姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

第七届全国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷

(数学类, 2016年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意: 1. 前4大题是必答题, 再从五到十大题中任选3题, 题号要填入上面的表中.

2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 设 Γ 为形如下列形式的 2016 阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为 1. 则 $\sum_{A\in\Gamma}|A| =$ ________.

(2) 令 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ 收敛, 则 p 的取值范围是 ________.

(3) 设 $D: x^2+2y^2 \leqslant 2x+4y$, 则积分 $I = \iint_D (x+y)dxdy =$ ________.

(4) 若实向量 $X=(a,b,c)$ 的三个分量 a,b,c 满足 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$, I_2 为2阶单位方阵, 则 $X =$ ________________.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设 S 为椭圆柱面 $x^2+2y^2=1$, σ 是空间中的平面, 它与 S 的交集是一个圆. 求所有这样平面 σ 的法向量.

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、证明题（15分）设 A, B 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $\mathrm{tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$.

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设单位圆 Γ 的外切 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 各边与 Γ 分别切于 B_1, B_2, $\cdots$, B_n. 令 P_A, P_B 分别表示多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 的周长. 求证: $P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

准考证号：________ 所在院校：________ 考生座位号：________ 专业：________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题10分）设 u_1, v_1, u_2, v_2 为群 G 中的元素，满足 $u_1v_1 = v_1u_1 = u_2v_2 = v_2u_2$. 若 u_1, u_2 的阶均为 8，v_1, v_2 的阶均为 13. 证明：u_1u_2 的阶为 4 及 v_1v_2 的阶为 13.

得分	
评阅人	

六、（本题10分）设 $E \subset \mathbb{R}^1$, E 是 $L-$可测的, 若 $m(E) > a > 0$, 则存在无内点的有界闭集 $F \subset E$, 使得 $m(F) = a$.

所在院校：________ 考生座位号：________ 专业：________

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

七、（本题10分）设 $\gamma(s), s\in[0,\ell]$ 是空间中一条光滑闭曲线, 以弧长为参数, 且曲率 $k>0$. 设 $\beta:[0,\ell]\to S^2$ 为单位球面上由 $\gamma(s)$ 的单位主法向量构成的一条简单闭曲线 B. 证明: B 将球面分成面积相等的两个部分.

得分	
评阅人	

八、（本题10分）实系数多项式 $p(x)$ 的模 1 范数定义为: $||p||_1 := \int_0^1 |p(x)|dx$.

1. 求二次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \le x^3$ 对任意 $x \in [0,1]$ 成立, 且 $||x^3 - p(x)||_1$ 达到最小;

2. 求三次实系数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x) \le x^4$ 对任意 $x \in [0,1]$ 成立, 且 $||x^4 - p(x)||_1$ 达到最小.

姓名：______ 准考证号：______ 所在院校：______ 考生座位号：______ 专业：______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

九、（本题10分）设 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 是单位圆盘, $f(z)$ 在 D 上解析, $f(0)=0$, 且在 D 上有 $\mathrm{Re}\,f(z)\leqslant 1$. 求证: 在 D 上有 $\mathrm{Re}\,f(z)\leqslant \frac{2|z|}{1+|z|}$.

得分	
评阅人	

十、（本题10分）甲袋中有$N-1(N>1)$个白球和1个黑球, 乙袋中有N个白球, 每次从甲、乙两袋中分别取出一个球并交换放入另一袋中, 这样经过了n次, 求黑球出现在甲袋中的概率p_n，并计算$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.