专业:________

考生座位号:________

所在院校:________

准考证号:________

姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

第六届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷

(数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

(1)实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为 _____.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和为 _____.

(3) 计算第一型曲面积分的值:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2)\,\mathrm{d}S = \_\_\_\_\_.$$

(4) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n > 1)$, $\mathrm{rank}(A) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0.设 $2, 3, \ldots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式. 则有 $A_{11} =$_____.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分)设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、（本题15分）设 $\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix} \middle| z_1,z_2\in\mathbb{C}\right\}$，其中 $\mathbb{C}$ 表示复数域. 试证明： $\forall A\in\Gamma$, A 的Jordan标准形 J_A 仍然属于 Γ; 进一步还存在可逆矩阵 $P\in\Gamma$ 使得 $P^{-1}AP=J_A$.

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求满足不等式

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty$$

的最大常数 α.

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设$a(t), f(t)$ 为实连续函数，$\forall t \in \mathbb{R}$ 有 $f(t) > 0, a(t) \geqslant 1$. $\int_0^\infty f(t)dt = +\infty$. 已知 C^2 函数 $x(t)$满足

$$x''(t) + a(t)f(x(t)) \leqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

求证：$x(t)$ 在$[0, +\infty)$ 有上界.

得分	
评阅人	

六、（本题15分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2dx,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

第六届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷
(数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1)实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型 $= \underline{z_1^2 + z_2^2 - z_3^2}$.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ 的和 $= \underline{\frac{3}{4}}$.

(3) 计算第一型曲面积分的值: $I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}s = \underline{8\pi}$.

(4) $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\mathrm{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\ldots,n$ 为 A 的全部非零特征值。用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式. 则有 $A_{11} = \underline{(n-1)!}$.

(4)解: 1) 秩$A=n-1 \Rightarrow$ 秩$A^*=1$ 且$Ax=0$的解空间维数为1.

A的行和 $=0 \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow Ax=0$ 的一组基础解系为$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

2)注意到$AA^*=0$, 从而A^*的每一列均形如$a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.又由于$A$为实对称矩阵,

故A^*也为实对称矩阵。故$A^*=\begin{pmatrix}a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a & \cdots & a\end{pmatrix}$.

3)考虑特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I - A| = \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n).$$

其一次项系数为$(-1)^{n-1}n!$. 另一方面，由$f(\lambda)=|\lambda I-A|$又知，其一次项系数为$(-1)^{n-1}(A_{11}+\cdots A_{nn})$.结果 $a=(n-1)!$.

二、(本题 15 分)设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

解: 以 l 为 z 轴, 以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系。可设 $P:(p,0,0)$， l 的参数方程 $l: x=0, y=0, z=t$.

设球面 C 的球心为(x_0,y_0,z_0), 由于 C 过点 P , 则

$$C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(p-x_0)^2+y_0^2+z_0^2.$$

.... 4分

求 l 与 C 的交点：将 l 的参数方程代入 C,

$$x_0^2+y_0^2+(t-z_0)^2=(p-x_0)^2+y_0^2+z_0^2.$$

即

$$t^2-2z_0t+(2px_0-p^2)=0. \tag{1}$$

由此得到两个解为

$$t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}.$$

故弦长 $a=|t_1-t_2|=2\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$, 从而

$$z_0^2-2px_0+p^2-\frac{a^2}{4}=0. \tag{2}$$

.... 10分

反之, 如果球面 C 的球心满足(2), 如果 C 过点 P, 此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta=4z_0^2-4(2px_0-p^2)=a^2\geq 0,$$

方程有两个实根

$$t_{1,2}=z_0\pm\frac{a}{2}.$$

从而 C 和 l 相交, 而且截出来弦长为 a.

故所求的轨迹为

$$z^2-2px+p^2-\frac{a^2}{4}=0.$$

.... 15分

姓名：＿＿＿＿ 准考证号：＿＿＿＿ 所在院校：＿＿＿＿ 考生座位号：＿＿＿＿ 专业：＿＿＿＿

密封线 答题时不要超过此线

三、证明题（15分）设$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix} | z_1, z_2\in\mathbb{C}\right\}$，其中$\mathbb{C}$ 表复数域。试证明：$\forall A\in\Gamma$，A的Jordan标准形J_A 仍然属于Γ；进一步还存在可逆的矩阵$P\in\Gamma$ 使得$P^{-1}AP=J_A$.

