考场______ 座位号______

准考证号______

姓名______

院系______

学校______

答 题 请 勿 超 过 此 密 封 线

第二十四届北京市大学生数学竞赛试卷（经济管理类）

考试时间：2013 年 10 月 26 日上午 9:00 至 11:30　　考试形式：闭卷考试

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总　分
得　分									
评　阅									
审　核									

一、填空题 (本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 设函数 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$ ________。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ x+a, & 0\leqslant x<1 \\ 1+b\sin(x-1), & x\geqslant 1 \end{cases}$ 在点 $x=0$, $x=1$ 处可导，则参数 a 与 b 的和 $a+b=$ ______。

3. 设 $f(x)=e^{x^2}\sin x^4$，则高阶导数 $f^{(2013)}(0)=$ ______。

4. 将函数 $f(x)=e^x$ 在区间 $[0,x]\ (x>0)$ 上应用拉格朗日定理得 $e^x-1=xe^{\theta x}\ (0<\theta<1)$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$ ______。

5. 设函数 $f(x)$ 是一个非负的连续函数，且满足方程 $f(x)f(-x)=1$, $x\in(-\infty,+\infty)$，则定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}\mathrm{d}x=$ ______。

6. 二重积分 $I=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(4-5\sin x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________。

7. 使得级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi}{n^x}$ 收敛的 x 的取值范围是________。

8. 若方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 可以确定隐函数 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$，那么乘积 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________。

9. 微分方程初值问题 $xy(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$, $y(1)=0$ 的解是 ____________。

10. 已知 $\mathrm{d}f(x,y)=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\mathrm{d}y$，则 $f(x,y)=$ ______________。

二、(本题 8 分) 试求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\arctan\dfrac{a}{x}-\arctan\dfrac{a}{x+1}\right)$。

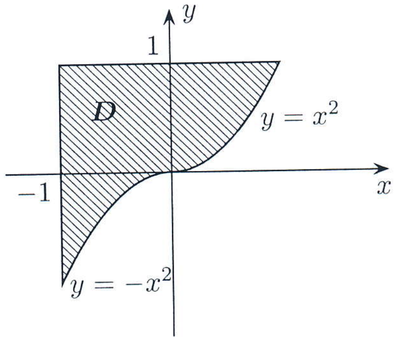
三、(本题 10 分) 设半径为 r 的圆与某条直线 ℓ 相切，切点为 O，过圆上的一点 P 作切线 ℓ 的垂线，垂足为 Q。试求由点 P、Q 及切点 O 所构成的三角形的最大面积。

四、(本题 10 分) 试求函数 $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$，$x,y>0$ 的极值。

五、(本题 12 分) 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的收敛性，其中 $x>0$。

题 答 勿 请 内 线 考 参

六、(本题 10 分) 设 D 是由 $y=x^2\,(0\leqslant x\leqslant 1)$，$y=-x^2\,(-1\leqslant x\leqslant 0)$，$y=1$ 以及 $x=-1$ 所围成的平面区域，试求二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D x\left[1+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\sin\left(x^2+y^2\right)\right]\mathbf{d}x\mathbf{d}y$。



七、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 \mathrm{d}x$$

八、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上二次可导，且 $|f(x)| \leqslant a$, $|f''(x)| \leqslant b$，则

$$\left|f'(x)\right| \leqslant 2a + \frac{b}{2},\ \ x \in [0,\ 1]$$