学校________ 院系________ 姓名________ 准考证号________

密 封 线 内 请 勿 答 题

第五届广东省大学生数学竞赛试卷(经济管理类)

考试时间：2015 年 10 月 24 日上午 9:00 至 11:30　　考试形式：闭卷考试

参考答案

一、填空题 (本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{1/t}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{2}\quad}$。

2. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-\frac{1}{3})}(2+xy)^{\frac{1}{y+xy^2}}=$ $\underline{\quad e^{-3}\quad}$。

3. 设 $f(x)$ 是单调的连续函数，有可导的反函数 $f^{-1}(x)$，并且 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，那么积分 $\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad xf^{-1}(x)-F\left[f^{-1}(x)\right]+C\quad}$。

4. 积分 $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\sin^{10}x\,\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad 2\pi\dfrac{9!!}{10!!}\quad}$。

5. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数，且 $z(1,0)=-1$，则 $z(x,y)$ 在点 $(1,\,0)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\quad \mathrm{d}x-\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\quad}$。

6. 设 $z=f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$, $f(x,0)=1$, $f_y'(x,0)=x$，则函数 $f(x,y)=$ $\underline{\quad 1+xy+y^2\quad}$。

7. 积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y/2}^{y}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{y/2}^{1}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2}(1-\cos 1)\quad}$。

8. 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性 $\underline{\quad\text{收敛}\quad}$(收敛或发散)。

9. 设直线 ℓ：$x+y=1$，曲线 S：$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，则 ℓ 与 S 所围成的平面图形绕直线 ℓ 旋转所得的旋转体的体积 $V=$ $\underline{\quad\dfrac{\sqrt{2}}{15}\pi\quad}$。

10. 设函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数，$f(1)=0$；又二元函数 $z=f\left(e^x+e^y\right)$ 满足微分方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$，则 $f(u)=$ $\underline{\quad \ln u^2\quad}$。

二、(**本题** 8 **分**) 设函数 $f(x)$ 在其定义域 D 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in D$，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 以及 x 轴所围成的区域面积恒为 4，且 $f(0) = 2$，试求函数 $f(x)$。

解：易知，函数 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $y = 0$ 得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，依题意有

$$\frac{1}{2}f(x_0)(x_0 - x_1) = 4 \iff \frac{1}{2}f(x_0) \cdot \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4$$

由此可得，函数 $y = f(x)$ 满足如下微分方程：

$$y' = \frac{1}{8}y^2 \iff \frac{1}{y} = -\frac{1}{8}x + C$$

由 $y(0) = 2$ 得 $C = \dfrac{1}{2}$，因而

$$y = f(x) = \frac{8}{4 - x}$$

三、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 有三阶导数，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$，试证明：

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty} f''(x)=0$$

证明： 利用 **Taylor** 展开式，得到

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x-1<\xi_1<x$$
$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x<\xi_2<x+1$$

两式分别相减和相加，得到

$$f'(x)=\frac{1}{2}\big[f(x+1)-f(x-1)\big]-\frac{1}{12}\big[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\big]$$
$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)-\frac{1}{6}\big[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)\big]$$

由上式和已知条件

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A,\ \lim_{x\to\infty} f'''(x)=0$$

立即得到

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty} f''(x)=0$$

四、（本题 10 分）设函数 $f(x)=\int_0^1 \left|t^3-x^3\right| \mathrm{d}t$，试求 $f(x)$ 的最小值。

解：根据定义有

$$f(x)=\int_0^1 \left|t^3-x^3\right| \mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}\int_0^1 (t^3-x^3)\,\mathrm{d}t, & x\leqslant 0\\ \int_0^x (x^3-t^3)\,\mathrm{d}t+\int_x^1 (t^3-x^3)\,\mathrm{d}t, & 0<x<1\\ \int_0^1 (x^3-t^3)\,\mathrm{d}t, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}-x^3, & x\leqslant 0\\ \frac{3}{2}x^4-x^3+\frac{1}{4}, & 0<x<1\\ x^3-\frac{1}{4}, & x\geqslant 1\end{cases}$$

显然，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调减少，最小值为 $f(0)=\frac{1}{4}$；
当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 单调增加，最小值为 $f(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$；
而当 $0<x<1$ 时，有

$$f(x)=\frac{3}{2}x^4-x^3+\frac{1}{4},\quad f'(x)=3x^2(2x-1)$$

易知在区间 $(0,1)$ 内，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得最小值，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{32}$。因而有

$$\min_x f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{32}$$

五、(本题 10 分) 对于正整数 n，设 a_n 是曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 所围成的区域面积，试求 $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}$ 的值。

