对称群和交错群的表示

Aug 2025

对称群的表示论是有限群表示论中相对完整的一个部分，但用的并不主要是代数演算，而采用了组合学的方法。

先承认几个显而易见的事实，我不给出证明：

几个基本事实

- 对称群，交错群，共轭类，轮换（型），整数的分拆的定义。
- 不可约表示的数量与共轭类数量一致，置换群的共轭类与整数的分拆一一对应：如对于 $\mathbf{S}_4$ 而言，$4 = 3 + 1 = 2 + 2$，分别对应形如 (123) 和 $(12)(34)$ 两个共轭类。
- 假设分拆 λ 包含 k_1 个长度为 1 的轮换，k_2 个长度为 2 的轮换，$\ldots, k_r$ 个长度为 r 的轮换，其中 $\sum_{i=1}^{r} i \cdot k_i = n$。那么，对应于轮换型 λ 的共轭类 C_λ 的大小由以下公式给出：

$$|C_\lambda| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} k_i! \cdot i^{k_i}} \tag{1}$$

1 Young 图与基本分类定理

下面为分拆提供一个组合上的实体便于研究，就是 Young 图。

一个整数 n 的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$，其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$ 且 $\sum \lambda_i = n$，可以被直观地表示为一个 Young 图。这是一个由 n 个方格组成的图形，排列成 l 行，第 i 行有 λ_i 个方格，并且所有行都左对齐。

例如，对于 $n = 4$，有 5 个分拆，它们对应的 Young 图如下：

- (4)：一个包含 4 个方格的单行。
- $(3,1)$：第一行 3 个方格，第二行 1 个方格。
- $(2,2)$：两行，每行 2 个方格。

- $(2,1,1)$：第一行 2 个方格，第二、三行各 1 个方格。

- $(1,1,1,1)$：一个包含 4 个方格的单列。

由于分拆和 Young 图之间存在明显的一一对应关系，我们通常互换使用这两个术语，并用分拆 λ 来指代其对应的 Young 图形状。

现在我们可以陈述对称群表示理论的核心分类定理：

不可约表示与 Young 图的对应
在复数域 $\mathbb{C}$ 上，对称群 $\mathbf{S}_n$ 的所有不等价不可约表示与 n 的所有分拆（或等价地，所有大小为 n 的 Young 图）之间存在一个自然的一一对应关系。

这个定理为 $\mathbf{S}_n$ 的每一个不可约表示提供了一个唯一的、组合的 " 名字 " ——一个 Young 图。我们将与分拆 λ 对应的不可约表示记为 S^λ。

有两个最特殊的 Young 形状，刚好对应两个特殊表示：

- 平凡表示：对应于最 " 长而扁 " 的 Young 图，即分拆 (n)。这是一个一维表示，将 $\mathbf{S}_n$ 中的每个元素都映到 1。

- 符号表示：对应于最 " 高而瘦 " 的 Young 图，即分拆 $(1,1,\ldots,1)$ 或 (1^n)。这也是一个一维表示，将一个置换 σ 映到其符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$，即 $+1$（对于偶置换）或 -1（对于奇置换）。

一般而言，形状更接近于单行的 Young 图，其对应的表示具有更多的“对称”性；而形状更接近于单列的 Young 图，其对应的表示具有更多的“反对称”性。

1.1 共轭分拆与符号表示张量积

对一个 Young 图沿其主对角线（从左上到右下）进行反射，我们会得到一个新的 Young 图，它对应于原分拆 λ 的共轭分拆，记为 λ'。例如，分拆 $(3,1)$ 的 Young 图有两行，共轭后得到一个有三行、形状为 $(2,1,1)$ 的 Young 图。因此，$(3,1)' = (2,1,1)$。如果一个分拆满足 $\lambda = \lambda'$，则称其为自共轭分拆，其 Young 图是关于主对角线对称的。例如，$n = 4$ 的分拆 $(2,2)$ 就是自共轭的。

这个纯粹的组合操作在表示理论中有一个深刻的代数对应物：将一个不可约表示 S^λ 与一维的符号表示进行张量积运算，会得到另一个不可约表示，而这个新的表示恰好是与共轭分拆 λ' 对应的表示。即：

$$S^{\lambda} \otimes \mathrm{sgn} \cong S^{\lambda'} \tag{2}$$

这一关系是理解从 $\mathbf{S}_n$ 到其子群 $\mathbf{A}_n$ 的表示的关键，我们将在第二部分详细探讨。它展示了 Young 图的几何操作（转置）如何直接翻译为表示的代数操作（张量积）。

