第二十四届北京市大学生数学竞赛试卷（经济管理类）

考试时间：2013 年 10 月 26 日上午 9:00 至 11:30　　考试形式：闭卷考试

参考答案

一、填空题 (本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 设函数 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$ $\underline{\sqrt{\ln(1-x)}}$ 。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ x+a, & 0\leqslant x<1 \\ 1+b\sin(x-1), & x\geqslant 1 \end{cases}$ 在点 $x=0,\ x=1$ 处可导，则参数 a 与 b 的和 $a+b=$ $\underline{\quad 1 \quad}$ 。

3. 设 $f(x)=e^{x^2}\sin x^4$，则高阶导数 $f^{(2013)}(0)=$ $\underline{\quad 0 \quad}$ 。

4. 将函数 $f(x)=e^x$ 在区间 $[0,\,x]\,(x>0)$ 上应用拉格朗日定理得 $e^x-1=xe^{\theta x}\,(0<\theta<1)$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$ 。

5. 设函数 $f(x)$ 是一个非负的连续函数，且满足方程 $f(x)f(-x)=1,\ x\in(-\infty,+\infty)$，则定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathbf{d}x=$ $\underline{\quad 1 \quad}$ 。

6. 二重积分 $I=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(4-5\sin x+3y)\mathbf{d}x\mathbf{d}y=$ $\underline{\quad 4\pi a^2 \quad}$ 。

7. 使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi}{n^x}$ 收敛的 x 的取值范围是 $\underline{\quad x>0 \quad}$ 。

8. 若方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 可以确定隐函数 $x=x(y,z),\ y=y(x,z),\ z=z(x,y)$，那么乘积 $\dfrac{\boldsymbol{\partial} x}{\boldsymbol{\partial} y}\cdot\dfrac{\boldsymbol{\partial} y}{\boldsymbol{\partial} z}\cdot\dfrac{\boldsymbol{\partial} z}{\boldsymbol{\partial} x}=$ $\underline{\quad -1 \quad}$ 。

9. 微分方程初值问题 $xy\left(1+x^2\right)\dfrac{\mathbf{d}y}{\mathbf{d}x}=1+y^2,\ y(1)=0$ 的解是 $\underline{\quad \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=2x^2 \quad}$ 。

10. 已知 $\mathbf{d}f(x,y)=\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathbf{d}x+\left(x^2-2xy+y^2\right)\mathbf{d}y$，则 $f(x,y)=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\dfrac{1}{3}y^3+C \quad}$ 。

二、(本题 8 分) 试求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\arctan\dfrac{a}{x}-\arctan\dfrac{a}{x+1}\right)$。

解法一： 使用拉格朗日中值定理：

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}\right)$$

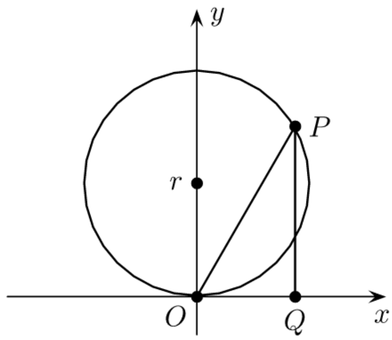
其中 ξ 介于 $\dfrac{a}{x}$ 与 $\dfrac{a}{x+1}$ 之间。因此，当 $x\to\infty$ 时，$\xi\to 0$。从而有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\frac{a}{x(x+1)}=a$$

解法二： 使用洛必达法则：

$$\begin{aligned}
\text{原极限}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\dfrac{a}{x}-\arctan\dfrac{a}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-\dfrac{a}{x^2}}{1+\left(\dfrac{a}{x}\right)^2}-\dfrac{-\dfrac{a}{(x+1)^2}}{1+\left(\dfrac{a}{x+1}\right)^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{a}{(x+1)^2+a^2}-\dfrac{a}{x^2+a^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3}{2}\cdot\frac{2x+1}{\left(x^2+a^2\right)\left[(x+1)^2+a^2\right]}\\
&=a
\end{aligned}$$

