**习 题 四**

1、（1）

，故，取，则，基础解系为.

（2）、，得同解方程组，取，得，故基础解系为.

2、（1）通解为，（为任意实数）.

（2）

，得同解方程组，取，则，基础解系为，通解为.

3、，第一个方程与第二个方程对调，并乘第一个方程，得：



当时，此方程组有非零解.

4、



，故无非零解.

5、（1）总有解（因）.只有零解，就没有基础解系；有非零解，则存在基础解系；基础解系不唯一，基础解系中含有个解向量.

（2）若已知的一个基础解系为，则的通解形式为，其中为任意实数.

（3）若是的基础解系，则也是的基础解系，这因为：，即，由于线性无关，故，从而得.

（4）有非零解，且，则，这是正确的结论.

6、先证必要性. 若三个向量共面，由共面的充要条件为，知齐次线性方程有非零解.

再证充分性. 若齐次线性方程组有非零解，则，即三个向量共面.

7、设为的基础解系，由两个等价的线性无关向量组所含向量个数相等，故等价的线性无关向量组可以为，则可由线性表示，从而也是的解.

又线性无关，的任一解可由线性表示，从而可由线性表示，这就说明也是一个基础解系.

8、设为的基础解系，又设为的线性无关解，由第7题可知，只要证明这两个解向量等价即可.

因为基础解系，故可由线性表示，即



因为线性无关，所以，则可由线性表示，因而这两个向量组等价.

9、利用原方程组与方程组同解，的秩相等，则可证明可由线性表示.

10、记，由，故是的解.反之，若是的解，则.

11、将通解改写为，由此可知，所求方程组有两个自由未知数，且对应的齐次线性方程组为，即，所给表达式为其通解.

12、因为，所以，对施以初等行变换，化为行阶梯形矩阵，



，要使，则必有，此时与同解方程组为，取，则有，故基础解系为

13、因，且中某元素的代数余子式，故存在非零的阶子式，从而可知，则基础解系中所含解向量的个数为.

14、（1），即



则

（2）



同解方程组为，

则（其中为任意常数）.

15、





当时，方程组有唯一解.

当时，，因为，所以方程组无解.

当时，

，即有同解方程组，解为

,其中为任意常数.

16、

，故，方程组有解.

17、

，当时，有解.

18、解一，，当时，方程组有唯一解.

当时，原方程组为；



，同解方程组为，

即（为任意常数）.

当时，原方程组为，即，这时第二个第三个方程左边相同，而右边不等，故方程组无解.

解二，对原方程组的增广矩阵施初等行变换，



于是，当时，原方程组无解；当时，原方程组有唯一解；当时，原方程组有无穷多组解，其全部解为（其中为任意常数），（或（为任意常数））.

19、（1）若，则必有解，且有无穷多解.

（2）若，则必有解，且有唯一解.

（3）若只有零解，则有唯一解，这是错误的结论，因二者不一定相等.

20、设，得线性方程组为



其系数行列式，由此可见：

（1）当时，则方程组有唯一解；故可由唯一的线性表示；

（2）当时，则方程组有无穷多解，故可由线性表示，这时；

（3）当时，则方程组的增广矩阵



因，故方程组无解；从而不能由线性表示.

21、证一，用非齐次方程组解的定义去证：

因为，

所以是的解.

证二，用非齐次方程组解的结构定理去证：

因为是的解，则是的解，

所以也是的解，即

是的解.

22、

，

有解的充要条件为，故必要求.

23、由题设知均为的解，且线性无关，而为的解，则的通解为.

24、对增广矩阵施初等行变换，得





同解方程组为，取得，即得非齐次线性方程组的一个解为.对应齐次线性方程组，取得，即对应齐次线性方程组的基础解系为.

25、因为线性无关，且，所以，从而的基础解系中含个解向量，又由得，故是的一个基础解系；又由得，即，可见是的一个特解，故的通解为（（为任意常数）.

26、四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩，又是的三个解向量，则，故的通解为（为任意常数）.

27、设小鸡、母鸡、公鸡的个数为，则，由（2）得

，由得，即，

现求其正整数解为.