2 Specht 模

分类定理告诉我们不可约表示由 Young 图标记，但它没有告诉我们这些表示是什么，或者如何去构造它们。本节将介绍一种具体构造 $\mathbf{S}_n$ 所有不可约表示的标准方法，即通过 Specht 模的构建。这个过程的核心是从 Young 图出发，通过定义一系列组合对象和代数算子，最终在群代数 $\mathbb{C}$ 中 carving out 相应的表示空间。

2.1 Young 表

为了构造表示空间，我们需要在 Young 图的方格中填入数字。一个形状为 λ 的 Young 表是在 λ 对应的 Young 图的 n 个方格中填入数字 $1, 2, \ldots, n$，每个数字恰好使用一次的产物。我们将形状为 λ 的任意一个 Young 表记为 t。

例如，对于分拆 $\lambda = (2, 1)$，存在 $3! = 6$ 个不同的 Young 表。

2.2 行稳定子、列稳定子与 Young 对称化子

给定一个 Young 表 t，我们可以定义 $\mathbf{S}_n$ 的两个重要子群：

- 行稳定子 $R(t)$：这是 $\mathbf{S}_n$ 中所有仅在 t 的各行内部置换数字的置换构成的子群。
- 列稳定子 $C(t)$：这是 $\mathbf{S}_n$ 中所有仅在 t 的各列内部置换数字的置换构成的子群。

接下来，我们在群代数 $\mathbb{C}$ 中定义两个关键元素。群代数 $\mathbb{C}$ 是一个以 $\mathbf{S}_n$ 的所有元素为基的复向量空间，其乘法由群的乘法自然诱导。

- 行对称化子 a_t：$a_t = \sum_{\sigma \in R(t)} \sigma$。这个元素的作用是对行内的元素进行对称化。

- 列反对称化子 b_t：$b_t = \sum_{\sigma \in C(t)} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$。这个元素的作用是对列内的元素进行反对称化，其中 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 是置换 σ 的符号。

将这两者结合，我们得到 Young 对称化子：

$$c_t = a_t b_t = \left(\sum_{\sigma \in R(t)} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C(t)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau \right) \tag{3}$$

这个元素 c_t 捕捉了与 Young 表 t 相关的特定对称性。

2.3 Specht 模

与分拆 λ 对应的 Specht 模 S^λ 是由 Young 对称化子 c_t 在群代数 $\mathbb{C}$ 中生成的左理想，其中 t 是任意一个形状为 λ 的 Young 表。

$$S^\lambda = \mathbb{C}c_t \tag{4}$$

尽管 c_t 的定义依赖于 Young 表的具体选择 t，但可以证明，对于所有形状为 λ 的 Young 表，这样生成的左理想 $\mathbb{C}c_t$ 作为 $\mathbb{C}$-模都是同构的（这一点还是较为容易检查的）。因此，S^λ 的定义（在同构意义下）只依赖于分拆 λ 的形状。

关于 Specht 模，我们有以下基本定理：

Specht 模基本定理

1. 对于每一个分拆 $\lambda \vdash n, S^\lambda$ 是一个不可约的 $\mathbb{C}$-模。
2. 如果 λ 和 μ 是 n 的两个不同的分拆，那么 S^λ 和 S^μ 作为 $\mathbb{C}$-模是不同构的。

这两个结论意味着，通过为每个 Young 图构造一个 Specht 模，我们已经找到了 $\mathbf{S}_n$ 的一个完备且不等价的不可约表示集。

2.4 半单代数与幂等元

Specht 模的构造并非一种孤立的技巧，它深深植根于半单代数的结构理论。根据 Maschke 定理，由于域 $\mathbb{C}$ 的特征 0 不整除群 $\mathbf{S}_n$ 的阶 $n!$，群代数 $\mathbb{C}$ 是一个半单代数。

根据 Artin-Wedderburn 定理，任何半单代数都可以分解为矩阵代数的直和。对于 $\mathbb{C}$，这个分解的形式是：

$$\mathbb{C} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathrm{Mat}_{d_\lambda}(\mathbb{C}) \tag{5}$$

其中 d_λ 是与分拆 λ 对应的不可约表示的维数。这个代数分解是由一组本原中心幂等元 $\{e_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ 控制的。这些幂等元满足 $e_\lambda e_\mu = \delta_{\lambda\mu} e_\lambda$ 和 $\sum e_\lambda = 1$。每一个最小左理想（即不可约表示）都可以写成 $\mathbb{C}e_\lambda$ 的形式。

从这个角度看，Young 对称化子 c_t 正是（经过适当标量缩放后）本原幂等元的一个具体、组合化的实现。它充当了一个投影算子，将正则表示（即 $\mathbb{C}$ 自身作为左模）投影到其不可约分量 S^λ 上。

