Dirichlet 定理的自守形式证明

Aug 2025

1 Dirichlet 定理的陈述

Dirichlet 算术级数定理是数论中一个经典的大定理，其正式陈述如下：

Dirichlet 定理
对于任意两个互素的正整数 a 和 d，在算术级数 $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$ 中，存在无穷多个素数。换言之，与 a 模 d 同余的素数有无穷多个。

此定理于 1837 年由 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet 证明，标志着解析数论的诞生。它极大推广了 Euclid 对素数无穷性的证明（即 $a=1, d=2$）的特例。一些数论中的经典结果也成为其简单推论，如有无穷多个 $4k+1$ 和 $4k+3$ 型素数。

Dirichlet 定理还有一个更强的形式，即：

Dirichlet 大定理
素数在模 d 的 $\phi(d)$ 个可能的互素剩余类中是均匀分布的。

具体来说，算术级数 $a+nd$ 中的素数在所有素数中占有的密度是 $\frac{1}{\phi(d)}$，其中 $\phi(d)$ 是 Euler 函数。

这个定理的一个直接推论是：该级数中的素数倒数之和是发散的。

2 通过特征建立的解析公式

为了从分析角度研究算术级数中的素数分布，Dirichlet 引入了一套强大的工具，即 Dirichlet 特征和 L 函数。

2.1 Dirichlet 特征

Dirichlet 特征是一种算术函数，它捕捉了模算术的乘法结构。模 d 的 Dirichlet 特征 χ 是从整数模 d 的乘法群 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ 到复数乘法群 $\mathbb{C}^\times$ 的一个群同态。

这个定义可以拓展为定义在所有整数 $\mathbb{Z}$ 上的函数，规定当 $\gcd(n, d) > 1$ 时，$\chi(n) = 0$。拓展后的函数 $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 是一个完全积性函数，并以 d 为周期。

所有模 d 的 Dirichlet 特征构成一个群，记为 $\widehat{(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})}^{\times}$，它与群 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\times}$ 同构，阶为 $\phi(d)$。

2.2 正交关系

Dirichlet 特征最重要的性质是其正交性，这使得他们具有与 Fourier 分析中的基函数类似的性质。

我们有：

- 对特征求和：

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} \phi(d) & \text{if } n \equiv 1 \mod d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

- 对元素求和：

$$\sum_{n \in (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^{\times}} \chi(n) = \begin{cases} \phi(d) & \text{if } \chi = \chi_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

  其中 χ_0 是主特征，即对所有与 d 互素的 n，$\chi_0(n) = 1$

2.3 Dirichlet L 函数

与每个 Dirichlet 特征 χ 相对应，可以定义一个 **Dirichlet L 函数**（或 L 函数）：

对于每个复变量 s，当 $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ 时，

$$L(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{3}$$

由于 χ 的完全积性，于是 L 函数可以表为一个无穷乘积，即 Euler 乘积：

$$L(s,\chi)=\prod_{p\text{ prime}}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \tag{4}$$

2.4 分离算术级数

利用特征的正交性，可以建立算术级数中素数分布与 L 函数之间的联系。对 $L(s,\chi)$ 取对数，可以得到一个与 von Mangoldt 函数相关的级数，它主要由素数幂贡献。通过对所有特征的 $\log L(s,\chi)$ 进行线性组合，可以分离出特定算术级数 $p\equiv a \pmod d$ 的素数贡献：

$$\sum_{p\equiv a \pmod d} p^{-s}\approx\frac{1}{\phi(d)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}\log L(s,\chi) \tag{5}$$

这个关系式表明，当 $s\to 1^+$ 时，左边的级数是否发散（即是否存在无穷多个此类素数），取决于右边 L 函数在 $s=1$ 处的行为。我们下面来证明这个估计：

由 Dirichlet l 函数的 Euler 乘积形式，对两边取对数有

$$\log L(s,\chi)=-\sum_{p\text{ prime}}\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right) \tag{6}$$

