

# Náhodné vektory

Tomáš Hons

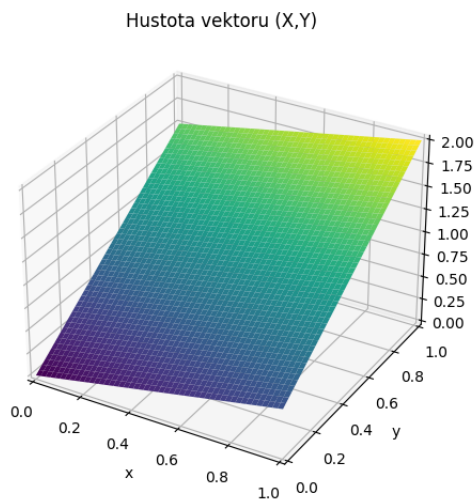
28. dubna 2021

## 1 Definice vektoru

Pracujeme s náhodným vektorem  $(X, Y)^T$  (přejmenujme vektor z originálního zadání, abychom se vyhnuli indexům) s následující hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zde je vyobrazení hustoty.



## 2 Střední hodnota

Střední hodnoty můžeme spočítat z marginálních rozdělení  $f(x)$  a  $f(y)$  veličin  $X$  a  $Y$ .

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x f(x) dx = \frac{13}{24}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 yf(y) dy = \frac{5}{8}$$

Vektor středních hodnot je tedy následující

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

### 3 Varianční matice

Na výpočet varianční matice potřebujeme spočítat rozptyl  $X$ , rozptyl  $Y$  a kovarianci  $X$  a  $Y$ .

$$\text{var } X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_0^1 x^2 f(x) dx - \left(\frac{13}{24}\right)^2 = \frac{47}{576}$$

$$\text{var } Y = \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \int_0^1 y^2 f(y) dy - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{13}{192}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}XY - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = \int_0^1 \int_0^1 xyf(x, y) dx dy - \frac{13}{24} \cdot \frac{5}{8} = -\frac{1}{192}$$

Varianční matice je pak následující

$$\text{Var} (X, Y) = \begin{pmatrix} \text{var } X & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var } Y \end{pmatrix} = \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 47 & -3 \\ -3 & 39 \end{pmatrix}.$$

### 4 Transformovaný vektor

Vektor  $(U, V)^T$  lze získat transformací vektoru  $(X, Y)^T$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

kde transformující matici pojmenujeme  $A$ .

Dále použijeme vzorce pro vektor středních hodnot a varianční matici transformovaných dat.

$$\mathbb{E} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{E} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 28 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Var} (U, V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{Var} (X, Y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{576} \begin{pmatrix} 80 & 8 \\ 8 & 92 \end{pmatrix}$$

Z vektoru středních hodnot můžeme vyčíst, že  $\mathbb{E}U = \frac{7}{6}$  a  $\mathbb{E}V = -\frac{1}{12}$ . Dále z varianční matice vidíme, že  $\text{var } U = \frac{5}{36}$  a  $\text{var } V = \frac{23}{144}$ .