2.5 Youngtabloids

在实际计算中，直接在群代数中操作可能比较繁琐。另一种等价且更具组合意味的构造方法使用了 Young tabloids。

一个形状为 λ 的 Young tabloid 是 Young 表的一个等价类，其中两个 Young 表等价，如果它们对应行中的数字集合完全相同（即行内数字的顺序不重要）。我们将由 Young 表 t 生成的 tabloid 记为 $\{t\}$。

置换模 M^λ 是一个以所有形状为 λ 的 tabloids 为基的复向量空间。$\mathbf{S}_n$ 在 M^λ 上的作用是自然地通过置换 Young 表中数字来定义的。可以证明 M^λ 通常是可约的。

Specht 模 S^λ 随后可以被构造为 M^λ 的一个特定子模。对于任意 Young 表 t，我们定义一个多项式 tabloid e_t：

$$e_t = \sum_{\sigma \in C(t)} \mathrm{sgn}(\sigma)\{\sigma t\} \tag{6}$$

e_t 是 M^λ 中的一个向量。Specht 模 S^λ 就是由所有形状为 λ 的多项式 tabloids e_t 张成的 M^λ 的子空间。这种方法在确定 Specht 模的基和维数时尤其有用。

3 标准 Young 表与勾长公式

我们已经构造出了不可约表示 S^λ，但我们尚不清楚它们的维数是多少。解答这个问题需要引入一种特殊的 Young 表，即标准 Young 表。

一个 Young 表被称为标准 Young 表，如果其方格中的数字 $1, 2, \ldots, n$ 满足：

- 在每一行中，数字从左到右严格递增。
- 在每一列中，数字从上到下严格递增。

例如，对于 $\lambda = (2, 1)$，只有两个标准 Young 表：

第一个是第一行填 $1, 2$，第二行填 3；第二个是第一行填 $1, 3$，第二行填 2。

标准 Young 表在 Specht 模的理论中扮演着核心角色。一个关键的定理是：基定理：

基定理
由所有形状为 λ 的标准 Young 表 t 生成的多项式 tabloids $\{e_t\}$ 构成了 Specht 模 S^λ 的一组基。

这个定理直接引出了计算维数的方法。

维数定理
不可约表示 S^λ 的维数等于形状为 λ 的标准 Young 表的数量。我们将这个数记为 f^λ。

3.1 勾长公式

虽然维数定理给出了一个组合解释，但对于较大的 Young 图，直接枚举所有标准 Young 表仍然是一项艰巨的任务。幸而勾长公式允许我们直接从 Young 图的形状计算出 f^λ 的值，从而得到表示的维数。

对于 Young 图 λ 中的任意一个方格 c，其勾由方格 c 本身、其正右方的所有方格以及其正下方的所有方格组成。勾长 h_c 定义为该勾中所含方格的总数。

勾长公式

对于一个包含 n 个方格的 Young 图 λ，其对应的不可约表示 S^λ 的维数（即形状为 λ 的标准 Young 表数量 f^λ）由下式给出：

$$\dim\left(S^\lambda\right) = f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{c\in\lambda} h_c} \tag{7}$$

其中，乘积遍历了 Young 图 λ 中的所有 n 个方格。

我们举一个例子，比如计算 $\mathbf{S}_5$ 中与分拆 $\lambda = (3, 2)$ 对应的不可约表示的维数。

首先，画出 Young 图并计算每个方格的勾长：

- 第一行：$(1, 1)$ 位置的勾长是 4（自身 + 右边 2 个 + 下边 1 个）；$(1, 2)$ 位置是 3；$(1, 3)$ 位置是 1。
- 第二行：$(2, 1)$ 位置的勾长是 2；$(2, 2)$ 位置是 1。

勾长的乘积为 $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 24$。

根据勾长公式，维数为：

$$\dim\left(S^{(3,2)}\right) = \frac{5!}{24} = \frac{120}{24} = 5 \tag{8}$$

这表明 $\mathbf{S}_5$ 有一个 5 维的不可约表示，对应于分拆 $(3, 2)$。

勾长公式是代数组合学中最精彩的结果之一。说明了 Young 图的组合结构（勾长）与一个代数不变量（表示维数）之间存在着对应。这些结构通过 Robinson-Schensted-Knuth 对应与概率论和几何学等领域相关联。