对 $\log(1-x)$ 进行级数展开，有

$$\log L(s,\chi)=\sum_{p}\left(\frac{\chi(p)}{p^s}+\frac{\chi\left(p^2\right)}{2p^{2s}}+\frac{\chi\left(p^3\right)}{3p^{3s}}+\ldots\right) \tag{7}$$

$$\log L(s,\chi)=\underbrace{\sum_{p}\frac{\chi(p)}{p^s}}_{\text{主要部分}}+\underbrace{\sum_{p}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\chi\left(p^k\right)}{kp^{ks}}}_{\text{次要部分}} \tag{8}$$

在 Dirichlet 定理的证明中，我们关心的是当 $s\to 1^+$ 时的行为。可以证明，上面式子中的“次要部分”在 $s\to 1^+$ 时是收敛到一个有限值的。因此，它的行为不会影响整个表达式是否发散。所以我们得到一个估计：

$$\log L(s,\chi) \approx \sum_{p \text{ prime}} \frac{\chi(p)}{p^s} \tag{9}$$

现在我们筛选出需要的那些满足 $p \equiv a \mod d$ 的素数，这需要 Dirichlet 特征的正交性。

我们有

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)}\chi(p) = \begin{cases} \phi(d) & \text{if } p \equiv a \mod d \\ 0 & \text{if } p \not\equiv a \mod d \end{cases} \tag{10}$$

上面这个正交关系读者可以思考如何得到，如果是学习过表示论的话这个关系是显然的，因为特征实际就是一个一维的复表示。

这里 χ 遍历模 d 的所有 $\phi(d)$ 个特征。

于是我们将之前的式子同乘 $\sum_{\chi} \overline{\chi}(a)$，得到

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log L(s,\chi) \approx \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \left(\sum_{p} \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \tag{11}$$

交换求和次序得到

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log L(s,\chi) \approx \sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p^s} \left(\sum_{\chi} \overline{\chi(a)}\chi(p) \right) = \sum_{p \equiv a \mod d} \frac{1}{p^s} \cdot \phi(d) \tag{12}$$

继而我们最终得到了

$$\sum_{p \equiv a \mod d} p^{-s} \approx \frac{1}{\phi(d)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log L(s,\chi) \tag{13}$$

接下来我们将主特征部分进行分离:

$$\sum_{p\equiv a \mod d} p^{-s} \approx \frac{1}{\phi(d)} \left(\log L(s,\chi_0) + \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(a)} \log L(s,\chi) \right) \tag{14}$$

对于其主特征项 $\log L(s,\chi_0)$，我们知道其将发散到无穷大（更进一步，有一阶极点）。所以我们如果可以证明非主特征项 $\sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(a)} \log L(s,\chi)$ 是一个有限数，那么就可以完成证明。又因为这是一个有限和，我们将尝试证明对于每一个 $\chi \neq \chi_0$，$0 \neq L(1,\chi) < \infty$。这便是本文接下来的主要任务。

3 $L(1,\chi)$ 的非零性质

Dirichlet 定理的整个证明最终归结为一个核心的分析事实：对于任何非主特征 χ，其 L 函数在 s=1 处的值 $L(1,\chi)$ 既是有限的，也非零。

对于主特征 χ_0，其 L 函数 $L(s,\chi_0)$ 与 Riemann Zeta 函数 $\zeta(s)$ 仅相差有限个 Euler 因子。由于 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处有一个简单极点，因此 $L(s,\chi_0)$ 也有一个简单极点。正是这个极点贡献了上式右边的发散项，从而驱动了定理的证明。

证明的主要困难在于，必须确保对于所有非主特征 $\chi \neq \chi_0$，其 L 函数在 $s=1$ 处的值 $L(1,\chi)$ 不为零。如果某个 $L(1,\chi)$ 等于零，它的零点可能会抵消掉来自主特征的极点，从而破坏整个论证。

Dirichlet 及其后继者发展了精妙的分析技巧来证明 $L(1,\chi) \neq 0$。证明过程根据特征是复的还是实的而分为两种情况。

- 复特征的情形（$\chi^2 \neq \chi_0$）

  对于复特征(即 χ 的值不全为实数),一个标准的“技巧”是构造辅助函数 $\lambda(s) = \zeta(s)^3 L(s,\chi)^4 L(s,\chi^2)$。

