Věta 1. Nechť $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ je posloupnost přirozených čísel, kde $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Označme D' posloupnost $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$, kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Potom D je skóre grafu, právě když D' je skóre grafu.

Lemma 1. Nechť $D = (d_1, d_2, \dots, d_n), d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ je skóre nějakého grafu G. Pak existuje graf H s vrcholy $v_1, \dots, v_n$, kde $\deg v_i = d_i$ (tj. se stejným skóre jako G), takový, že vrchol v_n je spojen hranou právě s vrcholy $v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \dots, v_{n-1}$.

Úloha 1. Rozhodněte, zda posloupnost $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$ je skóre grafu.

Definice 1. Graf G je strom, pokud je souvislý a neobsahuje žádnou kružnici jako svůj podgraf.

Lemma 2. Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň 2 listy.

Lemma 3. Pro graf G a jeho vrchol v_0 stupně 1 jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) G je strom,

(ii) $G - v$ je strom.

Věta 2. Pro graf $G = (V, E)$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) G je strom,

(ii) pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jediná cesta z x do y,

(iii) graf G je souvislý a odebráním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf,

(iv) graf G neobsahuje kružnici, ale přidáním libovolné hrany mezi existující vrcholy kružnice vznikne,

(v) G je souvislý a platí $|V| = |E| + 1$.

Úloha 2. Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je skóre stromu.

Úloha 3. Dokažte, že každý souvislý graf G obsahuje nějaký strom T na stejné množině vrcholů jako svůj podgraf. Takovému grafu se říká kostra grafu G.

Úloha 4. Mějme souvislý graf G a jeho most e. Most G je hrana taková, že graf $G - e$ je nesouvislý. Dokažte, že hrana e leží v každé kostře G.

Úloha 5. Určete počet koster grafu $K_{2,n}$.