4 $\mathbf{S}_n$ 的特征标理论：Murnaghan-Nakayama 法则

表示 $\rho : G \to GL(V)$ 的特征标 χ_ρ 定义为 $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$。特征标的一个关键性质是它是一个类函数，即在同一个共轭类中的所有元素，其特征标值都相同。对于 $\mathbf{S}_n$，这意味着特征标的值仅依赖于置换的轮换型。因此，我们可以将与不可约表示 S^λ 对应的特征标 χ^λ 的值记为 $\chi^\lambda(\mu)$，其中 μ 是一个分拆，代表一个共轭类（轮换型）。

Murnaghan - Nakayama 法则是一个计算特征标值 $\chi^\lambda(\mu)$ 的递归组合算法。该法则将一个关于 $\mathbf{S}_n$ 的特征标计算问题，分解为若干个关于更小的对称群的特征标计算问题。

在叙述该法则之前，需要定义边界条的概念。一个斜 Young 图 λ/ν 是两个 Young 图 λ 和 ν 的集合差，其中 ν 的图包含在 λ 的图中。一个边界条是一个不包含任何 2×2 方块的连通斜 Young 图。边界条的高度 $\mathrm{ht}(\lambda/\nu)$ 定义为其所跨越的行数减一。

Murnaghan - Nakayama 法则

设 λ 是 n 的一个分拆，$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ 是 n 的另一个分拆。令 $\mu' = (\mu_2, \ldots, \mu_k)$ 是 $n - \mu_1$ 的一个分拆。则特征标值 $\chi^\lambda(\mu)$ 由以下递归公式给出：

$$\chi^\lambda(\mu) = \sum_\nu (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\nu)} \chi^\nu(\mu') \tag{9}$$

求和遍历所有满足 λ/ν 是一个大小为 μ_1 的边界条的分拆 ν。

这个递归过程的基例是 $\chi^{(\emptyset)}(\emptyset) = 1$，其中 $(\emptyset)$ 表示空分拆。如果在一个步骤中，无法从 Young 图 λ 中移除一个大小为 μ_1 的边界条，则该分支的贡献为零。

我们举一个计算 $\mathbf{S}_4$ 的特征标值 $\chi^{(2,1,1)}((3,1))$ 的例子：

这里 $\lambda = (2,1,1), \mu = (3,1)$。我们取 $\mu_1 = 3$。我们需要从 λ 的 Young 图中移除一个大小为 3 的边界条。

1. 移除第一行和第二行的最右边方格以及第三行的方格。这构成一个大小为 3 的边界条，剩下的 Young 图形状为 $\nu_1 = 1$ 。这个边界条跨越了 3 行，所以其高度为 $3 - 1 = 2$。
2. 没有其他方法可以移除一个大小为 3 的边界条。

因此，根据法则：

$$\chi^{(2,1,1)}((3,1)) = (-1)^2\chi^{(1)}((1)) \tag{10}$$

由于 $\chi^{(1)}$ 是 $\mathbf{S}_1$ 的平凡表示的特征标，其在单位元（轮换型 (1)）上的值为 1。所以:

$$\chi^{(2,1,1)}((3,1)) = 1 \cdot 1 = 1 \tag{11}$$

这个法则的算法提供了一个“分而治之”的策略来填充整个特征标表。这种递归结构反映了对称群族 $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{S}_n$ 的内在的归纳结构。移除一个大小为 1 的边界条的特殊情况，恰好对应于将 $\mathbf{S}_n$ 的表示限制到子群 $\mathbf{S}_{n-1}$ 时的分解规则，即所谓的分支规则。

Murnaghan-Nakayama 法则的理论基础来自于对称群表示理论与对称函数理论之间的联系。Frobenius 特征标公式通过 Frobenius 映射,将特征标与 Schur 函数和幂和对称函数联系起来。Murnaghan-Nakayama 法则本质上是 Schur 函数在幂和对称函数基下展开系数的一个组合解释。虽然 Frobenius 公式在理论上更为根本，但 Murnaghan-Nakayama 法则在实际计算中更为直接和实用。

5 Clifford 理论

我们现在开始考虑交错群 $\mathbf{A}_n$ 的表示理论。

Clifford 理论是研究一个群的表示如何在其正规子群上表现的通用框架。对于交错群 $\mathbf{A}_n$ 而言，由于它在 $\mathbf{S}_n$ 中的指数为 2，Clifford 理论给出了一个简洁而有力的结论。

5.1 Clifford 定理（指数为 2 的情形）

设 G 是一个有限群，H 是 G 的一个指数为 2 的正规子群。令 V 是 G 的一个不可约表示。当我们把 V 限制到子群 H 上时，得到的 H-表示 $V\downarrow_H$ 只有两种可能性:

1. $V\downarrow_H$ 仍然是不可约的。
2. $V\downarrow_H$ 分裂成两个不等价的、维数相同的不可约 H-表示的直和，即 $V\downarrow_H = W_1 \oplus W_2$。

