

Každé svoje tvrzení odůvodněte. Konstatování bez odůvodnění nebude počítáno jako odpověď. Pokud si nejste jisti zadáním, není vám jasné, co se v úkolu chce nebo vám to přijde podezřele těžké (či lehké) vzhledem k bodovému ohodnocení, zeptejte se.

**Úloha 1.** Mějme dva grafy  $G_1, G_2$ , které mají barevnosti  $\chi(G_1), \chi(G_2)$ . Jakou bude mít barevnost graf  $H$ , který vznikne slepením  $G_1$  a  $G_2$  za libovolný vrchol?

[4 body]

**Definice 1.** Necht'  $\pi$  je permutace na množině  $[n]$ . Rozkladem  $\pi$  na cykly rozumíme graf orientovaný graf  $G_\pi$ , jehož množina vrcholů je  $[n]$  a hrana vede z  $i$  do  $j$ , právě když  $\pi(i) = j$ . Snadno nahlédneme, že  $G_\pi$  je skutečně sjednocení cyklů (to zahrnuje smyčky i dvojcykly).

**Úloha 2.** Vybereme náhodnou permutaci  $\pi$  na množině  $[n]$ , graf  $G_\pi$  je její rozklad na cykly.

a) Jaká je pravděpodobnost, že na vrcholu 1 je smyčka? [1 bod]

b) Jaká je pravděpodobnost, že vrcholy 1, 2, 3 tvoří cyklus? [1 bod]

c) Rozhodněte, zda jsou jevy  $\pi(1) = 1$  a  $\pi(2) = 2$  nezávislé. [2 body]

d) Jaká je pravděpodobnost, že  $\pi$  má právě dva cykly (tj.  $G_\pi$  má právě dvě komponenty)? [4 body]

e) Jaká je pravděpodobnost, že vrcholy 1 a 2 leží ve stejném cyklu? [4 body]