**习 题 七**

1.（1）任取由矩阵的定义及矩阵的加法，数乘的定义，可知这就是说二阶矩阵的集合,对于矩阵的加法和数乘运算是封闭的，又根据加法和数乘运算满足的运算规律，可知这两种运算满足线性运算的八条规律，因此据线性空间的定义，对于矩阵的加法和数乘运算，集合构成线性空间.

今在线性空间中取一个向量组



显然，是一个线性无关组，又对任意,有,即中的任意向量都可由向量组线性表示，故为的一个基，维数为4.

(2).由于是的子集，只要验证对于矩阵的加法和数乘运算封闭即可，任取,其中有,又任意,因,故,这就是说集合对于矩阵的加法和数乘运算是封闭的，据线性空间的定义对于矩阵的加法和数乘运算，集合构成线性空间，今在线性空间中取一向量组



显然，是一个线性无关组，又对任意其中有

,即中的任意向量可由向量组线性表示，故是中的一个基，维数为3.

2.因由,得则此全部解向量组成的集合对于中加法不封闭，故集合不构成线性空间.

3、设的维数为，如果那么与都是零空间，则.

当时，任取的一个基由于,且的维数为，故也是的一个基，因此中每个向量都可由它线性表示，而的任意线性组合都是中的向量，故，从而.

4. 证一，用基的定义去证.令则有欲使等式成立，只有

，由此得可见线性无关，因而它是一个基.

证二，用基变换去证. 因是一个基，且



5、解一. 设则问题转化为求解线性方程组，于是对增广矩阵施以初等变换，使之变为行最简形矩阵：

 ，

解得故，即向量在所给基下的坐标列为.

解二. 在中取单位坐标向量组作为另一组基，则在下的坐标列就是它自己，即，今记，由于,此即说明由基到基的过渡矩阵是,故据坐标变换公式，向量在另一个基下的坐标列为,则问题转化为求.

解得，故，

即向量在所给基下的坐标为.

6、设过渡矩阵为，由得，由



可知，

故.

7.设由基到基的过渡矩阵为，由

，

因向量在基下的坐标就是它自己，而在基下的坐标由坐标变换公式为，故要使在两个基下有相同的坐标列，必须且需，即，亦即，这是一个，对系数矩阵施以初等行变换，化为行最简形矩阵：



令，故得的基础解系为，从而求得在两个基下有相同坐标的向量为（其中为任意常数）.

8.设，



 (其中为任意常数)，合同变换的线性变换.

9、设，则

（1） ,而



而，

故当且仅当时才是线性变换.

(2) 

而 

故 



因而 不是线性变换.

(3)，

而 

故 ，



因而 是线性变换.

10、（1）因，故平面上该变换是表示以轴为镜面的镜面反射映射，或者说，像与源关于轴对称.

（2） 因，故平面上该变换是表示以直线

为镜面的镜面反射映射，或者说，像与源关于对称.

11、



，

即，故在此基下的矩阵为.

12、由得基到基的过渡矩阵为

求出，

故 .

13．因，由基到基的过渡矩阵，求出，

故

14，按线性变换定义去证。设



有 





，

故为线性变换（其中为任意常数）.

由 得，

故 .