决定发生哪种情况的判据非常明确。设 sgn 是 G 的那个在 H 上为 1、在 $G\backslash H$ 上为 -1 的一维表

示（对于 $\mathbf{S}_n$ 和 $\mathbf{A}_n$ 的情况，这正是符号表示）。

- 情况 1(保持不可约)发生,当且仅当 V 与其 " 扭转 " 表示 $V \otimes \mathrm{sgn}$ 是不等价的,即 $V \ncong V \otimes \mathrm{sgn}$。
- 情况 2（分裂）发生，当且仅当 V 与其 " 扭转 " 表示 $V \otimes \mathrm{sgn}$ 是等价的，即 $V \cong V \otimes \mathrm{sgn}$。

5.2 $\mathbf{A}_n$ 的不可约表示分类

现在，我们将 Clifford 理论的判据应用于对称群的 Specht 模，以获得对 $\mathbf{A}_n$ 不可约表示的完整分类。

关键在于我们提到的关系：$S^\lambda \otimes \mathrm{sgn} \cong S^{\lambda'}$, 其中 λ' 是 λ 的共轭分拆。将这个组合事实代入 Clifford 理论的代数判据中，我们得到一个纯粹的组合判据：

- $S^\lambda \ncong S^\lambda \otimes \mathrm{sgn}$ 等价于 $S^\lambda \ncong S^{\lambda'}$，这又等价于分拆 λ 与其共轭分拆 λ' 不相等，即 $\lambda \neq \lambda'$。
- $S^\lambda \cong S^\lambda \otimes \mathrm{sgn}$ 等价于 $S^\lambda \cong S^{\lambda'}$，这又等价于分拆 λ 与其共轭分拆 λ' 相等，即 $\lambda = \lambda'$（λ 是自共轭的）。

这个转换意义重大：一个抽象的代数同构问题被转化为了一个简单的几何对称性检查问题。我们只需观察一个 Young 图是否沿主对角线对称，就能预测其对应的表示在限制到 $\mathbf{A}_n$ 时的行为。

根据上述判据，我们可以将 $\mathbf{S}_n$ 的所有不可约表示 S^λ 分为两类，并确定它们如何生成 $\mathbf{A}_n$ 的不可约表示：

情况 1：非自共轭分拆 $(\lambda \neq \lambda')$

如果一个分拆 λ 不是自共轭的，那么它的共轭 λ' 是一个与之不同的分拆。根据判据，S^λ 在限制到 $\mathbf{A}_n$ 时保持不可约。即，$S^\lambda \downarrow \mathbf{A}_n$ 是一个不可约的 $\mathbf{A}_n$-表示。

此外，可以证明，由一对共轭分拆 $\{\lambda, \lambda'\}$ 产生的两个 $\mathbf{S}_n$-表示在限制到 $\mathbf{A}_n$ 后是同构的：

$$S^\lambda \downarrow_{\mathbf{A}_n} \cong S^{\lambda'} \downarrow_{\mathbf{A}_n} \tag{12}$$

因此，每一对非自共轭的共轭分拆 $\{\lambda, \lambda'\}$ 共同贡献了一个 $\mathbf{A}_n$ 的不可约表示。

情况 2：自共轭分拆 $(\lambda = \lambda')$

如果一个分拆 λ 是自共轭的，根据判据，S^λ 在限制到 $\mathbf{A}_n$ 时会分裂。它分解为两个维数相等但不同构的不可约 $\mathbf{A}_n$-表示的直和。我们通常将这两个表示记为 S^λ_+ 和 S^λ_-。它们的维数都是：

$$\dim\left(S^\lambda_+\right) = \dim\left(S^\lambda_-\right) = \frac{1}{2}\dim\left(S^\lambda\right) \tag{13}$$

因此，每一个自共轭分拆 λ 贡献了两个 $\mathbf{A}_n$ 的不可约表示。

分类总结：$\mathbf{A}_n$ 的一个完备且不等价的不可约表示集由以下部分构成：

1. 对于每一对非自共轭分拆 $\{\lambda, \lambda'\}$，取一个代表（例如，按字典序较小的那个），对应的不可约表示 $S^\lambda \downarrow_{\mathbf{A}_n}$。
2. 对于每一个自共轭分拆 λ，对应的两个不可约表示 S^λ_+ 和 S^λ_-。

