Definice 1. Graf G je rovinný, pokud existuje jeho nakreslení do roviny v němž se žádné dvě hrany G neprotínají.

Definice 2. Stěny nakreslení grafu G jsou maximální množiny bodů roviny, které neprotíná žádná hrana (tj. dostaneme se mezi každými dvěma body stěny, aniž bychom museli projít hranou). Stěna nakreslení je tedy jednou z těchto množin.

Definice 3. Délka stěny f je délka nejkratšího sledu, který prochází všemi hranami, které se stěnou f sousedí (může se stát, že je nějaká hrana započítána vícekrát!).

Definice 4. Graf G' je dělení grafu G, pokud vznikl tak, že jsme do hran grafu G přidali vrcholy stupně 2.

Věta 1 (Kuratowského)**.** Graf G je rovinný, právě když žádný jeho podgraf není izomorfní dělení grafu $K_{3,3}$ ani dělení grafu K_5.

Věta 2 (Eulerův vzorec)**.** Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf a nechť F je množina jeho stěn nějakého jeho rovinného nakreslení. Potom platí

$$|V| + |F| = |E| + 2.$$

Speciálně počet stěn nezávisí na způsobu nakreslení G.

Věta 3 (Maximální počet hran)**.** Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s aspoň 3 vrcholy. Potom platí

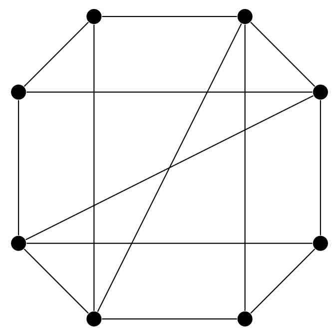
$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Navíc rovnost nastává pro každý maximální rovinný graf, tj. rovinný graf, kterému nejde přidat žádnou hranu (při zachování množiny vrcholů) tak, aby zůstal rovinný. Pokud navíc G neobsahuje trojúhelníky (tj. K_3 jako podgraf), potom

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Důsledek 1. Rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5. Pokud je navíc bez trojúhelníků, tak obsahuje vrchol stupně nejvýše 3.

Úloha 1. Rozhodněte, zda je následující graf rovinný.



Úloha 2. Najděte dvě nakreslení téhož grafu, jejichž duály nejsou isomorfní.

Úloha 3. Bez použití Kuratowského věty odvoďte, že grafy $K_{3,3}$ a K_5 nejsou rovinné.

Úloha 4. Dokažte, že neexistuje graf G s alespoň 11 vrcholy takový, že G i jeho doplněk $\overline{G}$ by byly rovinné grafy.

Úloha 5. Odvoďte Eulerův vzorec pro nesouvislé grafy.