第六届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(非数学类, 2015 年 3 月)

1）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$ 的值是 ———。答案 0

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{u^2}du}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{u^2}du}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$

(2）设实数 $a\neq 0$，微分方程 $\begin{cases} y''-ay'^2=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=-1\end{cases}$ 的解是———。

答案：$y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$ 解： 记 $p=y'$，则 $p'-ap^2=0$，就是

$\dfrac{dp}{p^2}=adx$，从而 $-\dfrac{1}{p}=ax+c_1$，由 $p(0)=-1$ 得 $c_1=0$。故有

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{ax}$，$y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+c_2)$。再有 $y(0)=0$ 得 $c_2=1$，故 $y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$。

(3）设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$, 则 A^{50} =—————。

答案：$\begin{pmatrix}\lambda^{50} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{50} & 0\\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & \lambda^{50}\end{pmatrix}$

解： 记 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则 B^2 为零矩阵，故

$$A^{50}=(\lambda E+B)^{50}=\lambda^{50}E+50\lambda^{49}B=\begin{pmatrix}\lambda^{50} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{50} & 0\\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & \lambda^{50}\end{pmatrix}。$$

（4）不定积分 $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ 是————。

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+c \quad 或 \quad I=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}x-1)+\arctan(\sqrt{2}x+1)\right]+c$$

解：$$I=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{1}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+c$$

（5）设曲线积分 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针，则 $I=$———。

答案：4

解：曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，记该曲线所围区域为 D。由格林公式

$$I=\oint_L xdy-ydx=\iint_D(1+1)dxdy=2\sigma(D)=4$$

（6）设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域，其面积为 $A>0$，函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续且 $f(x,y)>0$．记 $J_n=\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{1/n}(x,y)d\sigma\right)^n$，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n$．

答案：$\exp\left(\frac{1}{A}\iint_D\ln f(x,y)d\sigma\right)$

解．设 $F(t)=\frac{1}{A}\iint_D f^t(x,y)d\sigma$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\lim\limits_{t\to0^+}\left(F(t)\right)^{1/t}=\lim\limits_{t\to0^+}\exp\frac{\ln F(t)}{t}$.

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)-\ln F(0)}{t-0}=\left(\ln F(t)\right)'\Big|_{t=0}=\frac{F'(0)}{F(0)}=F'(0).$$

故有 $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=\exp\left(F'(0)\right)=\exp\left(\frac{1}{A}\iint_D\ln f(x,y)d\sigma\right)$.

二（本题满分 12 分）设$\vec{l}_j$, $j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的$n\ge 2$个方向向量，相邻两个向量之间的夹角为$\frac{2\pi}{n}$。若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导，证明$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j}=0$。

证：不妨设$\vec{l}_j$为单位向量，且设

$$\vec{l}_j=\left(\cos\left(\theta+\frac{j2\pi}{n}\right),\sin\left(\theta+\frac{j2\pi}{n}\right)\right),\quad \nabla f(P_0)=\left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x},\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\right),$$

则有 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j}=\nabla f(P_0)\cdot\vec{l}_j。$$ ....(6 分)

因此 $$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j}=\sum_{j=1}^{n}\nabla f(P_0)\cdot\vec{l}_j=\nabla f(P_0)\cdot\sum_{j=1}^{n}\vec{l}_j=\nabla f(P_0)\cdot\vec{0}=0$$ ....(12 分)

三 设 A_1,A_2, B_1,B_2 均为 n 阶方阵，其中 A_2,B_2 可逆。证明：存在可逆阵 P,Q 使 $PA_iQ=B_i(i=1,2)$ 成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似。

证 若存在可逆阵 P,Q 使 $PA_iQ=B_i(i=1,2)$，则 $B_2^{-1}=Q^{-1}A_2^{-1}P^{-1}$，所以

$B_1B_2^{-1}=PA_1A_2^{-1}P^{-1}$，故 $A_1A^{-1}{}_2$ 和 $B_1B^{-1}{}_2$ 相似。..(6 分)

反之，若 $A_1A^{-1}{}_2$ 和 $B_1B^{-1}{}_2$ 相似，则存在可逆阵C，使$C^{-1}A_1A_2^{-1}C=B_1B_2^{-1}$。于是

$C^{-1}A_1A_2^{-1}CB_2=B_1$。令 $P=C^{-1}$，$Q=A_2^{-1}CB_2$，则 P,Q 可逆，且满足

$$PA_iQ=B_i(i=1,2)$$ ....(14 分)

四 设 $p>0$，$x_1=\frac{1}{4}$，$x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$收敛并求其和。

【解】记 $y_n=x_n^p$，由题设，$y_{n+1}=y_n+y_n^2$，$y_{n+1}-y_n=y_n^2\ge 0$，所以

$y_{n+1}\ge y_n$。 ....(2 分)

设 y_n 收敛，即有上界，记 $A=\lim_n y_n\ge\left(\frac{1}{4}\right)^p>0$。从而 $A=A+A^2$，所以 A=0，矛盾。

故 $y_n\to+\infty$。....................(8 分)

由 $y_{n+1}=y_n(1+y_n)$，即 $\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n(1+y_n)}=\frac{1}{y_n}-\frac{1}{1+y_n}$ 得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{y_k}-\frac{1}{y_{k+1}}\right)=\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{n+1}}\to\frac{1}{y_1}=4^p。$$ ....(14 分)

五 （1）展$[-\pi,\pi)$上的函数$f(x)=|x|$成傅里叶级数，并证明$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

（2）求积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}du$的值.

