

姓名：_____

准考证号：_____

所在院校：_____

考生座位号：_____

专业：_____

线
—
封
—
密

第四届全国大学生数学竞赛预赛试卷
(数学类, 2012)

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	15	15	10	10	10	15	25	100
得 分								

- 注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。
3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号。

得 分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

得 分	
评阅人	

二 （本题 15 分）设 Γ 为抛物线， P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明： $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

密

封

线

得 分	
评阅人	

三、（本题 10 分）设 $f \in C^1[0,+\infty)$ ， $f(0) > 0$ ， $f'(x) \geq 0$ ，
 $\forall x \in [0,+\infty)$.若 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)+f'(x)} < +\infty$ ， 求证： $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < +\infty$.

得 分	
评阅人	

四、（ 本 题 10 分 ） 设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵，

$P(t) = At^2 + Bt + C$ ， $f(t) = \det P(t)$ ，其中 t 为未定元， $\det P(t)$ 表

示 $P(t)$ 的行列式。若 λ 为 $f(t)$ 的根，证明： λ 的实部为负数.

线

封

密

得 分	
评阅人	

五 （本题 10 分）已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\sum_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ ， $|x|<1$ ，

n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1}a_i$.

得 分	
评阅人	

六、（本题 15 分）设 $f:[0,1]\rightarrow R$ 可微，其中 R 为实数集. 已知 $f(0)=f(1)$ ， $\int_0^1f(x)dx=0$ ，且对任

意 $x\in[0,1]$ 有 $f'(x)\neq 1$. 求证：对任意正整数 n ，有 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}$.

得 分	
评阅人	

七、(本题 25 分) 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

证明:

(1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $\begin{cases} a \neq 2 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$;

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $\begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$;

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $\begin{cases} a < 2 \\ b = 3 \end{cases}$.