  利用 Euler 乘积，对于 $\mathrm{Re}(s) > 1$，我们对其取对数:

$$\log \lambda(s) = 3\log \zeta(s) + 4\log L(s,\chi) + \log(s,\chi^2) \tag{15}$$

  对其使用级数展开可得:

$$\log\lambda(s)=\sum_{p,k}\frac{1}{kp^{ks}}\left(3\chi_0\left(p^k\right)+4\chi\left(p^k\right)+\chi\left(p^k\right)^2\right) \tag{16}$$

其中 χ_0 是主特征，对于素数 $p, \chi_0(p^k)=1$。

我们关心 $\lambda(s)$ 的模长，于是对其取实部，由于 $\chi(p^k)$ 是一个单位根（或 0），我们可以设 $\chi(p^k)=e^{\sqrt{-1}\theta}$。那么 $\chi(p^k)^2=e^{2\sqrt{-1}\theta}$。于是得到：

$$\mathrm{Re}\left(3+4e^{i\theta}+e^{i2\theta}\right)=3+4\cos\theta+\cos(2\theta) \tag{17}$$

经过三角函数的验算得知上式是恒非负的，也即 $\log|\lambda(s)|$ 的级数展开式中每一项均非负，这意味着：

$$|\lambda(s)|\geq 1 \tag{18}$$

然而当 $s\to 1^+$ 时，$\zeta(s)^3$ 有一个三阶极点。假设 $L(1,\chi)=0$，那么它至少有一个一阶零点。由于 χ 是复特征，χ^2 不是主特征，因此 $L(s,\chi^2)$ 在 $s=1$ 处是有限非零的。这样一来，$L(s,\chi)^4$ 在 $s=1$ 处至少有一个四阶零点，这个零点的“强度”足以压倒 $\zeta(s)^3$ 的三阶极点，导致 $\lambda(s)\to 0$。这与 $|\lambda(s)|\geq 1$ 的结论相矛盾。因此，假设不成立，$L(1,\chi)\neq 0$。

- 实特征的情形（$\chi^2=\chi_0, \chi\neq\chi_0$）：

  此时上述的技巧失效，我们构造另一个辅助函数 $f(x)=\zeta(s)L(s,\chi)$。对于 $\mathrm{Re}(s)>1$，将其写成 Dirichlet 级数：

$$f(s)=\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^s}\right)\left(\sum_{k\geq 1}\frac{\chi(k)}{k^s}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s} \tag{19}$$

  其中 $a_n=\sum_{d|n}\chi(d)$ 由卷积给出。由于 χ 是积性函数，那么 a_n 亦然，于是我们将只在素数幂 p^k 上证明 $a_{p^k}\geq 0$，进而说明一切 a_n 恒非负。

$$a_{p^k}=\sum_{d|p^k}\chi(d)=\chi(1)+\chi(p)+\cdots+\chi(p^k) \tag{20}$$

由于 χ 完全积性，上式实际是一个等比数列求和：

1. 若 $\chi(p) = 1$，则 $a_{p^k} = k + 1 \geq 1$。
2. 若 $\chi(p) = -1$，则 $a_{p^k} = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^k\right) \geq 0$
3. 若 $\chi(p) = 0$（其实就是 $p|d$ 时），则 $a_{p^k} = 1$。

综上，对于一切素数米，a_{p^k} 均非负。由之前的讨论，任意 a_n 全是非负的。

接下来我们有两种方式导出矛盾：

法一 **使用 Landau 定理**。Landau 关于非负系数级数的定理指出：一个系数非负的 Dirichlet 级数 $\sum a_n n^{-s}$，其收敛轴线上的实数点 $s = \sigma_0$ 必是该函数的奇点。

我们的函数 $f(s)$ 的收敛域是 $\mathrm{Re}(s) > 1$，故 $s = 1$ 必是 $f(s)$ 的一个奇点。

然而 $\zeta(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个一阶极点，反证假设是 $L(1, \chi) = 0$，这又是一个至少一阶零点，与极点抵消，于是 $f(s)$ 在 $s = 1$ 处应当是解析的。继而得到了矛盾，完成证明。

