Úloha 1 (Netradiční indukce)**.** Máme predikát $P(n)$ a chceme dokázat jeho platnost pro $n \geq 0$. Jsou následující postupy korektní? Pokud ano, zdůvodněte. Pokud ne, najděte protipříklad.

1. Dokážeme, že $P(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro libovolné n platí $P(n) \implies P(n-1)$.
2. Dokážeme, že $P(n)$ platí pro nekonečně mnoho různých n, a také dokážeme, že pro libovolné n platí $P(n) \implies P(n+1)$.
3. Dokážeme $P(0)$, a dále dokážeme, že pro libovolné n platí $P(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \implies P(n)$.

[2 body]

Úloha 2 (Nekomutativita skládání)**.** Najděte relace R, S (na libovolné množině) takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.
[2 body]

Úloha 3 (Ekvivalence na rovině)**.** Mějme relaci $\sim$ na $\mathbb{R}^2$ definovanou následovně

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \operatorname{sgn}(x_1) = \operatorname{sgn}(x_2) \;\&\; \operatorname{sgn}(y_1) = \operatorname{sgn}(y_2),$$

kde funkci $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ definujeme takto:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence, spočítejte a nakreslete její třídy ($\mathbb{R}^2$ odpovídá rovině).

[3 body]

Úloha 4 (Mocnina relace)**.** Buď R relace na nějaké množině A. Definujeme mocninu relace R^n takto: $R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$. Dokažte, že pokud je A konečná množina, pak existuje $0 < i < j$ takové, že $R^i = R^j$.
[3 body]