第六届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷
(数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五			总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意: 1. 前5大题是必答题, 再从 6–11大题中任选两题, 题号要填入上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

(1)实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为 ______.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和为 ______.

(3) 计算第一型曲面积分的值:

$$I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2)\, \mathrm{d}S = \_\_\_\_\_\_ .$$

(4) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n > 1)$, $\mathrm{rank}(A) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0.设 $2, 3, \ldots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式. 则有 $A_{11} =$______.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \middle| \, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$, 其中 $\mathbb{C}$ 表示复数域. 试证明: $\forall A \in \Gamma$, A 的Jordan标准形 J_A 仍然属于 Γ; 进一步还存在可逆矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求满足不等式

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < +\infty$$

的最大常数 α.

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 10 分) 设 $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $f(t) > 0, a(t) \geqslant 1, \forall t \in \mathbb{R}$. $\int_0^{\infty} f(t)dt = +\infty$. 已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足

$$x''(t) + a(t)f(x(t)) \leqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有上界.

得分	
评阅人	

六、(本题 10 分) 设 a, b 是两个不同的复数. 求满足方程

$$(f'(z))^2 = (f(z)-a)(f(z)-b) \tag{1}$$

的非常值整函数 $f(z)$.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

七、(本题10分) 设$f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 *Lipschitz* 函数, *Lipschitz* 常数为 K, 则对任意的 Lebesgue 可测集 $E \subset \mathbb{R}^1$, 均有 $m(f(E)) \leqslant K \cdot m(E)$, 其中 $m(\cdot)$ 表示一维 Lebesgue 测度.

得分	
评阅人	

八、(本题10分) 设三维空间的曲面 S 满足：

(1) $P_0=(0,0,-1)\in S$；

(2) 对任意 $P\in S$，$\left|\overrightarrow{OP}\right|\le 1$，其中 O 是原点.

证明：曲面 S 在 P_0 的Gauss曲率 $K(P_0)\ge 1$.

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

九、(本题10分) 考虑求解线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的如下迭代格式

$$(\alpha D - C)\mathbf{x}^{(k+1)} = ((\alpha-1)D + C^T)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

其中 D 为实对称正定方阵，C 是满足 $C + C^T = D - A$ 的实方阵，α 为实数. 若 A 是实对称正定方阵，且 $\alpha D - C$ 可逆，$\alpha > 1/2$. 证明：上述迭代格式对任何初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ 收敛.

得分	
评阅人	

十、（本题10分）设 R 为$[0,1]$ 上的连续函数环，其加法为普通的函数加法，乘法为普通的函数乘法. I 为 R 的一个极大左理想. 证明：$\forall f, g \in I$，f 与 g 在 $[0,1]$ 上必有公共的零点.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

十一、（本题10分）设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量 X (单位: 吨)是随机变量, X 服从 $[100, 200]$ 上的均匀分布. 每出售这种商品一吨, 可以为国家挣得外汇3万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用1万元. 求: 应组织多少货源, 才能使国家的收益最大?

第六届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷
(答案勘误)

第3页，第13行： P_{-1} 应为 P^{-1}

第4页: 第五题的分值误为15分，应为10分。另外，题设中要求函数 $x(t)$是C^2的。**(考试试题中的分数和题设都是正确的).**

第6页，第-8行：第一个 $f(x)$ 应为 $f(E)$

第7页，第-11行：所有的下标 i 均改为 k

第7页，第-2行：不妨设 E 是有限测度，从而 f' 在 E 上可积。

第10页，第4行： y 应为 $\mathbf{y}$

第10页: 十、（本题10分）设 R为$[0,1]$上的连续函数环，其加法为普通的函数加法，乘法为普通的函数乘法。I 为R 的一个极大左理想。证明：$\forall f, g \in I$, f 与g 在$[0,1]$ 上必有公共的零点。

证明： 若f, g 在$[0,1]$ 上无公共零点，则连续函数 $|f|^2+|g|^2$ 在 $[0,1]$ 上恒大于0. 结果 $\frac{1}{|f|^2+|g|^2} \in R$. 5分

