Odhady

Tomáš Hons

8. dubna 2021

1 Odvození odhadů

V prvním týdnu jsem si zvolil exponenciální rozdělení. To se nyní hodí, protože pro něj je konstrukce odhadu momentovou metodou velmi jednoduchá. Pro $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ totiž platí $EX = \frac{1}{\lambda}$, odhad momentovou metodou je tedy v následujícím tvaru

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

Konstrukce maximálně věrohodného odhadu je trochu náročnější, nicméně pořád přímočará. Takto vypadá věrohodnostní funkce

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{\sum_{i=1}^{n} -\lambda x_i} = \lambda^n e^{-n\lambda \overline{X}_n}.$$

Po logaritmická věrohodnostní funkce pak takto

$$l(\lambda) = \log(\lambda^n e^{-n\lambda\overline{X}_n}) = n \log \lambda - n\lambda\overline{X}_n.$$

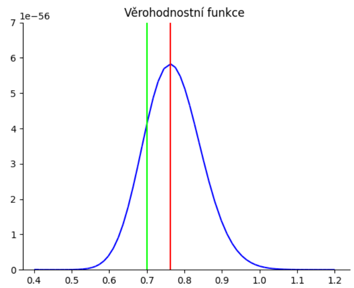
Pro nalezení odhadu funkci zderivujeme a položíme rovnu 0. Dá se ukázat, že řešení této rovnice je už nutně maximum. Víme totiž, že maximum $l(\hat{\lambda})$ je i maximem $L(\hat{\lambda})$ (rovnici jsme transfomovali rostoucí funkcí). Ze znalosti hustoty exponenciálního rozdělení (a vcelku přirozeně) dostaneme, že maximum můžeme hledat na omezeném intervalu (limita v nekonečnu je 0 a funkce je kladná). Hledáme tedy maximum omezené funkce na intervalu. Navíc je funkce $l(\hat{\lambda})$ konkávní, platí tedy, že lokální maximum je globálním maximem a je unikátní.

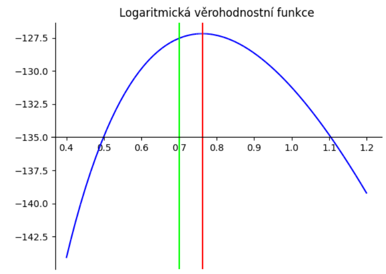
$$\begin{aligned} l'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - n\overline{X}_n \\ 0 &= \frac{n}{\hat{\lambda}} - n\overline{X}_n \\ \hat{\lambda} &= \frac{1}{\overline{X}_n} \end{aligned}$$

Maximálně věrohodný odhad tedy v tomto případě vychází stejně jako momentový odhad.

2 Experiment

Při experimentu jsem postupoval dle zadání. Tedy, vygeneroval jsem si vzorek 100 pozorování z Exp(0.7) a poté jsem spočítal svůj odhad. Nakonec jsem zobrazil grafy věrohodnostní funkce a logaritmické věrohodnostní funkce, do kterých jsem dokreslil skutečnou hodnotu parametru (zeleně) a maximálně věrohodný odhad (červeně).





Vidíme, že odhad je mírně vyšší než skutečná hodnota parametru. Hodnota odhadu je přibližně 0.762, zatímco skutečná hodnota parametru je 0.7.

Asi ne úplně překvapivé, ale minimálně na první pohled lehce zarážející, je měřítko věrohodnodnostní funkce, které nabývá hodnot od 0 do $7 \cdot 10^{-56}$.

Nejsem si moc jistý, kam míří otázka ohledně aproximace druhé derivace logaritmické funkce pomocí maximalizační funkce. Nicméně tuto derivaci můžeme získat jednoduše a to derivováním první derivace, kterou už máme.

$$l''(\lambda) = \left(\frac{n}{\lambda} - n\overline{X}_n\right)' = -\frac{n}{\lambda^2}$$