(6) 设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域,其面积为 $A>0$,函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续且 $f(x,y)>0$. 记 $J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma\right)^n$, 则极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n=$ ______________。

得分	
评阅人	

二（本题满分 12 分）设 $\vec{l_j},\ j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n\geq 2$ 个方向向量，相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$。若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导数，证明 $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l_j}}=0$。

省市________ 学校________ 准考证号________ 姓名________

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

三（本题满分 14 分）设 A_1, A_2，B_1, B_2 均为 n 阶方阵，其中 A_2, B_2 可逆。证明：存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$PA_iQ = B_i \ (i = 1, 2)$$

成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似。

得分	
评阅人	

四（本题满分 14 分）设 $p>0$，$x_1=\dfrac{1}{4}$，且 $x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛且求和。

省市________学校________准考证号________姓名________

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

五 (本题满分 15 分) （1）将$[-\pi,\pi)$上的函数$f(x)=|x|$展开成傅里叶级数, 并证明$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

（2）求积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}du$的值.

得分	
评阅人	

六 (本题满分 15 分) 设 $f(x,y)$ 为 R^2 上的非负连续函数, 若 $I=\lim\limits_{t\to+\infty}\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)d\sigma$ 存在有限, 则称广义积分 $\iint_{R^2} f(x,y)d\sigma$ 收敛于 I.

(1) 设 $f(x,y)$ 为 R^2 上非负连续函数. 若 $\iint_{R^2} f(x,y)d\sigma$ 收敛于 I, 证明极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\iint_{-t\le x,y\le t} f(x,y)d\sigma$ 存在且等于 I.

(2) 设 $\iint\limits_{R^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2}d\sigma$ 收敛于 I, 其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于 0.

姓名________ 准考证号________ 学校________ 省市________

密封线 密封线 密封线

第六届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(非数学类, 2015 年 3 月)

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30 分	12 分	14 分	14 分	15 分	15 分	100 分
得分							

注意：本试卷共六大题，满分 100 分, 考试时间为 180 分钟.

1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边, 写在其他纸上无效.

2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3 当题空白不够, 可写在当页背面, 并注明题号.

得分	
评阅人	

一 填空题 (本题满分 30 分, 共 6 小题, 每小题 5 分)

（1）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$ 的值是____________。

（2）设实数 $a\neq 0$，微分方程 $\begin{cases} y''(x)-a\left[y'(x)\right]^2=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=-1 \end{cases}$ 的解是____________。

（3）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 则 $A^{50}=$____________。

（4）不定积分 $\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx=$____________。

（5）设曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针，则 $I=$____________。