

Úloha 1 (Zmatení matfyzáci). Chodba jedné matfyzácké budovy měří 100 metrů, po její straně jsou vchody do 25 učeben a na obou koncích chodby jsou východy z budovy. Na konci hodiny vyjde (naráz) z každé učebny jeden zmatený matfyzák a vydá se k jednomu z východů. Matfyzák chodí rychlostí 1 m/s. Když se dostane na konec chodby k východu, tak odejde z budovy. Chodba je ovšem úzká a pokud se dva zmatení matfyzáci srazí, pouze se otočí čelem vzad a pokračují v chůzi. Ukažte, že bez ohledu na rozmístění vchodů učeben a volbu počátečních směrů se všichni matfyzáci dostanou z budovy do 100 sekund.

Úloha 2 (Lámání čokolády). Máme tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích a chceme ji rozlámat na jednotlivé čtverečky 1×1 . Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

Úloha 3 (Součet lichých čísel). Dokažte matematickou indukcí, že

$$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2.$$

Uměli byste tento vztah znázornit graficky?

Úloha 4 (Mince). Dokažte, že libovolný obnos o hodnotě větší než 7 lze zaplatit mincemi v hodnotě 3 a 5.

Úloha 5 (Absolutní hodnota). Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dokažte vztah

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \geq \left| \sum_{i=1}^n x_i \right|.$$

Úloha 6 (Prvočísla). Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Úloha 7 (Stejně množiny). Máme A, B, C množiny, pro které platí $A \times C = B \times C$, platí nutně $A = B$? Dokažte, či vyvráťte.

Úloha 8 (Ekvivalentní podmínka). Zjistěte, které z následujících podmínek nejsou ekvivalentní podmínce $A \subseteq B$. Pokuste se ji upravit tak, aby ekvivalence platila a to pokud možno co nejmenším zásahem.

1. $A \setminus B = \emptyset$
2. $A \cup B = B$
3. $A \cap B = A$
4. $\overline{A} \setminus B \subseteq \overline{B}$
5. $A \cap \overline{B} = \emptyset$
6. $\overline{A} \subseteq \overline{B}$