上 海 交 通 大 学 试 卷（ A 卷）

（ 2021 至 2022 学年 第 2 学期 ）

班级号________________ 学号______________ 姓名 ____________

课程名称 计算机科学中的数学基础（CS2304） 成绩 ____________

注意：答题纸上一定要写清楚 姓名、学号、题号。

答案拍照发送到 CANVAS 作业(必须)及邮箱 sjtu_mfcs@163.com

文件/邮件标题命名方式：**学号+姓名+A**

(一)（10 分） Let $(A, \preccurlyeq_1)$ be a finite partially ordered set. Prove that, there exists a linear ordering $\preccurlyeq_2$ on A which satisfies $'\forall x, y \in A\ (x \preccurlyeq_1 y \text{ implies } x \preccurlyeq_2 y)'$.

（证明任意有限偏序集都存在满足题中要求的线性扩充）

(二)（10 分） Given 11 letters: one A, four B's, two C's, two D's, two E's. How many strings formed by all these 11 letters where each B's are separated? (pls calculate the final value.)

（包含 1 个 A，4 个 B，2 个 C，2 个 D，2 个 E 的长度为 11 的字符串中，所有 B 都互不相邻的字符串有多少？需算出最后具体数值）

(三)（10 分） Assume that the number of tons of lobsters(龙虾) caught per year is the average of the numbers caught in the previous two years. We use L_n to stand for the number of lobsters caught in the n^{th} year.

（假设每年捕获的龙虾吨数是过去两年捕获量的均值，用L_n表示第n年的收获量。）

(1) Find a recurrence relation for L_n. （找L_n的递推关系）

(2) Given $L_1 = 200$，$L_2 = 500$, what is the value of $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$? （给定初始条件，找极限）

(四)（10 分）

(1) Let (T, r) be a rooted tree. Recall the coding strategy for rooted tree. Suppose we know that the tree has n vertices. What is the length of the final code? Prove your answer.

（回忆有根树二元编码，含有n个节点的树的编码长度是多少？给出证明）

(2) Prove that there exists at most 4^n pairwise nonisomorphic (not rooted) trees on n vertices.

（证明含有n个节点的树（无根树，即普通树）中，彼此不同构的至多有4^n 棵）

(五)（10 分） Consider Boolean expressions on variables $x_1, \dots, x_n$. To a k-CNF formula F of the form$F = C_1 \wedge C_2 \cdots \wedge C_m$, where each $C_i = l_{i1} \wedge \cdots \wedge l_{ik}$, and $l_{ij} \in \{x_i, \overline{x_i}\}$. prove that: if $m < 2^k$, then there is a truth assignment (to $x_1, \dots, x_n$) such that F is satisfied.

（证明，如果$m < 2^k$， 则题目中的 k-CNF 公式一定可满足）

我承诺，我将严格遵守考试纪律。
承诺人： ____________

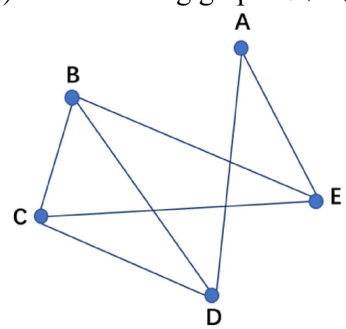
题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								
批 阅 人								

(六)（10 分） How many spanning trees (生成树) do each of the following graph have? Please specify the formula/process you used to get the results.

（下面两个图各有多少个不同的生成树？请写出计算用到的公式或过程）

(1) K_{10} (that is, the clique with 10 vertices) （含有 10 个点的团/完全图。）

(2) The following graph（下图（注：本小题需给出计算式，并算出最后具体数值））



(七)（20 分） A permutation（置换） on the numbers $\{1,2,\cdots,n\}$ can be represented as a function $\pi:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$. Now the permutation π is chosen uniformly at random（均匀分布）from all permutations:

（对$\{1,2,\cdots,n\}$集合上的置换函数π，假设π取到置换函数集合中任何函数的概率相同）

(1) A fixed point（不动点）of a permutation π is a value for which $\pi(x)=x$. We use $Fix(\pi)=\{x\mid\pi(x)=x\}$ to represent the set of fixed point of π. Find the $\boldsymbol{E}(|Fix(\pi)|)$, $\boldsymbol{Var}(|Fix(\pi)|)$.

（置换函数π的不动点集合$Fix(\pi)$定义如题，找$Fix(\pi)$集合的大小的期望和方差）

(2) The length of the longest increasing subsequence of $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ is denoted by L_π. Find an upper bound for $\boldsymbol{E}(L_\pi)$. （均匀采样的π函数对应的置换序列中的最长递增子序列，其长度记为L_π. 请为L_π的期望值找一个上界。(注：此问找到的上界越紧，则得分越高))

(八)（20 分） In the random graph model,

(1) What is the expected number of k-cycles in $G(n,p(n))$? （随机图模型中长度为k的环的个数的期望是多少）

(2) Let $t(n)=\frac{1}{n}$, show that if $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{t(n)}=0$, then $G(n,p(n))$ almost surely contains no cycle. (证明当 $p(n)$, $t(n)$ 满足题中关系时，以$p(n)$ 为参数的随机图模型几乎一定不包含任何环)