这个分类揭示了“对称性决定分裂”。一个表示的代数行为（是否分裂）完全由其组合标签（Young 图）的几何性质（是否对称）所决定。

6 $\mathbf{A}_n$ 的特征标表

要计算 $\mathbf{A}_n$ 的特征标表，我们不仅需要知道其不可约表示（表的行），还需要知道其共轭类（表的列）。与表示的情况类似，$\mathbf{A}_n$ 的共轭类结构也与 $\mathbf{S}_n$ 的共轭类密切相关。

$\mathbf{A}_n$ 中的共轭类来自 $\mathbf{S}_n$ 中那些由偶置换构成的共轭类。一个属于 $\mathbf{A}_n$ 的 $\mathbf{S}_n$-共轭类 C_μ（其中 μ 是一个偶分拆，即 $n - l(\mu)$ 为偶数）在 $\mathbf{A}_n$ 中也可能发生分裂。

共轭类分裂判据
一个 $\mathbf{S}_n$ 的共轭类 C_μ（μ 为偶分拆）在 $\mathbf{A}_n$ 中分裂成两个大小相等的共轭类，当且仅当 μ 的所有部分（即轮换长度）都是互不相同的奇数。如果 μ 包含任何偶数长度的轮换，或者有重复的奇数长度的轮换，那么 C_μ 在 $\mathbf{A}_n$ 中保持为单个共轭类。

例如，在 $\mathbf{A}_4$ 中，轮换型为 $(3, 1)$ 的 $\mathbf{S}_4$-共轭类由 8 个 3-轮换组成。由于 3 和 1 都是奇数且互不相同，这个类在 $\mathbf{A}_4$ 中分裂成两个大小为 4 的共轭类。而轮换型为 $(2, 2)$ 的 $\mathbf{S}_4$-共轭类，虽然也是偶置换，但不满足分裂条件，因此在 $\mathbf{A}_4$ 中它仍然是单个共轭类。

这里出现了一个对偶性。决定表示分裂的条件是分拆的自共轭性。决定共轭类分裂的条件是分拆由互异奇部构成。数论中一个经典的结果（由 Euler 证明）表明，一个整数 n 的自共轭分拆的数量，恰好等于 n 的由互异奇部构成的分拆的数量。

这个组合恒等式并非巧合。它确保了 $\mathbf{A}_n$ 的特征标表是方阵。$\mathbf{A}_n$ 的不可约表示（行）的数量等于（非自共轭分拆对的数量）+2×（自共轭分拆的数量）。$\mathbf{A}_n$ 的共轭类（列）的数量等于（不分裂的偶分拆数量）+2×（分裂的偶分拆数量）。上述组合恒等式保证了这两个总数总是相等的。

有了 $\mathbf{A}_n$ 的表示和共轭类，我们可以从 $\mathbf{S}_n$ 的特征标表出发，系统地构造 $\mathbf{A}_n$ 的特征标表。

1. 对于来自非自共轭分拆 λ 的表示 $S^\lambda \downarrow_{\mathbf{A}_n}$：

   - 其特征标 $\chi^{\{\lambda,\lambda'\}}$ 就是 χ^λ（或等价地 $\chi^{\lambda'}$）限制在 $\mathbf{A}_n$ 的元素上。
   - 在一个不分裂的 $\mathbf{A}_n$-共轭类 C_μ 上，其值为 $\chi^\lambda(\mu)$。
   - 在一个分裂的 $\mathbf{S}_n$-共轭类 $C_\mu = C_\mu^+ \cup C_\mu^-$ 上，它在两个子类上的值相等，均为 $\chi^\lambda(\mu)$。

2. 对于来自自共轭分拆 λ 的表示 S_+^λ 和 S_-^λ：

   - 它们的特征标 χ_+^λ 和 χ_-^λ 满足 $\chi_+^\lambda + \chi_-^\lambda = \chi^\lambda \downarrow_{\mathbf{A}_n}$。
   - 在一个不分裂的 $\mathbf{A}_n$-共轭类 C_μ 上，这两个特征标的值相等：

$$\chi_+^\lambda(\mu) = \chi_-^\lambda(\mu) = \frac{1}{2}\chi^\lambda(\mu) \tag{14}$$

   - 在一个分裂的共轭类 $C_\mu = C_\mu^+ \cup C_\mu^-$ 上，这两个特征标的值不相等。设 $\mu = (h_1, h_2, \ldots, h_k)$ 是由互异奇部构成的分拆。其特征标值由以下公式给出：

$$\chi_\pm^\lambda(C_\mu^+) = \frac{1}{2}\left(\chi^\lambda(\mu) \pm \sqrt{(-1)^{(n-k)/2}\prod_{i=1}^{k} h_i}\right) \tag{15}$$

$$\chi_\pm^\lambda(C_\mu^-) = \frac{1}{2}\left(\chi^\lambda(\mu) \mp \sqrt{(-1)^{(n-k)/2}\prod_{i=1}^{k} h_i}\right) \tag{16}$$

