**习 题 三**

1、.

2、，则.

3、

，这时.

4、

.

当时，可由线性表示.

这时，，为矩阵行阶梯形，为矩阵行最简形，于是.

说明：这一题可用克莱姆法则求解.

5、（1）记，因为向量组不能由向量组线性表示，所以，从而

这时，；

（2）



，

这时.

6、（1）因为，所以线性相关.

（2）因为，所以线性相关.

（3）因为，所以线性无关.

（4）因为是四维三个向量，所以线性无关.

（5）因为是二维三个向量，所以线性相关.

7、因为，所以.

8、（1），则线性相关，但不能由线性表示.

（2），则存在，使

，但线性无关，线性无关.

（3），则只有时，使，但这时线性无关，而线性相关.

9、因为线性相关，由相关定义知，有一组不全为零的数使得，假设，则不全为零，由上式得.

由相关定义知，线性相关，这与题设矛盾，故，于是，则可由线性表示.

10、用反证法，设有两种不同表示法，，则，而线性无关，故，最后的结果说明表示式是唯一的.

11、先证必要性。设线性无关，为任意维向量，若，则，即可由线性表示。若，则线性相关，因向量的个数大于向量的维数，而线性无关，故可由线性表示（例9已证）.

再证充分性。任一向量可由线性表示，则维单位向量也可由线性表示，而向量组与向量组等价，因为线性无关，所以也线性无关.

12、（1）因为，所以极大无关组为，亦或或。

（2）.

13、



，

为矩阵的行阶梯形，为矩阵的行最简形.

（1）由矩阵可见，线性无关，这是所求的极大无关组；

（2）；

（3）由矩阵可见，记，则，即。

14、（1）两个向量不成比例，故线性无关；

（2）



包含的极大无关组为.

（3）.

15、先证向量组等价.显然向量组可由向量组线性表示.又，即，从而



这说明向量组可由向量组线性表示，故向量组等价.

再证秩相等。则由向量组等价，且个数相同（均为），故。

16、由作为列构成矩阵.



，故，则

，故两个向量组可以互相线性表示，因而向量组等价.

17、（1）；

（2）.

18、（1）；

（2），即.

19、因为，所以已成正交，故，则

，

再单位化：.

20、取，则，

，

再单位化：.

21、（1）不是正交矩阵，因第一行元素平方之和；

（2）是正交矩阵，因第行元素平方之和等于1，第行、第行对应元素之和等于零.

22、先证为对称矩阵：



再证为正交矩阵：



23、因都是阶正交矩阵，故；

而，故为正交矩阵.