第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2011 年 3 月）

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	15	10	15	17	16	12	15	100
得分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

（3）已知$\begin{cases}x=\ln(1+e^{2t})\\ y=t-\arctan e^{t},\end{cases}$ 求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

得　分	
评阅人	

二、（本题 10 分）求方程

$(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ 的通解.

得　分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 均不为零. 证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1f(h)+k_2f(2h)+k_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

得　分	
评阅人	

四、（本题 17 分）设 Σ_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，

Σ_2： $z^2 = x^2 + y^2$，Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线．求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

得　分	
评阅人	

五、（本题 16 分）已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z \geq 0$）（取上侧），Π 是 S 在 $P(x,y,z)$ 点处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离，λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦.

计算：（1）$\displaystyle\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；（2）$\displaystyle\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\mathrm{d}S$.

得　分	
评阅人	

六、（本题12 分）设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数，且 $|f'(x)| < mf(x)$，其中 $0<m<1$．任取实数 a_0，定义 $a_n = \ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots$．证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

得　分	
评阅人	

七、（本题 15 分）是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，满足 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)| \leq 1$，$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leq 1$？请说明理由.