

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷

(数学类 2011)

一、(本题15分)已知四点 $A(1,2,7)$, $B(4,3,3)$, $C(5,-1,6)$, $D(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$, 试求过这四点的球面方程

二、(本题10分) 设 f_1, f_2, \dots, f_n 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$ 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx$$

三、(本题15) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma: F^n \rightarrow F^n$ 是一个线性变换, 若对 F 上的任何 n 阶方阵 A , $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$, ($\forall \alpha \in F^n$), 证明: $\sigma = \lambda \cdot id_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示 F^n 上的恒等变换

四、(本题10分), 对于 $\triangle ABC$, 求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值

五、(本题15分), 对于任何实数 α , 求证: 存在取值于 $(-1, 1)$ 的数列 $\{a_n\}$

$$\text{满足: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha$$

六、(本题20分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵, 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$

七、(本题15分), 设 $F(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x F(t) \sin \frac{t}{x} dt = 0$

证明: (1): $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$

(2): $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0$

注: 最后少打印一条件 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} F(x) = 0$