注意到I为左理想，$f \in I$, $\overline{f} \in R$, 从而 $|f|^2 = \overline{f}f \in I$, 同样 $|g|^2 \in I$, 故 $|f|^2+|g|^2 \in I$, 进而

$$\frac{1}{|f|^2+|g|^2}(|f|^2+|g|^2) = 1 \in R,$$

矛盾于I 为R 的一个极大左理想. 10分

姓名: 准考证号: 所在院校: 考生座位号: 专业:

密封线 答题时不要超过此线

第六届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷

(数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五			总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意: 1. 前5大题是必答题, 再从 6–11大题中任选两题, 题号要填如上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1)实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型 $= \underline{z_1^2 + z_2^2 - z_3^2}$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 的和 $= \underline{\frac{3}{4}}$.

(3) 计算第一型曲面积分的值: $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1}(x^2+2y^2+3z^2)\,\mathrm{d}s = \underline{8\pi}$.

(4) $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 $(n>1)$, $\mathrm{rank}(A)=n-1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2,3,\ldots,n$ 为 A 的全部非零特征值。用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式. 则有 $A_{11} = \underline{(n-1)!}$.

(4)解: 1) 秩$A = n-1 \Rightarrow$ 秩$A^* = 1$ 且$Ax=0$的解空间维数为1.

$$A\text{的行和} = 0 \Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Ax=0 \text{ 的一组基础解系为}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

2)注意到$AA^*=0$, 从而A^*的每一列均形如$a\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.又由于$A$为实对称矩阵,

故A^*也为实对称矩阵。故$A^* = \begin{pmatrix}a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a & \cdots & a\end{pmatrix}$.

3)考虑特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n).$$

其一次项系数为$(-1)^{n-1}n!$. 另一方面，由$f(\lambda)=|\lambda I-A|$又知，其一次项系数为$(-1)^{n-1}(A_{11}+\cdots A_{nn})$.结果 $a=(n-1)!$.

二、(本题 15 分)设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p. 一族球面中的每个球面都过点 P, 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a. 求该球面族的球心的轨迹.

解: 以 l 为 z 轴, 以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系。可设 $P:(p,0,0)$， l 的参数方程 $l:x=0,y=0,z=t$.

设球面 C 的球心为(x_0,y_0,z_0), 由于 C 过点 P , 则

$$C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(p-x_0)^2+y_0^2+z_0^2.$$

…………………………4分

求 l 与 C 的交点：将 l 的参数方程代入 C,

$$x_0^2+y_0^2+(t-z_0)^2=(p-x_0)^2+y_0^2+z_0^2.$$

即

$$t^2-2z_0t+(2px_0-p^2)=0. \tag{1}$$

由此得到两个解为

$$t_{1,2}=z_0\pm\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}.$$

故弦长 $a=|t_1-t_2|=2\sqrt{z_0^2-(2px_0-p^2)}$, 从而

$$z_0^2-2px_0+p^2-\frac{a^2}{4}=0. \tag{2}$$

…………………………10分

反之, 如果球面 C 的球心满足(2), 如果 C 过点 P, 此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta=4z_0^2-4(2px_0-p^2)=a^2\geq 0,$$

方程有两个实根

$$t_{1,2}=z_0\pm\frac{a}{2}.$$

从而 C 和 l 相交, 而且截出来弦长为 a.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

故所求的轨迹为

$$z^2 - 2px + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

……………………… 15分

三、证明题（15分）设$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$, 其中$\mathbb{C}$ 表复数域。试证明：$\forall A \in \Gamma$, A的Jordan标准形J_A 仍然属于Γ; 进一步还存在可逆的矩阵$P \in \Gamma$ 使得$P^{-1}AP = J_A$.

证明：对$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, 其特征方程为

$$0 = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 2Rez_1\lambda + |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

$$\Delta = 4(Rez_1)^2 - 4(|z_1|^2 + |z_2|^2) \leqslant 0.$$

……………………… 2分

情形1. $\Delta = 0$.