三、(**本题 10 分**) 设半径为 r 的圆与某条直线 ℓ 相切，切点为 O，过圆上的一点 P 作切线 ℓ 的垂线，垂足为 Q。试求由点 P、Q 及切点 O 所构成的三角形的最大面积。



解：以切点 O 为原点，切线 ℓ 为 x 轴建立如图所示的坐标系，此时圆的方程为

$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

设 P 点的坐标为 (x,y)，则 $\triangle POQ$ 的面积为 $xy/2$。根据对称性，只需讨论点 P 位于右半圆上即可。由于

$$x=\sqrt{2ry-y^2},\ \ 0\leqslant y\leqslant 2r$$

于是，$\triangle POQ$ 的面积可表为 y 的函数 $f(y)$，且有

$$f(y)=\frac{y\sqrt{2ry-y^2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2ry^3-y^4},\ \ 0\leqslant y\leqslant 2r$$

现求连续函数 $f(y)$ 在闭区间 $[0,2r]$ 上的最大值。由

$$f'(y)=\frac{6ry^2-4y^3}{4\sqrt{2ry^3-y^4}}=0$$

可得驻点 $y=3r/2$。又因 $f(0)=f(2r)=0$，所以函数 $f(y)$ 在区间 $[0,2r]$ 上的最大值为

$$f(3r/2)=\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$$

四、(**本题 10 分**) 试求函数 $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$，$x,y>0$ 的极值。

解：先求函数 $f(x,y)$ 的一阶偏导数，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=y\ln\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x\ln\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} \end{cases}$$

然后令 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ 可解得 $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$。再求函数 $f(x,y)$ 的三个二阶偏导数，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}+\dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\ln\left(x^2+y^2\right)+2-\dfrac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{cases}$$

注意到

$$\begin{cases} A=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=y=1/\sqrt{2e}}=2 \\ B=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{x=y=1/\sqrt{2e}}=0 \\ C=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x=y=1/\sqrt{2e}}=2 \end{cases}$$

并且有

$$D=AC-B^2=2\cdot 2-0=4>0$$

故函数 $f(x,y)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 处取得极小值，且极小值为

$$\min_{x,\,y>0} f(x,y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\dfrac{1}{2e}$$

五、(本题 12 分) 判断无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)}$ 的收敛性，其中 $x>0$。

解：首先令

$$a_n(x)=\frac{x^n}{(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)}$$

注意到

$$\begin{aligned}a_n(x)&=\frac{\big(1+x^n\big)-1}{(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)}\\&=\frac{1}{(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^{n-1}\big)}-\frac{1}{(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)}\end{aligned}$$

易知级数的前 n 项部分和 $S_n(x)$ 为

$$S_n(x)=1-\frac{1}{(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)}$$

根据上式，当 $x>1$ 时，有

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=1$$

级数收敛；当 $x=1$ 时，有

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

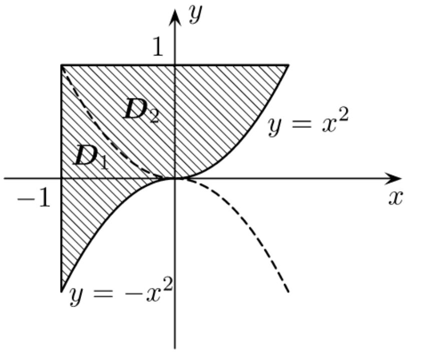
级数收敛；而当 $0<x<1$ 时，利用不等式 $e^t>1+t,\ t>0$ 可得

$$(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)<e^{x+x^2+\cdots+x^n}<e^{\frac{x}{1-x}}$$

因此极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x)\big(1+x^2\big)\cdots\big(1+x^n\big)$ 存在且为正值，故极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)$ 一定存在，因此级数收敛。综上所述，原级数收敛。

