

**Definice 1.** Diskrétní pravděpodobnostní prostor je trojice  $(\Omega, \Sigma, P)$ , kde  $\Omega$  je konečná množina nebo spočetná množina,  $\Sigma = 2^\Omega$  a  $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  taková, že

- (i)  $P[\Omega] = 1$ ,
- (ii)  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$ .

Prvkům množiny  $\Omega$  říkáme *elementární jevy*, prvkům množiny  $\Sigma$  říkáme *jevy* a funkci  $P$  říkáme *pravděpodobnost*.

**Definice 2.** Klasický pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \Sigma, P)$  je takový pravděpodobnostní prostor, kde  $\Omega$  je konečná a platí

$$\forall \omega \in \Omega : P[\{\omega\}] = \frac{1}{|\Omega|}.$$

**Definice 3** (Podmíněná pravděpodobnost). Pravděpodobnost jevu  $A$  za podmínky  $B$ ,  $P(B) > 0$  definujeme

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

**Věta 1** (Věta o úplné pravděpodobnosti). Mějme množiny  $B_1, B_2, \dots, B_n$  po dvou disjunktní, pro které platí  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$  (jde o tzv. *disjunktní rozklad*  $\Omega$ ) a navíc  $\forall i : P[B_i] > 0$ . Potom pro  $A \in \Sigma$  platí

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \dots + P[A|B_n]P[B_n]$$

**Věta 2** (Bayesova věta). Nechť  $A \in \Sigma$  a množiny  $B_1, \dots, B_n$  tvoří disjunktní rozklad  $\Omega$  a  $\forall i : P[B_i] > 0$ . Potom platí

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_j P[A|B_j]P[B_j]}$$

**Definice 4.** Jevy  $A, B$  jsou nezávislé, pokud platí  $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ . Pokud  $P[B] > 0$  můžeme také psát  $P[A|B] = P[A]$  dle definice podmíněné pravděpodobnosti.

**Definice 5.** Náhodná veličina na diskretním pravděpodobnostním prostoru je libovolná funkce  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definice 6.** Nechť  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je náhodná veličina na diskretním pravděpodobnostním prostoru. Střední hodnotu  $X$  definujeme jako

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega).$$

**Věta 3** (Linearita střední hodnoty). Nechť jsou  $X, Y$  náhodné veličiny,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , platí:

$$\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X], \quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

**Definice 7.** Indikátor jevu  $A$  je náhodná veličina  $I_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ , daná předpisem

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A, \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A. \end{cases}$$

Platí  $\mathbb{E}[I_A] = P[A]$ .

**Úloha 1.** Předpokládejme, že nemocí COVID-19 je v tuto chvíli nakaženo 10% populace. Antigenní test odhalí nakaženou osobu s pravděpodobností 97% a naopak u zdravého ji vyloučí s pravděpodobností 90%<sup>1</sup>. Když otestujeme náhodnou osobu, jaká je pravděpodobnost, že výsledek bude správný, pokud

- a) výsledek vyšel pozitivní,
- b) výsledek vyšel negativní.

**Úloha 2.** Spočítejte jaká je střední hodnota počtu ok při hodu kostkou.

**Úloha 3.** Jedna sázková společnost vyrobila 10 000 stíracích losů. Právě jeden z nich vyhrává 100 000 korun, pět vyhrává 50 000 korun a dalších 100 vyhrává 1 000 korun. Pokud jeden los stojí 100 korun, vyplatí se vám los koupit? Jaká je střední hodnota zisku, pokud si koupíme jeden los?

**Úloha 4.** Spočítejte očekávaný počet pan, které padnou při hodu čtyřmi mincemi,

- 1. z definice,
- 2. pomocí indikátorů.

**Úloha 5.** Spočítejte střední počet pevných bodů náhodné permutace.

<sup>1</sup><https://koronavirus.mzcr.cz/antigenni-testy-jsou-rychle-a-spolehlive-vysledek-je-k-dispozici-maximalne-do-30-minut/>