此时，$z_2 = 0, z_1 = Rez_1$, 从而$A = \begin{pmatrix} Rez_1 & 0 \\ 0 & Rez_1 \end{pmatrix} = J_A \in \Gamma$. 取$P = I$即有$P_{-1}AP = J_A$。 ……………………… 8分

情形2. $\Delta < 0$.

此时A 的特征值为

$\lambda_1 = Rez_1 + i\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (Rez_1)^2}, \lambda_2 = Rez_1 - i\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (Rez_1)^2}$,

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

从而$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$.

现取A 关于 λ_1的一个非0特征向量$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_1 x} + \overline{z_2 y} = \overline{\lambda_1 x} \\ z_2\overline{x} - z_1\overline{y} = -\overline{\lambda_1 y} \end{cases}$$

直接检验知$A\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix} = \overline{\lambda_1}\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix}$, 因此$\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix}$ 为A 关于 $\overline{\lambda_1}$的一个非0特征向量。令$P = \begin{pmatrix} x & -\overline{y} \\ y & \overline{x} \end{pmatrix}$,则有$P$可逆，且$P \in \Gamma, P^{-1}AP = J_A$. ……………… 15分

四、（本题20分）设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求最大常数 α 满足

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}<+\infty.$$

证明: α 的最大值为 $\frac{1}{2}$……………………………………………2分

若 $\alpha>\frac{1}{2}$, 取 $x_n=(n\pi)^{-1}, y_n=((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$. 则

$$\frac{|f(x_n)-f(y_n)|}{|x_n-y_n|^{\alpha}}=2^{\alpha}\pi^{\alpha-1}n^{2\alpha-1}(1+\frac{1}{2n})^{\alpha-1}\to\infty.$$

……………………………5分

下证 $\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\frac{1}{2}}}<+\infty.$

由于 $f(x)$ 为偶函数，不妨设 $0\leq x<y$. 令

$$z=\sup\{u\leq y|f(u)=f(x)\},$$

则 $z^{-1}\leq y^{-1}+2\pi$. ……………………………………………………10分

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |f(z)-f(y)|\\
&\leq \int_z^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t\leq |y-z|^{\frac{1}{2}}(\int_z^y f'_t(t)^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq |x-y|^{\frac{1}{2}}(\int_z^y(\sin\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\cos\frac{1}{t})^2\,\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{s=t^{-1}}{=} |x-y|^{\frac{1}{2}}(\int_{y^{-1}}^{z^{-1}}(\frac{\sin s}{s}-\cos s)^2\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq |x-y|^{\frac{1}{2}}(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi}4\,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8\pi}|x-y|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

……………………………20分

五、（本题15分）设$a(t),f(t)$ 为实连续函数，$\forall t\in\mathbb{R}$ 有 $f(t)>0, a(t)\geqslant 1$. $\int_0^{\infty}f(t)dt=+\infty$. 已知$x(t)$满足

$$x''(t)+a(t)f(x(t))\leqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在$[0,+\infty)$ 有上界.

证明: 由

$$x''(t)\leq -a(t)f(x(t))<0,$$

$x(t)$是上凸的. 2分

故 $\lim_{t\to\infty} x'(t)$ 存在或为 $-\infty$.

若 $\overline{\lim}_{t\to\infty} x(t) = +\infty$, 则 $x'(t) > 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$. 4分

故

$$x'(t)f(x(t)) \le a(t)x'(t)f(x(t)) \le -x'(t)x''(t),$$

积分得

$$\int_0^t f(x(s))\,\mathrm{d}x(s) \le \frac{x'(0)^2 - x'(t)^2}{2} \le \frac{x'(0)^2}{2}.$$

令 $t \to \infty$ 得

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{x'(0)^2}{2},$$

矛盾。 10分

六、（本题10分）设 a, b 是两个不同的复数. 求满足方程

$$(f'(z))^2 = (f(z)-a)(f(z)-b) \tag{1}$$

的非常数整函数 $f(z)$.