   注意，根号下的项保证为正整数。这两个值通常是无理数，甚至是复数（如果根号下的值为负），它们互为代数共轭。

7 一个完整的计算示例

为了将上述理论具体化，我们将以 $n = 4$ 的情况为例，完整地走一遍从 $\mathbf{S}_4$ 到 $\mathbf{A}_4$ 的表示和特征标的计算过程。这个例子将清晰地展示所有核心概念的实际应用。

7.1 $\mathbf{S}_4$ 的表示与特征标

7.1.1 分拆与共轭类

$n = 4$ 有 5 个整数分拆，因此 $\mathbf{S}_4$ 有 5 个共轭类和 5 个不可约表示。这些分拆（轮换型）以及对应的共轭类大小为：

- $(1,1,1,1)$ 或 (1^4)：单位元 e。类大小为 1。
- $(2,1,1)$ 或 $(2,1^2)$：对换，如 (12)。类大小为 $\frac{4!}{1!\cdot 2^1\cdot 2!\cdot 1^2} = 6$。
- $(2,2)$：两个不相交对换的乘积，如 $(12)(34)$。类大小为 $\frac{4!}{2!\cdot 2^2} = 3$。
- $(3,1)$：3-轮换，如 (123)。类大小为 $\frac{4!}{1!\cdot 3^1\cdot 1!\cdot 1^{11}} = 8$。
- (4)：4-轮换，如 (1234)。类大小为 $\frac{4!}{1!\cdot 4^1} = 6$。

7.1.2 不可约表示的维数

我们使用勾长公式计算与 5 个分拆对应的 5 个不可约表示的维数：

- $\dim S^{(4)} = \frac{4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1$
- $\dim S^{(3,1)} = \frac{4!}{4\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 3$
- $\dim S^{(2,2)} = \frac{4!}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 2$
- $\dim S^{(2,1,1)} = \frac{4!}{3\cdot 1\cdot 1\cdot 1} = 3$
- $\dim S^{(1,1,1,1)} = \frac{4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1$

维数分别为 $1, 3, 2, 3, 1$。我们可以验证维数的平方和等于群的阶：

$$1^2+3^2+2^2+3^2+1^2=1+9+4+9+1=24=|\mathbf{S}_4| \tag{17}$$

7.1.3 S_4 的特征标表

利用 Murnaghan-Nakayama 法则、正交关系以及一些已知的表示（如平凡表示、符号表示、标准表示），我们可以构建出 $\mathbf{S}_4$ 的完整特征标表。

表 1: $\mathbf{S}_4$ 群的特征标表

C_μ (大小)	(1^4) (1)	$(2,1^2)$ (6)	$(2,2)$ (3)	$(3,1)$ (8)	(4) (6)
$\chi^{(4)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(3,1)}$	3	1	-1	0	-1
$\chi^{(2,2)}$	2	0	2	-1	0
$\chi^{(2,1,1)}$	3	-1	-1	0	1
$\chi^{(1,1,1,1)}$	1	-1	1	1	-1

7.2 从 S_4 推导 $\mathbf{A}_4$ 的表示理论

7.2.1 分类 S_4 的表示

我们根据分拆的自共轭性对 $\mathbf{S}_4$ 的表示进行分类：

- 非自共轭对：
  1. $\{(4),(1,1,1,1)\}$ 因为 $(4)'=(1,1,1,1)$。
  2. $\{(3,1),(2,1,1)\}$ 因为 $(3,1)'=(2,1,1)$。
- 自共轭分拆：
  1. $(2,2)$ 因为 $(2,2)'=(2,2)$。

根据 Clifford 理论，我们预测 $\mathbf{A}_4$ 应该有 $2+1\times 2=4$ 个不可约表示。

7.2.2 分类 $\mathbf{A}_4$ 的共轭类

$\mathbf{S}_4$ 中的偶置换对应的轮换型为 $\left(1^4\right),(2,2)$，和 $(3,1)$。我们检查这些共轭类的分裂情况：

- $C_{\left(1^4\right)}$：单位元，不分裂。在 $\mathbf{A}_4$ 中形成一个大小为 1 的类。
- $C_{(2,2)}$：轮换型 $(2,2)$ 不满足 " 互异奇部 " 条件。因此，它在 $\mathbf{A}_4$ 中不分裂，形成一个大小为 3 的类。
- $C_{(3,1)}$：轮换型 $(3,1)$ 由互异奇部 3 和 1 构成。因此，它在 $\mathbf{A}_4$ 中分裂成两个大小相等的共轭类。$\mathbf{S}_4$ 中该类大小为 8，所以在 $\mathbf{A}_4$ 中分裂为两个大小为 4 的类，我们记为 $C_{(3,1)}^{+}$ \$C_{(3,1)}^-\$。

