

专业：_____

年级：_____

所在院校：_____

身份证号：_____

姓名：_____

线
—
封
—
密

第三届全国大学生数学竞赛决赛试卷
(非数学类, 2012)

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
满 分	30	13	13	16	12	16	100
得 分							

- 注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.
- 2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
- 3、如当题空白不够，可写在当页背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、(本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤) .

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 + \frac{x}{2} - \tan \frac{1}{x} \right) e^{1/x} - \sqrt{1+x^6} \right]$

(3) 设函数 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 $f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx} = 0$, 且 $f_y \neq 0$,

$y = y(x, z)$ 是由方程 $z = f(x, y)$ 所确定的函数. 求 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(4) 求不定积分 $I = \int (1 + x - \frac{1}{x}) e^{x + \frac{1}{x}} dx$.

姓名：_____

身份证号：_____

所在院校：_____

专业：_____

年级：_____

线

封

密

(5) 求曲面 $x^2 + y^2 = az$ 和 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$)所围立体的表面积.

得 分	
评阅人	

二、(本题 13 分) 讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\cos^2 x + x^\alpha \sin^2 x} dx$ 的敛散性，其中 α 是一个实常数.

得 分	
评阅人	

三、(本题 13 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上无穷次可微, 并且满足:

存在 $M > 0$, 使得 $|f^{(k)}(x)| \leq M, \forall x \in (-\infty, \infty), (k = 1, 2, \dots)$, 且

$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0, (n = 1, 2, \dots)$. 求证: 在 $(-\infty, \infty)$ 上, $f(x) \equiv 0$.

得 分	
评阅人	

四、(本题共 16 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 10 分)

设 D 为椭圆形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > b > 0)$, 面密度为 ρ 的均质薄板;

l 为通过椭圆焦点 $(-c, 0)$ (其中 $c^2 = a^2 - b^2$) 垂直于薄板的旋转轴.

1. 求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J ;
2. 对于固定的转动惯量, 讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

得 分	
评阅人	

五、（本题 12 分）设连续可微函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F(xz - y, x - yz) = 0$ （其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数）唯一确定， L 为正向单位圆周. 试求： $I = \oint_L (xz^2 + 2yz)dy - (2xz + yz^2)dx$.

得 分	
评阅人	

六、（本题共 16 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 10 分）

(1) 求解微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - xy = x e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

(2) 如 $y = f(x)$ 为上述方程的解，证明：
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2 x^2 + 1} f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$