解　由 (1) 可得

$$\left(f' - f + \frac{a+b}{2}\right)\left(f' + f - \frac{a+b}{2}\right) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \tag{2}$$

..........................2分

由此可知 $f' - f + \frac{a+b}{2}$ 是无零点的整函数. 可设

$$f' - f + \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}e^{\alpha}, \tag{3}$$

其中 α 是一个整函数. 由 (2) 得

$$f' + f - \frac{a+b}{2} = -\frac{a-b}{2}e^{-\alpha}. \tag{4}$$

由 (3), (4) 得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}, \tag{5}$$

..........................4分

$$f' = \frac{a-b}{4}e^{\alpha} - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}. \tag{6}$$

对 (5) 求导得

$$f' = -\frac{a-b}{4}\alpha' e^{\alpha} + \frac{a-b}{4}\alpha' e^{-\alpha}. \tag{7}$$

由 (6), (7) 可得

$$(\alpha'+1)(e^{\alpha}-1)(e^{\alpha}+1) = 0,$$

……………………… 8分

因此 $e^{\alpha}-1=0$ 或者 $e^{\alpha}+1=0$ 或者 $\alpha'+1=0$.

若 $e^{\alpha}-1=0$, 则由 (5) 得到 $f=b$ 是一个常数. 同理, 若 $e^{\alpha}+1=0$, 则 $f=a$ 也是一个常数. 若 $\alpha'+1=0$, 则 $\alpha(z)=-z+c$, 其中 c 是任意常数. 再由 (5) 可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{-z+c} - \frac{a-b}{4}e^{z-c} \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\operatorname{ch}(z-c) \end{aligned}$$

……………………… 10分

七、（本题10分）设$f(x)$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 *Lipschitz* 函数, *Lipschitz* 常数为 K, 则对任意的可测集 $E\subset\mathbb{R}^1$, 均有 $m(f(E))\leqslant K\cdot m(E)$.

证明: (方法1) 1) 在题设的条件下, 对任何可测集E, 有$m^*(f(E))\leqslant K\cdot m(E)$.

(1) 若E为区间, 由f 的连续性知: $f(x)$是区间. 又$f(x)$ 是 *Lipschitz* 函数, 有$|f(E)|\leqslant K|E|$, 即 $m(f(E))\leqslant K\cdot m(E)$. ……………………………… 1分

(2) 若E为开集, 由开集的构造知:$E=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}(\alpha_n,\beta_n)$, 其中$\{(\alpha_n,\beta_n)\}$ 互不相交. 由(1)得:

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &= m^*\big(f(\bigcup_{n\geqslant 1}(\alpha_n,\beta_n))\big) = m^*\big(\bigcup_{n\geqslant 1}f(\alpha_n,\beta_n)\big) \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant 1} m^* f((\alpha_n,\beta_n)) \leqslant K\sum_{n\geqslant 1} m((\alpha_n,\beta_n)) = K\cdot m\big(\bigcup_{n\geqslant 1}(\alpha_n,\beta_n)\big) = K\cdot m(E). \end{aligned}$$

……………………… 3分

(3) 若E为可测, 则 $\forall\ \epsilon>0$, $\exists$ 开集 $G\supset E$, 使得 $m(G-E)<\epsilon$.

由(2)及 $f(G)\supset f(E)$ 知:

$$m^*(f(E))\leqslant m^*(f(G))\leqslant K\cdot m(G)=K\cdot m\big(E\cup(G-E)\big)$$
$$\leqslant K\cdot m(E)+K\cdot m(G-E)$$
$$<K\cdot m(E)+K\cdot\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性知: $m^*(f(E))\leqslant K\cdot m(E)$. 6分

2) 在题设条件下，若E 可测, 则$f(E)$ 可测.

E 可测 $\Rightarrow \exists F_\sigma-$型集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, F_n闭集, $A\subset E$, $m(E-A)=0$.

又$f(A)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f(F_n)$,由$f$ 的连续性知:$f(F_n)$闭. 8分

那么$f(A)$ 是 $F_\sigma-$型集且 $f(A)\subset f(E)$.

由1)知: $m^*\big(f(E-A)\big)\leqslant K\cdot m(E-A)=0$, 即 $m\big(f(E-A)\big)=0$.