证明：对$A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix}$，其特征方程为

$$0=|\lambda I-A|=\lambda^2-2Rez_1\lambda+|z_1|^2+|z_2|^2.$$

$$\Delta=4(Rez_1)^2-4(|z_1|^2+|z_2|^2)\leqslant 0.$$

…………………………2分

情形1. $\Delta=0$.

此时，$z_2=0, z_1=Rez_1$，从而$A=\begin{pmatrix} Rez_1 & 0 \\ 0 & Rez_1\end{pmatrix}=J_A\in\Gamma$. 取$P=I$即有$P_{-1}AP=J_A$。 …………………………………………………………8分

情形2. $\Delta<0$.

此时A 的特征值为

$\lambda_1=Rez_1+i\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-(Rez_1)^2}, \lambda_2=Rez_1-i\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-(Rez_1)^2}$,

$\lambda_2=\overline{\lambda_1}, \lambda_1\neq\lambda_2$.

从而$J_A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\in\Gamma$.

现取A 关于 λ_1的一个非0特征向量$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$. 则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{z_1}\overline{x}+\overline{z_2}\overline{y}=\overline{\lambda_1}\overline{x}\\ z_2\overline{x}-z_1\overline{y}=-\overline{\lambda_1}\overline{y}\end{cases}$$

直接检验知$A\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x}\end{pmatrix}=\overline{\lambda_1}\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x}\end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x}\end{pmatrix}$ 为A 关于 $\overline{\lambda_1}$的一个非0特征向量。令$P=\begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \overline{x}\end{pmatrix}$,则有$P$可逆，且$P\in\Gamma, P^{-1}AP=J_A$. ……………15分

四、（本题20分）设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty.$$

证明: α 的最大值为 $\frac{1}{2}$. 2分

若 $\alpha>\frac{1}{2}$, 取 $x_n=(n\pi)^{-1}, y_n=((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$. 则

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|^{\alpha}}=2^{\alpha}\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}(1+\frac{1}{2n})^{\alpha-1}\to\infty.$$

.... 5分

下证 $\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}}<+\infty$.

由于 $f(x)$ 为偶函数，不妨设 $0\leq x<y$. 令

$$z=\sup\{u\leq y|f(u)=f(x)\},$$

则 $z^{-1}\leq y^{-1}+2\pi$. 10分

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |f(z)-f(y)|\\
&\leq \int_z^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t\leq |y-z|^{\frac{1}{2}}(\int_z^y f'(t)^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq |x-y|^{\frac{1}{2}}(\int_z^y(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t})^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{s=t^{-1}}{=} |x-y|^{\frac{1}{2}}(\int_{y^{-1}}^{z^{-1}}(\frac{\sin s}{s}-\cos s)^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq |x-y|^{\frac{1}{2}}(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\pi}|x-y|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

.... 20分

五、（本题15分）设$a(t), f(t)$ 为实连续函数，$\forall t\in\mathbb{R}$ 有 $f(t)>0, a(t)\geqslant 1$. $\int_0^{\infty}f(t)dt=+\infty$. 已知$x(t)$满足

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

求证：$x(t)$ 在$[0,+\infty)$ 有上界.

证明: 由

$$x''(t)\leq -a(t)f(x(t))<0,$$

$x(t)$是上凸的. 3分

故 $\lim_{t\to\infty}x'(t)$ 存在或为 $-\infty$.

若 $\overline{\lim}_{t\to\infty}x(t)=+\infty$, 则 $x'(t)>0$, $\lim_{t\to\infty}x(t)=+\infty$. 6分
故

$$x'(t)f(x(t))\le a(t)x'(t)f(x(t))\le -x'(t)x''(t),$$

积分得

$$\int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}x(s)\le \frac{x'(0)^2-x'(t)^2}{2}\le\frac{x'(0)^2}{2}.$$

令 $t\to\infty$ 得

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{x'(0)^2}{2},$$

矛盾。...15分

六、（本题15分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2dx,$$

等号当且仅当 $f(x)=A(x-x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

证明: 分部积分可得

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx.$$

..........................5分

因此根据 Newton-Leibniz 公式, 得

$$6\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1(1-3x^2)f'(x)\,dx.$$

..........................8分

再根据 Cauchy 积分不等式, 得

$$\begin{aligned}36\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2&\leqslant\int_0^1(1-3x^2)^2\,dx\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\\&=\frac{4}{5}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.\end{aligned}$$

..........................12分

由此即得

$$\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2\leqslant\frac{1}{45}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.$$

等号成立当且仅当 $f'(x)=A(1-3x^2)$. 积分并由 $f(0)=f(1)=0$ 即得 $f(x)=Ax(1-x)(1+x)$. 15分