**习 题 五**

1、（1），

，故的特征值.

当时，解方程，由

，得基础解系为，对应于全部特征向量为（的任意常数）.

当时，解方程，由，得基础解系为，对应于全部特征向量为（不同时为零的任意常数）.

（2），





，故的特征值为.

当时，解方程，由

，得基础解系为，对应于全部特征向量为（任意常数）.

（3），故的特征值为.

当时，解方程，由，得基础解系中解向量个数为，因而任意三个线性无关的向量都是它的一个基础解系，不妨取三维单位向量组，就是对应特征值的特征向量，对应于全部特征向量为（不全为零的任意常数）.

说明：此结论可推广至阶，不妨取个单位向量组，就是对应于特征值的特征向量。

2、由为矩阵的特征值知，从而；

把代入矩阵，通过计算得，故.

3、由两边左乘得，由得，即，因为，所以，由此得.

4、已知是的特征值，故是的一个特征值，则的一个特征值为.

5、因是的特征值，故，从而的特征值为，即

的特征值为，于是的特征值为，

因而.

6、用反证法 设是A的属于特征值的特征向量，即

则由 ，得



即 .

因是分别属于不同的特征值的特征向量，从而线性无关，故由上式得



即 

这与矛盾，因而不是A的特征向量.

7、则 ；

相似对角矩阵为

.

8、（1）A中有特征值1,3,0，有三个不同的特征值，故A可相似对角化.

（2）B中特征值为1,1,3，当时，

 故的基础解系中仅含有一个向量

,即只有一个线性无关的特征向量，故B不能相似对角化.

（3）由得C的特征值为1个6,2个0，当时，,这说明的基础解系由2个解向量组成，故有两个线性无关的特征向量，故C可相似对角化.

9、（1）题设是属于特征值的特征向量，由得



即 

（2）由得A的特征值为，因,故，

只有一个线性无关的特征向量，故A不能相似对角化.

10、（1）因,故其特征多项式相同，即,这时，



令，得 即 令，得，即则.

（2）由（1）知，故A与B的特征值为-1,2,-2

将代入得

，解方程组可求得一个基础解系为

,故是A属于特征值的特征向量.

将代入得

解方程组，可得一个基础解系为，是A属于特征值的特征向量.

将代入得

解方程组，可得一个基础解系为，是A属于特征值的特征向量.

11、令，可使

由得



则

.

12、对称矩阵对应于不同特征值的特征向量互相正交，现已知对应于特征值的特征向量，故对应于特征向量为，则有即

解此方程组，由

即

令，解得，

将其单位化得

，

令，

则由得



13、对称矩阵对应于不同特征值的特征向量互相正交，现已知对应于特征值的特征向量，对应于特征值的特征向量则有即是齐次线性方程组的两个线性无关解，于是由方程组，即，令，则对应有.

将正交化，取

，再将单位化得



令

，则由



14、设，则由得

，即

15、由



求得A的特征值为

对应于解方程组，由



便得令，则对应有，得基础解系.

将正交化，取，

再将单位化得：.

对应于，解方程组，

，

便得则对应有，于是基础解系，

将单位化得，将构成正交矩阵，有.

16、（1）由§5.2相似矩阵的性质（6），得

.

（2）令,则A,B有相同的多项式（即），但A,B不相似，否则存在可逆矩阵P,使，从而,矛盾.

（3）由A,B均为矩阵知A,B均相似对角矩阵，则有，即存在可逆矩阵使,于是 .

17、由

得A的特征值，对应于的特征向量为，对应于的特征向量为，经正交化、单位化后，

 使则



18、

A有特征值.

对应于，

故则



19、把用表示

则.

20、令.化A为对角矩阵，为此要找出P,使,求出,则

再作 

原方程组的通解为

21、（1）由



(2). ，

A有特征值.

(3). 

