

2014 年全国大学生数学竞赛预赛试题参考答案

一 填空题(共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是_____.

答案: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

[参考解答] 由题设知该方程的特征方程有二重根 $r=1$, 故所求微分方程是 $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$.

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $L: 2x + 2y + z = 0$, 则与 L 平行的 S 的切平面方程是_____.

答案: $2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0$

[参考解答] 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 S 上一点, 则 S 在 P_0 的切平面方程是

$$-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

由于该切平面与已知平面 L 平行, 则 $(-2x_0, -4y_0, 1)$ 平行于 $(2, 2, 1)$, 故存在常数 $k \neq 0$ 使得

$(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2, 2, 1)$, 从而 $k = 1$. 故得 $x_0 = -1$, $y_0 = \frac{-1}{2}$, 这样就有 $z_0 = \frac{3}{2}$. 所求切面方程是

$$2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0.$$

(3) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_0^{y-x} \sin^2 t \, dt$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

答案: $y' = 3$

[参考解答] 易知在 $y(0) = 1$. 对方程的两边关于 x 求导, 得 $1 = \sin^2(y-x) \cdot (y-x)'$, 于是

$y' = \csc^2(y-x) + 1$, 把 $x = 0$ 代入上式, 得 $y' = 3$.

(4) 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

答案: 1

[参考解答] $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 1.$$

(5) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: 2

[参考解答] 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 3$, 于是有 $\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 3 + a$,

其中 $a \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 即有 $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^{3x+ax} - 1}{x^2} - 1$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+ax} - 1}{x^2} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + ax}{x} - 1 = 2.$$

二 (本题满分 12 分) 设 n 为正整数, 计算 $I = \int_0^1 \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx$.

[参考解答与评分标准]

$$I = \int_0^1 \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \cos(\ln x) dx = \int_0^1 |\sin \ln x| \frac{1}{x} dx. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \ln x = u, \text{ 则有 } I = \int_0^1 |\sin u| du = \int_0^1 |\sin t| dt = 4n \int_0^{1/2} |\sin t| dt = 4n. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

三 (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且有正常数 A, B 使得 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$.

证明: 对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $|f(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}$.

[参考解答与评分标准] 由泰勒公式, 有

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2} f''(\xi)(0-x)^2, \quad x \in (0, x), \\ f(1) &= f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2} f''(\eta)(1-x)^2, \quad \eta \in (x, 1), \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

上述两式相减, 得到 $f(0) - f(1) = -f'(x) - \frac{1}{2} f''(\eta)(1-x)^2 + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2$, 于是

$$f'(x) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2} f''(\eta)(1-x)^2 + \frac{1}{2} f''(\xi)x^2. \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

由条件 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$, 得到

$$|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2} \left((1-x)^2 + x^2 \right). \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

因 $x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ 在 $[0, 1]$ 的最大值为 1, 故

$$|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}. \quad \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

四 (本题满分 14 分) (1) 设一球缺高为 h , 所在球半径为 R . 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3} (3R - h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 W . 记球缺上的球冠为 S , 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \oiint_S xdydz + ydzdx + zxdy.$$

[参考解答与评分标准] (1) 设球缺所在的球体表面的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 球缺的中心线为 z 轴, 且设球缺所在圆锥顶角为 2α . 记球缺的区域为 W , 则其体积为

$$\iiint_W dv = \int_{R-h}^R dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{R-h}^R \rho(R^2 - z^2) dz = \frac{\rho}{3} (3R - h)h^2. \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

由于球面的面积微元是 $dS = R^2 \sin \varphi d\varphi$, 故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha R^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi Rh. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

(2) 记球缺 W 的底面圆为 P_1 , 方向指向球缺外, 且记 $J = \oiint_{P_1} xdydz + ydzdx + zxdy$. 由 Gauss 公式, 有

$$I + J = \oiint_W 3dv = 3v(W), \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

其中 $v(W)$ 为 W 的体积. 由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 故

$$J = \frac{-1}{\sqrt{3}} \oiint_{P_1} (x+y+z) dS = \frac{-6}{\sqrt{3}} s(P_1) = -2\sqrt{3}s(P_1),$$

其中 $s(P_1)$ 是 P_1 的面积. 故 $I = 3v(W) - J = 3v(W) + 2\sqrt{3}s(P_1)$. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})

因为球缺底面圆心为 $Q = (2, 2, 2)$, 而球缺的顶点为 $D = (3, 3, 3)$, 故球缺的高度 $h = |QD| = \sqrt{3}$. 再由

(1) 所证并代入 $h = \sqrt{3}$ 和 $R = 2\sqrt{3}$ 得

$$I = 3 \times \frac{\rho}{3} (3R - h)h^2 + 2\sqrt{3}\rho(2Rh - h^2) = 33\sqrt{3}\rho. \quad \dots\dots\dots (14 \text{ 分})$$

五 (本题满分 15 分) 设 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n \in [a, b]$ 使得 $[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx$,

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证明: 先考虑特殊情形: $a = 0, b = 1$. 下证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

首先 $x_n \in [0, 1]$, 即 $x_n \leq 1$, 只要证明 " $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1), \exists N, n > N$ 时, $1 - \varepsilon < x_n$ ". 由 f 在 $[0, 1]$

严格单增, 就是要证明 $f^n(1 - \varepsilon) < f^n(x_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx$. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})

由于 " $c \in (0, 1)$ ", 有 $\int_0^1 f^n(x) dx > f^n(c)(1 - c)$, 现取 $c = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, 则 $f(1 - \varepsilon) < f(c)$, 即

$\frac{f(1-e)}{f(c)} < 1$, 于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1-e)^n}{f(c)^n} = 0$, 所以 $\forall n > N$ 时有

$$\frac{f(1-e)^n}{f(c)^n} < \frac{e}{2} = 1 - c. \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

即 $f^n(1-e) < f^n(c)(1-c) \leq \int_0^1 f^n(x) dx \leq \int_0^1 f^n(x) dx = f^n(x_n)$, 从而 $1-e < x_n$. 由 e 的任意性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

再考虑一般情形. 令 $F(t) = f(a + t(b-a))$, 由 f 在 $[a, b]$ 上非负连续, 严格单增知 F 在 $[0, 1]$ 上非负连续, 严格单增. 从而 $\forall t_n \in [0, 1]$, 使得 $F^n(t_n) = \int_0^1 F^n(t) dt$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$, 即

$$f^n(a + t_n(b-a)) = \int_0^1 f^n(a + t(b-a)) dt.$$

记 $x_n = a + t_n(b-a)$, 则有

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^n(x) dx, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + (b-a) = b. \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

六 (本题满分 15 分) 设 $A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} - A_n$.

[解] 令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 因 $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2/n^2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ (5 分)

记 $x_i = \frac{i}{n}$, 则 $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx$, 故 $J_n = n \sum_{i=1}^n (f(x) - f(x_i)) dx$ (8 分)

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 $J_n = n \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(x_i))(x_i - x_{i-1})$ (10 分)

记 m_i 和 M_i 分别是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最小值和最大值, 则 $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, 故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)(x - x_i) dx$ 介于 $m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx$ 和 $M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx$ 之间, 所以存在 $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)(x - x_i) dx = -f(\eta_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 / 2, \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

于是, 有 $J_n = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f(\eta_i)$. 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} - A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2} [f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}. \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$