第五届广东省大学生数学竞赛试卷（高职高专类）

考试时间：2015 年 10 月 24 日上午 9:00-11:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅										
审核										

学校________ 院系________ 姓名________ 准考证号________

装------订------线------内------请------勿------答------题

一、(本题共15分，每小题3分)单项选择题(将正确答案的字母填在题后的括号内)

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则下列极限一定存在的是【　】.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\alpha}$（$\alpha$ 为实数）　(B) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$　(D) $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，且 $F(x)=|x|f(x)$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是【　】.

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$　(B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

3. 设函数 $f(u)$ 可导，且已知 $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$【　】.

(A) -1　(B) 0.1　(C) 0.5　(D) 1

4. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个原函数，则 $F(x)+f(x)$ 在 (a,b) 上【　】.

(A) 可导　(B) 连续　(C) 存在原函数　(D) 是初等函数

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则【　】.

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续　(B) $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $F'(x)=f(x)$

(C) $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 上连续　(D) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导

二、（本题共15分，每小题3分）填空题

1. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} =$ ________.

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[x_0+\Delta x+(\Delta x)^2]-f(x_0)}{\Delta x}=$ ________.

3. 设函数 $x=x(y)$ 由 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2}(1+\ln t) \\ y=\dfrac{1}{t}(3+2\ln t) \end{cases}$ 所确定，则 $\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{y=3}=$ ________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_{\sin x}^{0}\cos t^2 dt=$ ________.

5. 设 $\int\dfrac{f(x)}{x}dx=F(x)+C$，则当 $\alpha\neq 0$ 时，$\int\dfrac{f(x^\alpha)}{x}dx=$ ________.

三、（本题 **10** 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sqrt{1+2x}-1}$.

四、（本题10分） 设函数 $g(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\dfrac{x}{t}\left[f(x+\dfrac{\pi}{t})-f(x)\right]$，其中 $f(x)$ 具有二阶导数，求 $g'(x)$.

五、（本题 10 分）求 $\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|dx$.

六、（**本题 10 分**）设 $x_1=1$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}+3}\ (n=2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

七、（**本题 10 分**）周长为 $2l$ 的等腰三角形，绕其底边旋转形成旋转体，求所得体积为最大的那个三角形.

八、（**本题 10 分**）已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证方程 $f(x)g'(x)+f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

九、（**本题 10 分**）

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的单调增加函数，证明 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f^3(t)\,dt$ 也是 $[a,b]$ 上单调增加函数.