法二 **分析 $s = \frac{1}{2}$ 处的行为**。

我们已经知道 a_n 0。我们来考察 n 是完全平方数 k^2 时 a_{k^2} 的值。可以证明 a_{k^2} 1。（例如，$a_{p^2} = 1 + \chi(p) + \chi(p)^2 = 1 \pm 1 + 1$ 1）。现在我们来看 $f(s)$ 的级数，只保留其中的完全平方项：

$$f(s) \geq \sum_{k \geq 1} \frac{a_{k^2}}{(k^2)^s} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2s}} = \zeta(2s) \tag{21}$$

我们证明了对于实数 $s > \frac{1}{2}$，$f(s)$ $\zeta(2s)$。我们知道 $\zeta(s)$ 在 $s = 1$ 有极点，因此 $\zeta(2s)$ 在 $s = \frac{1}{2}$ 有极点。当 $s \to \frac{1}{2}^+$ 时，$\zeta(2s) \to \infty$。因此，$f(s)$ 也必须 $\to \infty$。这意味着 $f(s)$ 在 $s = \frac{1}{2}$ 处不可能是解析的。

但回到 $f(s) = \zeta(s)L(s, \chi)$ 与反证假设 $L(1, \chi) = 0$。这个假设使得 $f(s)$ 不仅在 $s = 1$ 处解析，甚至在整个半平面 $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ 都是解析的。因此在 $s = \frac{1}{2}$ 处必然解析。于是我们同样得出矛盾，完成了证明。

对实特征需要一个独立且更复杂的证明，这并非经典方法的偶然产物，而是揭示了一个深刻的结构性差异。这种困难与数论中一个悬而未决的核心问题——“Siegel 零点”的存在性紧密相关。Siegel 零点是指 DirichletL 函数在实轴上可能存在的、异常接近 $s = 1$ 的零点。经典证明巧妙地绕开了这个问题在 $s = 1$ 这一点上的困难，但控制 L 函数在 $s = 1$ 附近行为的根本挑战依然存在。自守形式的框架并未消除这一困难，而是将其重新表述为自守表示的性质。

4 Adele 和 Idele 的语言

这一部分在自守形式里是一个比较大的话题，这里只罗列概念，具体的讨论可能要等另一篇随笔。

4.1 $\mathbb{Q}$ 的完备化

对于有理数域 $\mathbb{Q}$，除了通常的绝对值 $|\cdot|_\infty$（Archimedes 赋值），对每个素数 p，都存在一个 p-adic 绝对值 $|\cdot|p$（非 Archimedes 赋值）。$\mathbb{Q}$ 关于 $|\cdot|\infty$ 的完备化是实数域 $\mathbb{R}$，而关于 $|\cdot|_p$ 的完备化是 p-adic 数域 $\mathbb{Q}_p$。

4.2 Adele 环 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$

Adele 环 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 是将 $\mathbb{Q}$ 在所有赋值下的完备化 "粘合" 在一起的产物。它被定义为所有完备化 $\mathbb{Q}_v$（其中 v 是素数 p 或 ∞）的限制直积。一个 Adele$(x_v)_v$ 是一个元组，其中 $x_v \in \mathbb{Q}_v$ 且对于几乎所有的素数 p，x_p 都位于 p-adic 整数环 $\mathbb{Z}p$ 中。$\mathbb{A}\mathbb{Q}$ 是一个局部紧拓扑环，而 $\mathbb{Q}$ 可以对角嵌入其中，成为一个离散的、商空间紧的子群。这种拓扑结构为进行调和分析提供了理想的平台。

4.3 Idele 群 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$

Idele 群 $\mathbb{A}\mathbb{Q}^\times$ 是 Adele 环 $\mathbb{A}\mathbb{Q}$ 的可逆元群。它被定义为所有 $\mathbb{Q}_v^\times$ 关于 p-adic 单位群 $\mathbb{Z}p^\times$ 的限制直积。在现代术语中，Idele 群正是 $\mathbf{GL}(1, \mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 。

