

姓名：_____

准考证号：_____

所在院校：_____

考生座位号：_____

专业：_____

线

—

封

—

密

第四届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(数学类, 2013)

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
满 分	15	15	15	15	20	20	100
得 分							

- 注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
- 2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
- 3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

- 一、(本 题 15 分) 设 A 为正常数，直线 L 与双曲线 $x^2 - y^2 = 2 (x > 0)$ 所围的有限部分的面积为 A . 证明：
- (i) 上述 L 被双曲线 $x^2 - y^2 = 2 (x > 0)$ 所截线段的中点的轨迹为双曲线.
- (ii) L 总是(i)中轨迹曲线的切线.

得 分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 满足条件:

1) $-\infty < a \leq f(x) \leq b < +\infty, a \leq x \leq b$;

2) 对任意不同的 $x, y \in [a, b]$ 有 $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$, 其中 L 是大于 0 小于 1 的常

数. 设 $x_1 \in [a, b]$, 令 $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)], n = 1, 2, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

存在, 且 $f(x) = x$.

姓名：_____

准考证号：_____

所在院校：_____

考生编号：_____

专业：_____

密

封

线

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设实 n 阶方阵 A 的每个元素的绝对值为 2. 证明: 当 $n \geq 3$ 时, $|A| \leq \frac{1}{3} 2^{n+1} n!$.

得 分	
评阅人	

四、（本题 15 分）设 $f(x)$ 为区间 (a, b) 上的可导函数. 对

$x_0 \in (a, b)$, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x \in U \setminus \{x_0\}$ 有

$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点. 类似地, 若存在 x_0 的邻域 U 使

得任意的 $x \in U \setminus \{x_0\}$ 有 $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点.

求证: 若 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的可导函数且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

.

得 分	
评阅人	

五、（本题 20 分）设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为实对称

矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵. 记 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. 若 A 的行

列式为 -12 ， A 的所有特征值的和为 1 ，且 $(1, 0, -2)^T$ 为 $(A^* - 4I)x = 0$ 一个解.

试给出一正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 使得 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化为标准型.

线

封

密

得 分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 令 \mathbf{R} 为实数域, n 为给定的正整数, A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合.

证明: $\inf_{b \in \mathbf{R}, c > 0, P(x) \in A} \frac{\int_b^{b+c} |P(x)| dx}{c^{n+1}} > 0$.