解： 依题意有

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\,\mathbf{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

因此有

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$$

考虑函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}x^{2n+1}$$

易知 $f(x)$ 的收敛域为 $[-1,1]$。对 $f(x)$ 逐项求导，得到

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n-1}=\frac{x}{1-x^2},\ \ x\in(-1,1)$$

对 $f''(x)$ 积分两次，注意到 $f(0)=f'(0)=0$，得到

$$f(x)=x-\frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x)+\frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x)$$

从而有

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=\lim_{x\to1^-}f(x)=1-\ln 2$$

六、(本题 12 分) 依次证明下列问题：①、证明对任意的非负整数 n，方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$ 有唯一的实根 x_n；②、证明序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，并记这个极限为 A，求 A；③、证明当 $n\to+\infty$ 时，$x_n - A$ 与 $1/n$ 是同阶的无穷小。

证明： ①、令 $f_n(x) = e^x + x^{2n+1}$，则易知对任意的非负整数 n，$f_n(x)$ 是严格单调增加的函数。注意到

$$f_n(-1) = e^{-1} - 1 < 0,\ \ f_n(0) = 1 > 0$$

因此由单调性和介值定理知，函数 $f_n(x)$ 存在唯一的零点 $x_n \in (-1, 0)$。

②、根据①中的结论，得到

$$f_n(x_n) = e^{x_n} + (x_n)^{2n+1} = 0 \implies x_n = -e^{\frac{x_n}{2n+1}}$$

由于 $-1 < x_n < 0$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{2n+1} = 0$。从而由连续性可知，序列 $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ 的极限存在，并且有

$$A = \lim_{n\to+\infty} x_n = -e^0 = -1$$

③、由 **Lagrange** 中值定理可知

$$x_n - A = x_n + 1 = e^0 - e^{\frac{x_n}{2n+1}} = -e^{\xi_n} \cdot \frac{x_n}{2n+1}$$

其中 ξ_n 介于 $\dfrac{x_n}{2n+1}$ 与 0 之间，于是

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - A}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(-e^{\xi_n} \cdot x_n \cdot \frac{n}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

得证。

七、(本题 10 分) 设无穷级数 $a_1 + \frac{a_2}{1+x} + \frac{a_3}{(1+x)^2} + \frac{a_4}{(1+x)^3} + \cdots$，其中 $a_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{2}$，求此无穷级数的收敛域$D$，并求其和函数$S(x)$。

解: 首先注意到，当 $m = 0, 1, 2, \cdots$ 时有

$$a_n = 2^n \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 4m \\ 2^n, & n = 4m+1 \\ 0, & n = 4m+2 \\ -2^n, & n = 4m+3 \end{cases}$$

于是，原级数为

$$2 - \frac{2^3}{(1+x)^2} + \frac{2^5}{(1+x)^4} - \cdots = 2\left[1 - \frac{2^2}{(1+x)^2} + \frac{2^4}{(1+x)^4} - \cdots\right]$$

显然，当 $\left|\frac{2}{1+x}\right| < 1$ 时，上述级数收敛，其和函数 $S(x)$ 为

$$\begin{aligned} S(x) &= 2\left[1 - \frac{2^2}{(1+x)^2} + \frac{2^4}{(1+x)^4} - \cdots\right] \\ &= \frac{2}{1 + \left(\frac{2}{1+x}\right)^2} \\ &= \frac{2(1+x)^2}{(1+x)^2 + 4} \end{aligned}$$

收敛域为

$$\left|\frac{2}{1+x}\right| < 1 \iff D = (-\infty, -3) \bigcup (1, +\infty)$$

八、(本题 10 分) 设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数。①、试证明：存在点 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积；②、如果进一步假设 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，试证明①中的 $x_0\in(0,1)$ 是唯一的。

解: ①、首先注意到在给定的条件下，证明的目标是：$\exists x_0\in(0,1)$ 使得

$$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\,\mathbf{d}t$$

为此，我们令

$$g(x)=-x\int_x^1 f(t)\,\mathbf{d}t,\ \ x\in[0.\ 1]$$

则 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且有 $g(0)=g(1)=0$，所以由 **Rolle** 定理知，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $g'(x_0)=0$。由于

$$g'(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\,\mathbf{d}t$$

所以有

$$g'(x_0)=0\iff x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(t)\,\mathbf{d}t$$

②、对 $g'(x)=xf(x)-\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathbf{d}t$ 求二阶导数，并注意到 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，得到

$$g''(x)=f(x)+xf'(x)+f(x)=2f(x)+xf'(x)>0$$

即 $g'(x)$ 是 x 的单调函数，故①中的零点 x_0 是唯一的。