4.4 Idele 类群 $C_\mathbb{Q}$

Idele 类群 $C_\mathbb{Q}$ 是商群 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times$，其中 $\mathbb{Q}^\times$ 通过对角嵌入成为 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ 的离散子群。这个群是 $\mathbf{GL}(1)$ 自守形式理论的核心研究对象。

5 作为 $\mathbf{GL}(1)$ 自守形式的 Hecke 特征

5.1 Hecke 特征

一个 Hecke 特征，或称 Größencharakter，是 Idele 类群 $C_\mathbb{Q}$ 上的一个连续群同态 $\omega : C_\mathbb{Q} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$。这意味着 ω 是 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ 上的一个特征，并且在子群 $\mathbb{Q}^\times$ 上是平凡的（主特征）。

一个模 d 的 Dirichlet 特征 χ 可以被提升为一个 Hecke 特征 ω_χ：对于一个 Idele $x \in (x_p)$，我们可以通过其在 $p|d$ 处的分量和 p 与 d 互素处的 $\mathbb{Z}_p^\times$ 投影，来定义 $\omega_\chi(x)$ 的值，使其与经典 $\chi(n)$ 匹配。这个构造保证了 ω_χ 在 $\mathbb{Q}^\times$ 上是平凡的，因此它确实是一个 Hecke 特征。这个构造将在下一节中给出。

5.2 $\mathbf{GL}(1)$ 上的自守形式

现在我们可以进入分析视角。首先 $\mathbf{GL}(1)$ 就是乘法群，即 $\mathbf{GL}(1,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\times, \mathbf{GL}(1,\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathbb{I}_\mathbb{Q}$。

在 Langlands 纲领的语言中，$\mathbf{GL}(1,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上的一个自守形式是一个函数 $\phi : \mathbf{GL}(1,\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$，并且满足：

- 左不变性：$\phi(q \cdot x) = \phi(x)$ 对于一切 $q \in \mathbf{GL}(1,\mathbb{Q})$ 和 $x \in \mathbf{GL}(1,\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 换句话说，ϕ 是 $\mathbb{Q}^\times$ 左不变的，因此也可以看作是商空间 $\mathbb{Q}^\times \setminus \mathbb{I}_\mathbb{Q}$ 上的函数。
- 中心特征：$\mathbf{GL}(1)$ 的中心就是其自身。这个条件要求 ϕ 满足某个中心特征 ω 的变化规律。对于 Abel 群，这个条件实际上就是 ϕ 要求作为群同态。
- 缓增条件：函数 ϕ 在某个方向上不能增长太快。这是一个分析条件，并具有强烈的调和分析特质。从此也可以看出自守形式将分析学工具与代数数论问题进行了高度的融合。

现在我们可以看到为什么 Hecke 特征就是 $\mathbf{GL}(1)$ 的自守形式：

任取一个 Hecke 特征 $\omega : \mathbb{I}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$。我们将其看作 $\mathbb{I}_\mathbb{Q}$ 上的一个函数，很容易验证其满足自守形式定义中的三个条件（读者容易自行验证）。

反过来，任何一个 $\mathbf{GL}(1)$ 的自守形式 ϕ 由于其 $\mathbb{Q}^\times$ 不变性，可以看做 Idele 类群 $C_\mathbb{Q}$ 上的函数，而中心特征与缓增条件将限制其必须是一个 Hecke 特征的倍数。

于是对于 $\mathbf{GL}(1)$ 这个最简单的情形，自守形式的空间是一维的，并且恰好由 Hecke 特征本身张成。因此，Hecke 特征就是 $\mathbf{GL}(1)$ 的自守表示。

这种重新概念化是极其深刻的：一个代数对象（“特征”）被等同于一个分析对象（“自守形式”）。这是 Langlands 纲领的奠基性一步，它预示着代数（Galois 表示）与分析（自守表示）之间存在着深刻的对偶关系。

6 Idele 提升

为了将 Dirichlet 定理纳入自守框架，关键一步是将经典的 Dirichlet 特征 χ “提升”为一个 Hecke 特征 ω_χ。这个过程被称为 Idele 提升。

Hecke 特征 ω_χ 是通过定义其在每个局部域 $\mathbb{Q}_v$ 上的分量 ω_v 来构造的。对于一个 Idele $g = (g_v)_v$，定义 $\omega_\chi(g) = \prod_v \omega_v(g_v)$。

