

姓名: 准考证号: 所在院校: 考生座位号: 专业:

第五届全国大学生数学竞赛决赛试卷  
(非数学类, 2014)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	28	12	12	12	12	12	12	100
得 分								

注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、(本题共 28 分, 每小题 7 分) 计算下列各题

1. 计算积分  $\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt dx.$

2 设  $f(x)$  是  $[0,1]$  上的连续函数, 且满足  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ , 求一个这样的函数  $f(x)$  使得积分  $I = \int_0^1 (1+x^2) f^2(x) dx$  取得最小值.

3. 设  $F(x, y, z)$  和  $G(x, y, z)$  有连续偏导数,  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$ , 曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  过点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ . 记  $\Gamma$  在  $xoy$  平面上的投影曲线为  $S$ . 求  $S$  上过点  $(x_0, y_0)$  的切线方程.

4 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 其中  $a$  为常数, 矩阵  $B$  满足关系式  $AB = A - B + E$ , 其中  $E$  是单位

矩阵且  $B \neq E$ . 若秩  $\text{rank}(A+B)=3$ , 试求常数  $a$  的值.



姓名：\_\_\_\_\_ 准考证号：\_\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_\_ 考生座位号：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_

..... 线 封 ..... 密 .....

得 分	
评阅人	

二、(12 分) 设  $f(x) \in C^4(-\infty, +\infty)$ , 且  $f(x)$  满足

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2, \text{ 其中 } \theta \text{ 是与 } x, h$$

无关的常数, 证明  $f$  是不超过三次的多项式.

得 分	
评阅人	

三、(12 分) 设当  $x > -1$  时, 可微函数  $f(x)$  满足条件

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0, \text{ 且 } f(0) = 1, \text{ 试证:}$$

当  $x \geq 0$  时, 有  $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$  成立.

得 分	
评阅人	

四、（12 分）设  $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$ ,  
 $I=\iint_D f(x,y)dxdy$ ，其中函数  $f(x,y)$  在  $D$  上有连续二阶偏导数.  
 若对任何  $x,y$  有  $f(0,y)=f(x,0)=0$  且  $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\leq A$ . 证明  $I\leq \frac{A}{4}$ .

得 分	
评阅人	

五、(12 分) 设函数  $f(x)$  连续可导,

$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right)$ , 有向曲面  $\Sigma_t$  是圆柱体

$x^2+y^2 \leq t^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  的表面, 方向朝外. 记第二型的曲面积分

$$I_t = \iint_{\Sigma_t} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy, \text{ 求极限 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_t}{t^4}.$$

姓名:

准考证号:

所在院校:

考生编号:

专业:

密

封

线

得 分	
评阅人	

六、(12 分) 设  $A, B$  为  $n$  阶正定矩阵, 求证  $AB$  正定的充要条件是  $AB = BA$ .

得 分	
评阅人	

七、(12 分) 假设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A. \text{ 证明: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 收敛且 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$



