专业：

考生座位号：

所在院校：

准考证号：

姓名：

密 封 线

第四届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2013）

考试形式：闭卷　　考试时间：150 分钟　　满分：100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
满　分	25	15	15	15	15	15	100
得　分							

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题 25 分）解答下列各题

1、计算 $\lim\limits_{x\to 0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right],(a>1)$.

2. 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程．并求其通解.

3. 求在 $[0,+\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$，使 $f(x)=e^{-u(x)}$，其中 $u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. 计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx$.

5. 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程.

得　分	
评阅人	

二、（本题 15 分）设曲面 $\Sigma: z^2 = x^2 + y^2, 1 \le z \le 2$，其面密度为常数 ρ．求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力（记引力常数为 G）．

得　分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续可导，

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

姓名：　　准考证号：　　所在院校：　　考生编号：　　专业：

密　　封　　线

得　分	
评阅人	

四、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在[-2,2]上二阶可导，且 $|f(x)|<1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 试证：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

得　分	
评阅人	

五、（本题 15 分）求二重积分

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|x^2+y^2-x-y\right|dxdy$$

姓名：______ 准考证号：______ 所在院校：______ 考生编号：______ 专业：______

密 封 线

得　分	
评阅人	

六、（本题 15 分）若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都是收敛的，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.