考场________ 座位号________

准考证号________ 姓名________ 院系________ 学校________

装--------订--------线--------内--------请--------勿--------答--------题

第二十四届北京市大学生数学竞赛暨高职高专类第四届竞赛试卷

考试时间：2013 年 10 月 26 日上午 9:00-11:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅										
审核										

一、(本题共15分，每小题3分) 单项选择题(将正确答案的字母填在题后的括号内)

1. 半径为2的圆当半径增加0.1时，面积的微分是【 】.

(A) 以0.1为边长的正方形面积　　(B) 以2为半径的圆弧长

(C) 以 4π 为长，0.1为宽的长方形面积

(D) 内圆半径是2，外圆半径是2.01的圆环面积

2. 若以下几个极限都存在，$h \neq 0$，则极限为 $f'(x_0)$ 的是【 】.

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h}$

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h^2)-f(x_0)}{h^2}$　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h^3)-f(x_0)}{h^3}$

3. 以下各项正确的是【 】.

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx = 0$　　(B) $\int_0^{\pi} \dfrac{x-\pi/2}{1+\cos^2 x}dx = 0$

(C) $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{x}\,dx = 0$　　(D) 若 $f(x)$ 在[0,1]上非负可积且不恒为零，则 $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$

4. 若 $f(x)$ 在[0,1]上连续，则 $f(x)$ 的值域为【 】.

(A) 闭区间　　(B) 开区间

(C) 无穷区间　　(D) 以上情况都有可能

5. 若 $f(x)$ 在[0,1]上可积，则 $f(x)$ 在[0,1]上【 】.

(A) 连续　　(B) 有界

(C) 可导　　(D) 连续可导

二、（本题共15分，每小题3分）填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}} =$ ______________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) =$ ______________.

3. 若 $y=\dfrac{x^4}{1-x}$，则 $y^{(10)} =$ ______________.

4. $\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1-x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]dx =$ ______________.

5. 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$ ，则 $\int_0^1 f(x)\,dx=$ ______________.

三、（本题10分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+10^{-1/x}}{2-10^{-1/x}}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ ，讨论 $f(x)$ 及 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 的连续性.

四、（本题10分） 设 $p>0$，常用下面的简便方法求 p 的算术平方根的近似值：任取 $u_1>0$，令 $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{p}{u_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\{u_n\}$ 收敛于 $\sqrt{p}$.

五、（本题10分） 汽车在某个只能通过一辆车的单行路上行驶，前后两车之间的安全距离 s（米）与车的平均速 v（米/秒）的之间关系为 $s=18+v+\dfrac{v^2}{32}$，求平均速度为多少时交通流量最大.

六、（**本题10分**）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$c,d\in[a,b],t_1>0,t_2>0$，证明存在$\xi\in[a,b]$，使得 $t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi)$.

七、（**本题10分**）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$，证明：

（1）若$f(x)$为偶函数，则$F(x)$也为偶函数；

（2）若$f(x)$为单调减少函数，则$F(x)$为单调增加函数.

八、(**本题10分**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是正的可积函数，证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得直线 $x=\xi$ 将由直线 $x=a,x=b,y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形分割为两个面积相等的小曲边梯形.

九、(**本题10分**) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，当 $x\ge 0$ 时有 $f(x)F(x)=\sin^2 x$，并且 $F(0)=1$，$F(x)\ge 0$，求 $f(x)$.

装------订------线------内------请------勿------答------题