而$f(E-A)\supset f(E)-f(A)$, 从而$m\big(f(E)-f(A)\big)=0$, 故$f(E)$ 可测.

综合1) 2)可得:对任何可测集E, 有$f(E)$可测且$m(f(E))=m^*(f(E))\leqslant K\cdot m(E)$.

......................10分

(方法2) $i)$ 若$f(x)$ 为$\mathbb{R}^1$ 上的绝对连续函数, $A\subset\mathbb{R}^1, m(A)=0$, 则 $m(f(A))=0$.

$f\in AC(\mathbb{R}^1)\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 对任意至多可数个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i\geqslant1}$, 当 $\sum\limits_{i\geqslant1}(b_i-a_i)<\delta$ 时, 有 $\sum\limits_{i\geqslant1}\big(f(b_i)-f(a_i)\big)<\varepsilon$.

由 $m(A)=0$, 对上 $\delta>0,\exists$ 开集 $G\supset A, m(G)<\delta$.

令 $G=\bigcup\limits_{i\geqslant1}(c_i,d_i)$, $m_k=\min\limits_{x\in[c_i,d_i]}f(x)=f(\alpha_k), M_k=\max\limits_{x\in[c_i,d_i]}f(x)=f(\beta_k)$.

$\because\sum\limits_{k\geqslant1}(\beta_k-\alpha_k)\leqslant\sum\limits_{k\geqslant1}(d_k-c_k)<\delta,\therefore\sum\limits_{k\geqslant1}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\varepsilon$,

而 $m^*f(G)=m^*\left(\bigcup\limits_{k\geqslant1}f((c_k,d_k))\right)\leqslant\sum\limits_{k\geqslant1}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|<\varepsilon$,

又 $\because f(G)\supset f(A),\therefore m^*f(A)<\varepsilon$, 由 ε 的任意性知 $m^*f(A)=0$. 4分

$ii)$ 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^1$ 上的绝对连续函数, A 可测, 则 $f(A)$ 可测.

A 可测 $\Rightarrow\exists F_\sigma-$ 型集 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, F_n 闭, $B\subset A, m(A-B)=0$

$\Rightarrow f(B)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f(F_n)$, 由 f 的连续性知 $f(F_n)$ 闭, $f(B)$ 是 $F_\sigma-$ 型集, $f(B)\subset f(A)$.

由 $i)$ 知: $mf(A-B)=0$.

又 $\because f(A-B)\supset f(A)-f(B),\therefore m(f(A)-f(B))=0$, 故 $f(A)$ 可测. 6分

$iii)$ f 是 $\mathbb{R}^1$ 上的 *Lipschitz* 函数 $\Rightarrow f(x)$ 为 $\mathbb{R}^1$ 上的绝对连续函数 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上几乎处处存在且 $|f'(x)|\leqslant K$, f' 是 $L-$可积, 即 $\exists Z\subset\mathbb{R}^1, m(Z)=0$, $f'(x)$ 存在

且 $|f'(x)| \leqslant K, \forall\, x \in E-Z$. 由 $i)$ 知： $mf(Z)=0$. 于是

$$\begin{aligned} m(f(E)) &\leqslant m(f(E-Z)) + m(f(Z)) = m(f(E-Z)) \\ &\leqslant \int_{E-Z} |f'(x)| dm \leqslant \int_{E-Z} K dm \leqslant K \cdot m(E). \end{aligned}$$

........................10分

注：上式的第二个不等式的证明.

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上绝对连续， f' 在 A 上存在积分, 则 $mf(A) \leqslant \int_A |f'| dm$.

证明: (1) 对任何区间 I, $mf(I) \leqslant \int_I |f'| dm$.

令 $\max\limits_{x \in \overline{I}} f(x) = f(b)$, $\min\limits_{x \in \overline{I}} f(x) = f(a)$, $a, b \in \overline{I}$,

则 $mf(I) = f(b) - f(a) = |\int_{(a,b)} f' dm| \leqslant \int_{(a,b)} |f'| dm \leqslant \int_I |f'| dm$.