- 在有限素数 p 处（$p \nmid d$）：此时特征 χ 在 p 处是**未分歧**的。根据 Idele 的定义，$g_p \in \mathbb{Z}_p^\times$。我们定义局部特征 ω_p 在 $\mathbb{Z}_p^\times$ 上是平凡的，即 $\omega_p(g_p) = 1$。
- 在有限素数 p 处（$p|d$）：此时特征 χ 在 p 处是**分歧**的。经典特征 χ 可以看作是 $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ 上的特征，通过中国剩余定理，它可以分解为每个 $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$ 上的局部特征。这个局部特征被用来定义 ω_p 在 $\mathbb{Z}_p^\times$ 上的值，然后可以将其扩展到整个 $\mathbb{Q}_p^\times$。
- 在无限素数 ∞ 处：局部特征 ω_∞ 捕捉了经典特征的**奇偶性**。定义 $\omega_\infty(g_\infty) = \mathrm{sgn}(g_\infty)^a$，其中当 $\chi(-1) = 1$（偶特征）时 $a = 0$，当 $\chi(-1) = -1$（奇特征）时 $a = 1$。

构造的核心在于验证，对于任意非零有理数 $q \in \mathbb{Q}^\times$，将 q 视为一个主 Idele（即在每个局部域的分量都是 q），我们有 $\omega_\chi(q) = \prod_v \omega_v(q) = 1$。这个乘积为 1 的事实（即乘积公式）是一个深刻的算术结果，其本质与二次互反律及其推广相关。这个性质保证了 ω_χ 在 $\mathbb{Q}^\times$ 上是平凡的，因此它是一个定义在 Idele 类群 $C_\mathbb{Q}$ 上的良定义的函数。

Adele 框架的优越性之一在于它统一了所有“位”，无论是有限素数还是无限的实数位。在经典理论中，L 函数的函数方程需要人为地引入一个 Gamma 函数因子 $\Gamma(s)$ 来“补全”。从 Adele 的视角看，这个 Gamma 函数因子并非外来之物，它正是 L 函数在无限位处的局部因子 $L_\infty(s, \omega_\infty)$ 。因此，经典理论中“Dirichlet 级数”和其“完备 L 函数”的区分消失了，取而代之的是一个统一的对象——自守 L 函数，它被定义为在所有位上的欧拉乘积。

与 Hecke 特征 ω 相联系的自守 L 函数定义为在所有位 v 上的欧拉乘积：$L(s, \omega) = \prod_v L_v(s, \omega_v)$。一个关键的计算表明，对于 Dirichlet 特征 χ，其自守 L 函数 $L(s, \omega_\chi)$ 与经典的 DirichletL 函数 $L(s, \chi)$（在补上 Gamma 因子后）是完全相同的。

7 Tate 论文

自守框架不仅提供了一种更优雅的语言，还带来了一种全新的证明思路，其核心是 Tate 的博士论文中发展的调和分析方法。Tate 的核心思想是将 L 函数重新表示为一个在 Idele 群上的积分，而

不是一个级数或乘积。这种积分表示被称为 Zeta 积分，它使得强大的调和分析工具（如傅里叶变换和泊松求和公式）得以应用。

对于一个 Adele 环 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 上的"良好"测试函数（Schwartz−Bruhat 函数）Φ，一个 Hecke 特征 ω 和复变量 s，Tate 的 Zeta 积分定义为：

$$Z(\Phi,\omega,s)=\int \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}\Phi(x)\omega(x)|x|^{s}d^{\times}x \tag{22}$$

其中 $|x|$ 是 Idele 的范数，$d^{\times}x$ 是 Idele 群上的 Haar 测度。通过恰当地选取测试函数 Φ，可以证明这个 Zeta 积分等于完备的 L 函数 $\Lambda(s,\omega)$ 。

这是 Adele 环上调和分析的基石，它指出对于任何 Schwartz−Bruhat 函数 Φ，有 $\sum_{q\in\mathbb{Q}}\Phi(q)=\sum_{q\in\mathbb{Q}}\widehat{\Phi}(q)$，其中 $\widehat{\Phi}$ 是 Φ 的 Adele Fourier 变换。