六、(本题 10 分) 设 D 是由 $y=x^2\,(0\leqslant x\leqslant 1)$, $y=-x^2\,(-1\leqslant x\leqslant 0)$, $y=1$ 以及 $x=-1$ 所围成的平面区域，试求二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D x\left[1+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\sin\left(x^2+y^2\right)\right]\mathbf{d}x\mathbf{d}y$。

解: 引入如图所示的辅助线将区域 D 分为两个区域:



$$D_1:\begin{cases}-x^2\leqslant y\leqslant x^2\\ -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases}-\sqrt{y}\leqslant x\leqslant \sqrt{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

注意到被积函数

$$f(x,y)=x\left[1+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\sin\left(x^2+y^2\right)\right]$$

既是关于 x 的奇函数，也是关于 y 的奇函数，且区域 D_1 和 D_2 分别关于 x 轴和 y 轴对称，所以有

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D x\left[1+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\sin\left(x^2+y^2\right)\right]\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\
&=\iint\limits_D x\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\iint\limits_{D_1} x\mathbf{d}x\mathbf{d}y+\iint\limits_{D_2} x\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\
&=\iint\limits_{D_1} x\mathbf{d}x\mathbf{d}y=2\int_{-1}^{0}\left(\int_0^{x^2}x\mathbf{d}y\right)\mathbf{d}x\\
&=2\int_{-1}^{0}x^3\mathbf{d}x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

七、(**本题** 8 **分**) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\, b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$，试证明:

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right| \mathbf{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 \mathbf{d}x$$

证明: 注意到 $f(a)=0$，则有

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right| \mathbf{d}x &= \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\mathbf{d}t\right| \left|f'(x)\right| \mathbf{d}x \\
&= \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\mathbf{d}t\right| \mathbf{d}\int_a^x \left|f'(t)\right| \mathbf{d}t \\
&\leqslant \int_a^b \left[\int_a^x \left|f'(t)\right| \mathbf{d}t\right] \mathbf{d}\left[\int_a^x \left|f'(t)\right| \mathbf{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^x \left|f'(t)\right| \mathbf{d}t\right]^2 \Bigg|_a^b \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^b 1\cdot\left|f'(t)\right| \mathbf{d}t\right]^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathbf{d}t\cdot\int_a^b \left|f'(t)\right|^2 \mathbf{d}t \ \ (\textbf{Schwarz}\ \text{不等式}) \\
&= \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 \mathbf{d}x
\end{aligned}$$

八、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\,1]$ 上二次可导，且 $|f(x)|\leqslant a,\ |f''(x)|\leqslant b$，则

$$\left|f'(x)\right|\leqslant 2a+\frac{b}{2},\ \ x\in[0,\,1]$$

证明： 对 $\forall\, x\in(0,\,1)$，由泰勒公式可得

$$f(0)=f(x)+(0-x)f'(x)+\frac{(0-x)^2}{2}f''(\xi_1),\ \ \xi_1\in(0,\,x)$$
$$f(1)=f(x)+(1-x)f'(x)+\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2),\ \ \xi_2\in(x,\,1)$$

两式相减可得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2)$$

两边取绝对值可得

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right|&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{x^2}{2}\left|f''(\xi_1)\right|+\frac{(1-x)^2}{2}\left|f''(\xi_2)\right|\\&\leqslant 2a+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right]b\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}\end{aligned}$$

下面证明

$$\left|f'(0)\right|\leqslant 2a+\frac{b}{2},\ \ \left|f'(1)\right|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$$

将 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处作泰勒展开，得到

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(\eta),\ \ \eta\in(0,\,x)$$

然后在上式中令 $x=1$ 得到

$$f'(0)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\eta),\ \ \eta\in(0,\,x)$$

上式两边取绝对值，并利用所给条件即得

$$\left|f'(0)\right|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$$

不等式 $|f'(1)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$ 的证明是完全类似的，此处从略。