解 (1) $f(x)$为偶函数，其傅里叶级数是余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\frac{4}{\pi n^2}, & n=1,3,\cdots\\ 0, & n=2,4,\cdots\end{cases}.$$

由于$f(x)$连续，所以当$x\in[-\pi,\pi)$有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right).$$

令$x=0$得到$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 记$s_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$，$s_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$，则$s_1-s_2=\frac{1}{4}s_1$，故

得$s_1=\frac{4s_2}{3}=\frac{\pi^2}{6}$. ....(5 分)

（2）记$g(u)=\frac{u}{1+e^u}$，则在$[0,+\infty)$上成立

$$g(u)=\frac{ue^{-u}}{1+e^{-u}}=ue^{-u}-ue^{-2u}+ue^{-3u}-\cdots.$$

记该级数的前n项和为$S_n(u)$，余项为$r_n(u)=g(u)-S_n(u)$. 则由交错（单调）级数的性质

$$|r_n(u)|\le ue^{-(n+1)u}.$$

因为$\int_0^{+\infty}ue^{-nu}du=\frac{1}{n^2}$，就有$\int_0^{+\infty}|r_n(u)|du\le\frac{1}{(n+1)^2}$，这样就有

$$\int_0^{+\infty}g(u)du=\int_0^{+\infty}S_n(u)du+\int_0^{+\infty}r_n(u)du=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}+\int_0^{+\infty}r_n(u)du$$ ....(13 分)

由于$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}r_n(u)du=0$，故

$$I=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

所以$I+\frac{1}{2}s_1=s_1$. 再由(1)所证得$I=\frac{s_1}{2}=\frac{\pi^2}{12}$. ....(15 分)

六 设 $f(x,y)$ 为 R^2 上的非负的连续函数，若 $I=\lim\limits_{t\to+\infty}\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)d\sigma$ 存在有限，则称广义积分 $\iint_{R^2} f(x,y)d\sigma$ 收敛于 I.

（1） 设 $f(x,y)$ 为 R^2 上非负且连续．若 $\iint_{R^2} f(x,y)d\sigma$ 收敛于 I，证明极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\iint_{-t\le x,y\le t} f(x,y)d\sigma$ 存在且收敛于 I.

（2） 设 $\iint\limits_{R^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2}d\sigma$ 收敛于 I，其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$．证明 λ_1 和 λ_2 都小于 0.

解.（1） 由于 $f(x,y)$ 非负，

$$\iint_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)d\sigma\le\iint_{-t\le x,y\le t} f(x,y)d\sigma\le\iint_{x^2+y^2\le 2t^2} f(x,y)d\sigma.$$

当 $t\to+\infty$，上式中左右两端的极限都收敛于 I，故中间项也收敛于 I. ....(3 分)

（2） 记 $I(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2}dxdy$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=I$.

记 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$，则 $ax^2+2bxy+cy^2=(x,y)A\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$. 因 A 实对称，存在正交矩阵 P 使得

$P^TAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，其中 λ_1,λ_2 是 A 的特征值，也就是标准型的系数.

在变换 $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}$ 下，有 $ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$. 又由于

$$u^2+v^2=(u,v)\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=P(x,y)\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}P^T=(x^2+y^2)PP^T=x^2+y^2,$$

故变换把圆盘 $x^2+y^2\le t^2$ 变为 $u^2+v^2\le t^2$，且 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=|P|=1$

$$I(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\le t^2} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\iint\limits_{u^2+v^2\le t^2} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}dudv.$$

由 $\lim\limits_{t\to+\infty}I_t=I$ 和 (1) 所证得：$\lim\limits_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\le u,v\le t} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}dudv=I$. 在矩形上分离积分变量得，

$$\iint\limits_{-t\le u,v\le t} e^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}dudv=\int_{-t}^{t}e^{\lambda_1u^2}du\int_{-t}^{t}e^{\lambda_2v^2}dv=I_1(t)I_2(t).$$

因为 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 都是严格单调增加, 故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} e^{\lambda_1 u^2}du$ 收敛, 就有 $\lambda_1<0$.

同理 $\lambda_2<0$. ....(15 分)