学校______ 院系______ 姓名______ 准考证号______

装订线内请勿答题

第四届广东省大学生数学竞赛试卷（高职高专类）

考试时间：2014 年 10 月 25 日上午 9:00-11:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅										
审核										

一、(本题共15分，每小题3分) 单项选择题(将正确答案的字母填在题后的括号内)

1. 以下语句可以作为函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义的是【　】.

(A) 对任何正数 δ，存在正数 ε，当 $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 时都有 $|f(x)-A|<\delta$

(B) 对任何正数 δ，存在正数 ε，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

(C) 存在正数 ε，对任何正数 δ，当 $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 时都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

(D) 存在正数 δ，对任何正数 ε，当 $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 时都有 $|f(x)-A|<\delta$

2. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt$，$g(x)=x^3+x^4$，当 $x\to 0$ 时 $f(x)$，$g(x)$ 都是无穷小，则【　】.

(A) $f(x)$，$g(x)$ 等价　　(B) $f(x)$，$g(x)$ 同阶非等价

(C) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小　　(D) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小

3. 函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 上单调，则 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$【　】.

(A) 都存在且相等　　(B) 都存在不一定相等

(C) 只有一个存在　　(D) 都不存在

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 的不可导点的个数为【　】.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则还需满足以下哪一条件才能断定 $\{x_n\}$ 收敛【　】.

(A) $\{x_n\}$ 是单调的　　(B) $\{x_n\}$ 是有界的

(C) $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 分别是单调的　　(D) $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 之一是收敛的

二、（本题共15分，每小题3分）填空题

1. $\int_{-1}^{+1} x\sin\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx$ = ________ .

2. $\int \frac{1-\ln x}{\left(x-\ln x\right)^{2}}dx =$ ________.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n+1}+\frac{\cos\frac{2\pi}{2n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\cos\frac{n\pi}{2n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$ ________ .

4. 设 $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{\ln t}{1+t^{2}}dt$，则 $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=$ ________ .

5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义且在 x_0 可导，且

$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(x_0-\delta, x_0) \\ g(x), & x\in[x_0, x_0+\delta) \end{cases}$，若 $f'(x_0)=g'(x_0)$，能否保证 $h(x)$ 在 x_0 可导？

答：________

三、**（本题10分）**求不定积分 $\int\frac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$.

四、（本题10分）设 $f(x)=\arctan x$，求 $f^{(n)}(0)$.

五、（本题 10 分）设 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $a_{n+2}=\dfrac{2a_n a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在并求极限值.

六、（**本题 10 分**）设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对一切 x 都有 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$，证明：方程 $f(x)=0$ 的任何两个不同根之间必有 $g(x)=0$ 的根.

七、（**本题 10 分**）斜边为定长的直角三角形薄板，垂直放置水中，并使一直角边与水面相齐，问三角形的一锐角为多大时，薄板所受的水压力为最大？