(2) f' 可积 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall e \subset E$, 若 $me < \delta$, 有 $\int_e |f'| dm < \varepsilon$.

A 可测 $\Rightarrow$ 对上 $\delta > 0$, $\exists$ 开集 $G \supset A$, $m(G-A) < \delta$. 于是 $\int_{G-A} |f'| dm < \varepsilon$.

令 $G = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} (\alpha_k, \beta_k)$, 则

$$\begin{aligned} m(f(A)) &\leqslant m(f(G)) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} m(f((\alpha_k, \beta_k))) \\ &\leqslant \sum_{k \geqslant 1} \int_{(\alpha_k, \beta_k)} |f'| dm = \int_G |f'| dm = \int_G |f'| dm - \varepsilon + \varepsilon \\ &\leqslant \int_G |f'| dm - \int_{G-A} |f'| dm + \varepsilon = \int_A |f'| dm + \varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 的任意性得: $mf(A) \leqslant \int_A |f'| dm$.

八、（本题10分）设三维空间的曲面S满足：

(1)$P_0 = (0,0,-1) \in S$；

(2)对任意$P \in S$，$\left|\overrightarrow{OP}\right| \leq 1$，其中$O$是原点.

证明：曲面S在P_0的Gauss曲率$K(P_0) \geq 1$。

证明：在P_0附近取曲率线坐标(u,v)，曲面的参数方程设为$\mathbf{r}(u,v)$。不妨设$\mathbf{r}(0,0) = P_0$。用E, F, G；L, M, N分别表示曲面$\mathbf{r}(u,v)$的第一基本型、第二基本型系数，则$F = M = 0$。..3分

令$f(u,v) = \langle \mathbf{r}(u,v), \mathbf{r}(u,v) \rangle$，则$f(u,v)$在$(0,0)$点取极大值1。于是

$$f_u(0,0) = 2\langle \mathbf{r}_u(0,0), \mathbf{r}(0,0) \rangle = 0, \quad f_v(0,0) = 2\langle \mathbf{r}_v(0,0), \mathbf{r}(0,0) \rangle = 0.$$

专业：＿＿＿＿ 考生座位号：＿＿＿＿ 所在院校：＿＿＿＿ 准考证号：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿

密封线　答题时不要超过此线

从而曲面S在P_0的法向$\mathbf{n}(0,0)=\mathbf{r}(0,0)$。……………………………………6分

又由于

$$f_{uu}(0,0)=2(E(0,0)+L(0,0)),\quad f_{uv}(0,0)=0,\quad f_{vv}(0,0)=2(G(0,0)+N(0,0))$$

根据$f(u,v)$在$(0,0)$取极大值，$f_{uu}(0)\le 0$，$f_{vv}(0,0)\le 0$。于是，

$$0<E(0,0)\le -L(0,0),\quad 0<G(0,0)\le -N(0,0)$$

从而S在P_0的Gauss曲率

$$K(P_0)=\frac{L(0,0)N(0,0)}{E(0,0)G(0,0)}\ge 1.$$

……………………………10分

九、（本题10分）考虑求解线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的如下迭代格式

$$(\alpha D-C)\mathbf{x}^{(k+1)}=((\alpha-1)D+C^T)\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{b},$$

其中D为实对称正定方阵，C是满足$C+C^T=D-A$的实方阵，α为实数。若A是实对称正定方阵，且$\alpha D-C$可逆，$\alpha>1/2$。证明：上述迭代格式对任何初始向量$\mathbf{x}^{(0)}$收敛。

证明：令

$$G=(\alpha D-C)^{-1}((\alpha-1)D+C^T),$$

λ为G的特征值，$\mathbf{x}$是对应的特征向量，$\mathbf{y}=(I-G)\mathbf{x}$。则

$$\begin{aligned}(\alpha D-C)\mathbf{y}&=(\alpha D-C)\mathbf{x}-((\alpha-1)D+C^T)\mathbf{x}\\&=(D-C-C^T)\mathbf{x}=A\mathbf{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha D-D+C^T)\mathbf{y}=(\alpha D-C-A)\mathbf{y}=\\&(\alpha D-C-A)\mathbf{x}-(\alpha D-C-A)G\mathbf{x}=\\&(\alpha D-C-A)\mathbf{x}-((\alpha-1)D+C^T)\mathbf{x}+AG\mathbf{x}\\&=AG\mathbf{x}=\lambda A\mathbf{x}.\end{aligned}$$