Tate 通过将 Zeta 积分分解为范数大于 1 和小于等于 1 两部分，并对其中一部分应用泊松求和公式，从而证明了 Zeta 积分满足函数方程：

$$Z(\Phi,\omega,s)=Z(\widehat{\Phi},\omega^{-1},1-s) \tag{23}$$

这个单一的、统一的证明，为所有 Hecke L 函数（因此包括所有 Dirichlet L 函数）提供了亚纯延拓和函数方程。这个过程揭示了 L 函数的函数方程本质上是 Adele 加法群上的庞特里亚金对偶性（通过泊松求和体现）的结果。$s\leftrightarrow 1-s$ 的对称性直接反应了函数 Φ 和其 Fourier 变换 $\widehat{\Phi}$ 之间的对偶关系。

8 非零性质的自守证明

我们终于可以在自守框架内，给出一个更具结构性的代数证明来显示 $L(1,\chi)\neq 0$。

对于一个代数数域 K，其 DedekindZeta 函数 $\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}}(N\mathfrak{a})^{-s}$（求和遍及 K 的整数环 $\mathcal{O}_K$ 的所有非零理想 $\mathfrak{a}$）可以被看作是 K 的 Idele 类群 C_K 上的平凡 Hecke 特征所对应的自守 L 函数。解析类数公式指出，$\zeta_K(s)$ 在 $s=1$ 处有一个简单极点。这个极点的存在是一个基本的结构性事实，其留数编码了 K 的关键算术不变量，如类数和单位根的个数等。

考虑 d-次分圆域 $K=\mathbb{Q}(\zeta_d)$。代数数论（具体地，类域论）的一个核心结果是，其 DedekindZeta 函数可以分解为一系列 Dirichlet L 函数的乘积：

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\zeta_d)}(s) = \prod_{\chi \mod d} L(s,\chi) \tag{24}$$

其中乘积遍及所有模 d 的（本原）Dirichlet 特征 χ 。在自守语言中，这对应于一个可约的自守表示（由 $\mathbb{Q}$ 上的平凡表示诱导到 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$）的 L 函数分解为其不可约分量（即与各个 Hecke 特征 ω_χ 相关的 L 函数）的乘积。

我们最终可以通过下面的方法进行证明，证明的核心思想是分析分圆域 $K = \mathbb{Q}(\zeta_d)$ 的 Dedekind Zeta 函数 $\zeta_K(s)$ 在 $s=1$ 处的行为：

1. 通过解析类数公式（我首页的左侧第一个公式），我们了解到 $\zeta_K(s)$ 在 $s=1$ 处有一个一阶极点。
2. 由于分圆域的 Dedekind Zeta 函数可以完全分解为与模 d 的 Dirichlet 特征相关的 L 函数乘积，并且我们将主特征部分分离：

$$\zeta_K(s) = L(s,\chi_0)\prod_{\chi\neq\chi_0} L(s,\chi) \approx \zeta(s)\prod_{\chi\neq\chi_0} L(s,\chi) \tag{25}$$

   我们对两边取于 $s=1$ 处的零点阶：

$$\operatorname{ord}_{s=1}\zeta_K(s) = \operatorname{ord}_{s=1}\left(\prod_{\chi} L(s,)\right) = \sum_{\chi}\operatorname{ord}_{s=1} L(s,\chi) = -1 \tag{26}$$

3. 由于主特征项在 $s=1$ 处已经有一个一阶极点，这说明

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\operatorname{ord}_{s=1} L(s,\chi) = 0 \tag{27}$$

   由根据经典的 L 函数解析性质结果：由于对于非主特征，$\sum\chi(n)$ 的部分和是有界的，这保证了 $\sum\chi(n)n^{-s}$ 在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 整个右半平面解析，那么其零点阶数必然非负。

   于是只能有对于一切非主特征 χ，$\operatorname{ord}_{s=1} L(s,\chi)=0$。

4. 零点阶为 0，那么说明 $0\neq L(1,\chi)<\infty$。