, dy \\
=\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi At)}{\pi t}\, dt \\
=\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At)\, dt + f(x).
\end{aligned} \tag{5}$$

（15分）

由 $f \in \mathscr{S}$ 易得积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t} \right| dt$ 收敛, 从而由黎曼引理可得

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At)\, dt = 0. \tag{6}$$

结合 (5) 和 (6) 即得结论.

（20分）

姓名：______ 准考证号：______ 所在院校：______ 考生座位号：______ 专业：______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设$n>1$为正整数. 令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

1. 证明：数列S_n单调增且有界，从而极限$\lim_{n\to\infty}S_n$存在.
2. 求极限$\lim S_n$.

证明:1. 先证

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n<\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1},\quad k=1,2,\ldots,n-1.$$

由均值不等式

$$k+1=\frac{k}{n}+\ldots+\frac{k}{n}+1>(n+1)\sqrt[n+1]{\left(\frac{k}{n}\right)^n},$$

因此

$$\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{k}{n}\right)^n$$

. 于是

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\\&>\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}>S_n.\end{aligned}$$

即S_n单调增。 （5分）

另一方面，

$$\frac{S_n}{n}<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

故

$$S_n<\frac{n}{n+1}<1$$

. 即S_n单调增有上界，从而$\lim S_n=S$存在。 （7分）

2. 熟知当$x\neq 0$时，$e^x>1+x$。则

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n<e^{n\cdot(-k/n)}=e^{-k}$$

从而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n<\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}<\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

因此

$$\lim S_n = S \le \frac{1}{e-1}. \tag{7}$$

（11分）

另一方面，对任意正整数m，取$n > m$，则

$$S_n \ge \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

两边令$n \to \infty$得

$$S \ge \sum_{k=1}^{m} e^{-k}$$

令$m \to \infty$得

$$\ge \frac{1}{e-1} \tag{8}$$

结合 (7)式与(8)式，即得 $\lim S_n = S = \frac{1}{e-1}$.（15分）

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、（本题15分）求证：常微分方程$\frac{dy}{dx} = -y^3 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$有唯一的满足$y(0) = y(2\pi)$的解.

证明：令$y(x, y_0)$为方程满足初值条件$y(0, y_0) = y_0$的解. 由常微分方程解的存在唯一性定理，这样的解局部存在且唯一.

我们首先证明

引理：对任意$r \in R$函数$y(x, r)$在$x \in [0, 2\pi]$上有定义，且对任意$r \geq 2$有$y(x, r) \leq r$和$y(x, -r) \geq -r$.

（3分）

引理的证明：反证法. 设存在$x_0 \in [0, 2\pi], r \geq 2$,使得$y(x_0, r) > r$, 则$x_0 > 0$. 记

$$t = inf\{s \in [0, x_0] \mid y(x, r) \geq r, \forall x \in [s, x_0]\}.$$

则

$$y(t, r) = r, \ \ y'_x(t, r) \geq 0.$$

但$y'_x(t, r) = -y(t, r)^3 + \sin t < 0$, 矛盾. 同理可证，对任意$x \in [0, 2\pi], r \geq 2$有$y(x, -r) \geq -r$.故引理成立.

（10分）

考虑函数$f(r) = y(2\pi, r), r \in R$. 则连续函数$f$满足$f([-2, 2]) \subset [-2, 2]$. 故存在$y_0 \in [-2, 2]$，使得$f(y_0) = y_0$. 对恒等式

$$\frac{dy(x, r)}{dx} = -y(x, r)^3 + \sin x$$

两边对r求导，得到

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial y(x, r)}{\partial r}) = -3y(x, r)^2 \frac{\partial y(x, r)}{\partial r}.$$

故有

$$\frac{\partial y(x, r)}{\partial r} = e^{-3\int_0^x y(s, r)^2 ds}.$$

于是有

$$f'(r) = e^{-3\int_0^{2\pi} y(s, r)^2 ds} < 1.$$

故f至多只有一个不动点.

（15分）

唯一性的另一种证明方法：（唯一性5分）设$y_1(x), y_2(x)$ 是方程的两个满足边值条件的解. 由存在唯一性定理，$y_1(x) \neq y_2(x), \forall x \in [0, 2\pi]$.

不妨$y_1(x) > y_2(x), \forall x \in [0, 2\pi]$. 令$y = y_1 - y_2 > 0$, 则 $y(0) = y(2\pi)$

$\dot{y} = -(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) y < 0 \Rightarrow y(0) < y(2\pi)$, 矛盾.