总计，$\mathbf{A}_4$ 有 $1+1+2=4$ 个共轭类，这与我们对不可约表示数量的预测相符。

7.2.3 构造 $\mathbf{A}_4$ 的特征标表

现在我们逐一构造 $\mathbf{A}_4$ 的不可约特征标。

1. 来自非自共轭对 $\left\{(4),\left(1^4\right)\right\}$ 的表示：
   $S^{(4)}$（平凡表示）和 $S^{\left(1^4\right)}$（符号表示）在限制到 $\mathbf{A}_4$ 时都成为 $\mathbf{A}_4$ 的平凡表示。它们共同贡献了 $\mathbf{A}_4$ 的一个一维不可约表示，其特征标在所有元素上都为 1。
2. 来自非自共轭对 $\{(3,1),(2,1,1)\}$ 的表示：
   $S^{(3,1)}$ 和 $S^{(2,1,1)}$ 在限制到 $\mathbf{A}_4$ 时是同构的，并且保持不可约。我们只需取其中一个（如 $\chi^{(3,1)}$）在偶置换类上的值即可。
   - $\chi^{(3,1)}\left(1^4\right)=3$
   - $\chi^{(3,1)}(2,2)=-1$
   - $\chi^{(3,1)}(3,1)=0$。由于它在分裂的类上的值相等，所以在 $C_{(3,1)}^{+}$ 和 $C_{(3,1)}^{-}$ 上的值都是 0。这给了我们一个 3 维的不可约表示。
3. 来自自共轭分拆 $(2,2)$ 的表示：
   $S^{(2,2)}$ 在限制到 $\mathbf{A}_4$ 时分裂成两个一维表示 $S_{+}^{(2,2)}$ 和 $S_{-}^{(2,2)}$。
   - 在不分裂的类上，特征标值为 $\frac{1}{2}\chi^{(2,2)}(\mu)$。
     $\chi_{\pm}^{(2,2)}\left(1^4\right)=\frac{1}{2}\chi^{(2,2)}\left(1^4\right)=\frac{1}{2}(2)=1$。
     $\chi_{\pm}^{(2,2)}(2,2)=\frac{1}{2}\chi^{(2,2)}(2,2)=\frac{1}{2}(2)=1$。

- 在分裂的类 $C_{(3,1)}$ 上，我们使用公式。这里 $n=4, \mu=(3,1), k=2$（部分数）。
  $\chi^{(2,2)}(3,1)=-1$。
  $\sqrt{(-1)^{(n-k)/2}\prod h_i}=\sqrt{(-1)^{(4-2)/2}(3\cdot 1)}=\sqrt{-3}$。
  这里公式给出了复数值，但对于 $\mathbf{A}_4$ 的情况，其值实际上是三次单位根。这是因为 $\mathbf{S}_4$ 的这个 2 维表示可以看作是商群 $\mathbf{S}_4/\mathbf{V}_4 \cong \mathbf{S}_3$ 的标准表示的提升，而 $\mathbf{V}_4$ 是 $\mathbf{A}_4$ 的正规子群。限制到 $\mathbf{A}_4$ 后，它成为商群 $\mathbf{A}_4/\mathbf{V}_4 \cong C_3$ 的表示，该表示分裂为两个复共轭的一维表示。这两个表示的特征标值在 C_3 的生成元上（对应于 $\mathbf{A}_4$ 的 3 - 轮换）为 $\omega=e^{2\pi i/3}$ 和 $\omega^2=e^{-2\pi i/3}$。

7.2.4 $\mathbf{A}_4$ 的特征标表

综合以上计算，我们得到 $\mathbf{A}_4$ 的特征标表：

表 2: $\mathbf{A}_4$ 群的特征标表

C_μ (大小)	(1^4) (1)	$(2,2)$ (3)	$(3,1)^+$ (4)	$(3,1)^-$ (4)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

其中 $\omega=e^{2\pi i/3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$。

这个例子清晰地展示了理论的实际应用。特别值得注意的是，尽管 $\mathbf{S}_4$ 的所有特征标都是整数，但通过限制和分裂的过程，其子群 $\mathbf{A}_4$ 的特征标表中却自然地出现了非整的复数值。这揭示了子群的表示理论可以展现出比母群更丰富的算术结构，这些结构在母群的整数值特征标中被“隐藏”。