

Každé svoje tvrzení odůvodněte. Konstatování bez odůvodnění nebude počítáno jako odpověď. Pokud si nejste jisti zadáním, zeptejte se.

Úloha 1. Určete počet dvojic množin A a B takových, že $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$.

[5 bodů]

Úloha 2. Uvažte mřížku $m \times n$, kde m a n značí počet horizontálních a vertikálních čar. V následujících úlohách nejprve odvoďte obecný vzorec a poté určete přesné číslo pro $m = 11$ a $n = 21$, tedy pro mřížku s 200 čtverečky.

- a) Kolik existuje obdélníků jejichž strany leží na této mřížce? (Čtverec je speciální případ obdélníku, úsečka nikoliv.)
- b) Kolik existuje dvojic disjunktních obdélníků jejichž strany leží na této mřížce? (Uvažte, že jde o uzavřené obdélníky, tedy včetně hranic.)

[5 bodů]

Úloha 3. Dokažte, že platí:

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Dávám 4 body za důkaz indukcí (r je pevné a $n \geq r$), 3 body navíc za důkaz kombinatorickou úvahou.

[4 + 3 body]