……………………………5分

以上两个方程两遍分别与$\mathbf{y}$做内积得

$$\alpha\langle D\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle-\langle C\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle=\langle A\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle.$$

$$\alpha\langle \mathbf{y}, D\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}, D\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, C^T\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \lambda A\mathbf{x}\rangle.$$

…………………………8分

以上两式相加得

$$\begin{aligned}(2\alpha-1)\langle D\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle &= \langle A\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle y, \lambda A\mathbf{x}\rangle \\ &= (1-\bar{\lambda})\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \bar{\lambda}(1-\lambda)\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = (1-|\lambda|^2)\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle.\end{aligned}$$

由于$\alpha > 1/2$，$\langle D\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \geq 0$，$\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle > 0$，则必有$|\lambda| \leq 1$，若 $|\lambda| = 1$, 则 $\mathbf{y} = 0$, 从而 $A\mathbf{x} = (\alpha D - C)\mathbf{y} = 0$, 进而$\mathbf{x} = 0$, 矛盾。因此$|\lambda| < 1$, 即$\rho(G) < 1$。故迭代收敛。

……………………10分

十、（本题10分）设 R为$[0,1]$上的连续函数环，其加法为普通的函数加法，乘法为普通的函数乘法。I 为R 的一个极大左理想。证明：$\forall f, g \in I$, f 与g 在$[0,1]$ 上必有公共的零点。

证明： 若f, g 在$[0,1]$ 上无公共零点，则$|f|+|g|$在$[0,1]$上恒大于0.结果$\frac{1}{|f|+|g|} \in R$.

……………………5分

注意到I为左理想，从而$|f|+|g| \in R$, 进而

$$\frac{1}{|f|+|g|}(|f|+|g|) = 1 \in R,$$

矛盾于I 为R 的一个极大左理想. ……………………………………………………10分

十一、（本题10分）设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量X(单位: 吨)是随机变量, X服从$[100, 200]$上的均匀分布. 每出售这种商品一吨, 可以为国家挣得外汇3万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用1万元. 求: 应组织多少货源, 才能使国家的收益最大?

解 设需要组织t吨货源预备出口, 则国家收益Y(单位: 万元)是随机变量X的函数$Y = g(X)$, 表达式为

$$g(X) = \begin{cases} 3t, & \text{当}X \geqslant t\text{时}, \\ 3X-(t-X), & \text{当}X < t\text{时}. \end{cases}$$

显然, $100 \leqslant \mathrm{t} \leqslant 200$. 由已知条件, 知X的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}, & \text{当}x \in [100, 200]\text{时}, \\ 0, & \text{当}x \bar{\in} [100, 200]\text{时}. \end{cases}$$

…………………………4分

由于Y是随机变量, 因此, 题中所指的国家收益最大可理解为均值最大, 因而问题转化为求Y的均值, 即求$E[g(X)]$的均值. 简单计算可得

$$\begin{aligned}
E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \frac{1}{100}\int_{100}^{200} g(x)dx \\
&= \frac{1}{100}\int_{100}^{t}[3x-(t-x)]dx + \frac{1}{100}\int_{t}^{200} 3tdx \\
&= \frac{1}{50}\big[-t^2+350t-10000\big].
\end{aligned}$$

…………………………8分

记$h(t)=-t^2+350t-10000$. 令$h'(t)=-2t+350=0$, 可得$t=175$. 而$h''(t)=-2<0$. 因此, 当$t=175$时函数$h(t)$达到最大值, 亦即$E[g(X)]$达到最大. 故应组织175吨这种商品, 能使国家获得的收益均值最大. …………………………10分