

# 第七届全国大学生数学竞赛预赛试卷 (非数学类, 2015 年)

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30 分	12 分	12 分	14 分	16 分	16 分	100 分
得分							

注意: 本试卷共六大题, 满分 100 分, 考试时间为 150 分钟。

- 1 所有答题都必须写在此试题纸密封线右边, 写在其它纸上无效。
- 2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记。
- 3 当本题空白不够时, 可写在当页背面, 并注明题号。

得分	
评阅人	

(5) 设区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $u(x)$  定义为  $u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ , 则  $u(x)$  的初等函数表达式是\_\_\_\_\_。

二 (本题满分 12 分) 设  $M$  是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程。

得分	
评阅人	

一 填空题(本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)。

(1) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2 + 1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n^2 + 2} + \dots + \frac{\sin \pi}{n^2 + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}。$

(2) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$  所决定, 其中  $F(u, v)$  具有连续偏导数, 且  $xF_u + yF_v \neq 0$ 。则  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}。$

(本小题结果要求不显含  $F$  及其偏导数)

(3) 曲面  $z = x^2 + y^2 + 1$  在点  $M(1, -1, 3)$  的切平面与曲面  $z = x^2 + y^2$  所围区域的体积为\_\_\_\_\_。

(4) 函数  $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0) \\ 0, & x \in [0, 5] \end{cases}$  在  $(-5, 5]$  的傅立叶级数在  $x = 0$  收敛的值是\_\_\_\_\_。

姓名 \_\_\_\_\_ 准考证号 \_\_\_\_\_ 学校 \_\_\_\_\_ 省市 \_\_\_\_\_

密封线

密封线

密封线

得分	评阅人

三 (本题满分 12 分) 设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二次可导, 且存在常数  $\alpha, \beta$ , 使得对于  $\forall x \in (a, b)$ , 有

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内无穷次可导。

得分	评阅人

四 (本题满分 14 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$  的收敛域, 及其和函数。

省市\_\_\_\_\_学校\_\_\_\_\_准考证号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

五 (本题满分 16 分) 设函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 且

$$\int_0^1 f(x) dx = 0, \int_0^1 xf(x) dx = 1. \text{ 试证:}$$

(1)  $\exists x_0 \in [0, 1]$  使  $|f(x_0)| > 4$

(2)  $\exists x_1 \in [0, 1]$  使  $|f(x_1)| = 4$

得分	
评阅人	

六 (本题满分 16 分) 设  $f(x, y)$  在  $x^2 + y^2 \leq 1$  上有连续的二阶偏导数, 且  $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ . 若  $f(0, 0) = 0$ ,

$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , 证明

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}.$$

省市 \_\_\_\_\_ 学校 \_\_\_\_\_ 准考证号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

密封线

密封线

密封线