

Úloha 1. Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou disjunktních podmnožin $V_1, V_2, V_1 \cup V_2 = V$ takových, že všechny hrany grafu vedou mezi vrcholy z V_1 a z V_2 (tj. V_1 a V_2 indukují nezávislou množinu). Dokažte, že graf G je bipartitní, právě když nemá žádnou lichou kružnici jako podgraf.

Úloha 2. Mějme orientovaný graf, který má všechny výstupní stupně alespoň 1. Ukažte, že pak obsahuje nějaký uzavřený tah.

Úloha 3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: graf $G = (V, E)$ je strom, právě když neobsahuje kružnice a platí $|V| = |E| + 1$.

Úloha 4. Dokažte, že každý souvislý graf G obsahuje nějaký strom T na stejné množině vrcholů jako svůj podgraf.

Úloha 5. Najděte všechny stromy, jejichž doplnkem je také strom. Zdůvodněte, že jste na žádný nezapomněli.

Úloha 6. Existovat graf s následujícím skóre? Pokud ano, najděte jej. Pokud ne, zdůvodněte.

- a) $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$
- b) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$
- c) $(1, 1, 2, 3, 3, 6)$
- d) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$
- e) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$