$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的表示

Aug 2025

讨论特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的表示，并复习了最高权理论，此外，依旧使用到了 Young（图/表）的组合理论。

1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示

本章旨在通过最简单的非阿贝尔半单 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的例子，为半单 Lie 代数的表示理论建立基本原则。此处发展的核心概念，权、最高权向量，以及通过对称幂进行的分类将作为后续所有分析的蓝图。

1.1 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的结构：标准基与对易关系

Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 定义为所有迹为零的 2×2 复矩阵构成的集合，其 Lie 括号运算由矩阵的对易子 $[A, B] = AB - BA$ 给出。这是一个三维复向量空间。为了系统地研究其表示，我们选取一组特定的基，称为标准基 $\{H, X, Y\}$，其定义如下：

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

这组基的选择并非偶然。H 是一个对角矩阵，代表了 Cartan 子代数（在此例中为一维）；X 和 Y 分别是严格上三角和下三角矩阵，它们在 H 的伴随作用下是特征向量。通过直接的矩阵乘法，我们可以计算出它们之间至关重要的对易关系，这些关系构成了整个 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 表示理论的代数基石：

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H \tag{2}$$

这些关系揭示了代数的内在结构：H 的伴随作用在上、下三角矩阵上有非零的特征值，而 X 和 Y 的对易子闭合到 H。正是这一结构决定了其所有表示的性质。

1.2 权、权空间与最高权向量

研究 Lie 代数表示的核心策略是通过其结构来约束其在向量空间上的作用方式。对于半单 Lie 代数，一个关键性质是其 Cartan 子代数中的元素在任何有限维表示中的作用都是可对角化的。对于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，这意味着 H 在任何有限维表示 V 上的作用都是可对角化的。因此，表示空间 V 可以被分解为 H 的特征空间的直和：

$$V = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}} V_\alpha \tag{3}$$

其中 $V_\alpha = \{v \in V \mid H(v) = \alpha \cdot v\}$。标量 α 称为表示 V 的一个**权**。子空间 V_α 称为权 α 对应的**权空间**。

接下来，我们分析 X 和 Y 如何作用于这些权空间。这揭示了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表示理论的动力学，此计算是后续所有分析的基础，被称为“基本计算”。

考虑一个权为 α 的向量 $v \in V_\alpha$。我们计算 H 作用在 $X(v)$ 上的结果：

$$H(X(v)) = X(H(v)) + [H,X](v) = X(\alpha \cdot v) + 2X(v) = (\alpha + 2) \cdot X(v) \tag{4}$$

这个结果表明，如果 v 是 H 的一个特征向量，其特征值为 α，那么 $X(v)$（如果非零）也是 H 的一个特征向量，但其特征值为 $\alpha + 2$。因此，X 的作用是将权空间 V_α 映射到 $V_{\alpha+2}$。

同理，我们计算 H 作用在 $Y(v)$ 上的结果：

$$H(Y(v)) = Y(H(v)) + [H,Y](v) = Y(\alpha \cdot v) - 2Y(v) = (\alpha - 2) \cdot Y(v) \tag{5}$$

这表明 Y 的作用是将权空间 V_α 映射到 $V_{\alpha-2}$。

X 和 Y 因此被称为**升算子**和**降算子**，或统称为**阶梯算子**。它们在权构成的“阶梯”上移动向量。由于 V 是有限维的，这个阶梯必须在两端终止。这意味着存在一个权 α 使得 $V_\alpha \neq \{0\}$ 但 $V_{\alpha+2} = \{0\}$。对于任何非零向量 $v \in V_\alpha$，必然有 $X(v) = 0$。

一个非零向量 $v \in V$，如果它既是 H 的特征向量，又被 X 湮灭（即 $X(v) = 0$），则称其为**最高权向量**。最高权向量对应的权 α 称为该表示的**最高权**。

1.3 不可约表示的分类：标准表示的对称幂

任何有限维不可约表示 V 都必须包含一个最高权向量。令人惊讶的是，这个向量和它的最高权 n 完全决定了整个表示的结构。

1. 生成整个空间： 设 v_0 是一个最高权为 n 的最高权向量。考虑由 v_0 通过重复作用 Y 生成的向量序列：

$$v_0,\ v_1 = Y(v_0),\ v_2 = Y^2(v_0),\ \dots \tag{6}$$

令 W 为这些向量张成的子空间。我们证明 W 在 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的作用下是不变的。

- Y **的作用**：显然保持 W 不变，因为 $Y(Y^k v_0) = Y^{k+1} v_0 \in W$。
- H **的作用**：也保持 W 不变，因为 $Y^k v_0$ 是权为 $n-2k$ 的权向量，即 $H(Y^k v_0) = (n-2k) Y^k v_0 \in W$。
- X **的作用**：通过数学归纳法证明 X 保持 W 不变，计算 $X(Y^m v_0)$：

  当 $m = 0$ 时，$X(v_0) = 0 \in W$。

  当 $m = 1$ 时，

  $$X(Y v_0) = [X, Y] v_0 + Y(X v_0) = H(v_0) + Y(0) = n \cdot v_0 \in W \tag{7}$$

  假设 $X(Y^{m-1} v_0) = (m-1)(n-(m-1)+1) Y^{m-2} v_0 = (m-1)(n-m+2) Y^{m-2} v_0$，则

  $$X(Y^m v_0) = X(Y(Y^{m-1} v_0)) = m(n-m+1) Y^{m-1} v_0 \tag{8}$$

  因此，我们得到：$X(Y^m v_0) = m(n-m+1) Y^{m-1} v_0$。这个公式表明 X 将 W 中的每个基向量映射到前一个基向量的倍数，所以 $X(W) \subset W$。由于 V 是不可约的，且 W 是一个非零不变子空间，我们必有 $W = V$。

2. 权的量子化： 由于 V 是有限维的，向量序列 $v_0, Y(v_0), Y^2(v_0), \dots$ 必须在某处终止。设 m 是第一个使得 $Y^m v_0 = 0$ 的正整数。这意味着 $Y^{m-1} v_0 \neq 0$。我们将 X 作用于 $Y^m v_0$：

$$X(Y^m v_0) = m(n-m+1) Y^{m-1} v_0 \tag{9}$$

由于 $X(Y^m v_0) = X(0) = 0$ 而 $Y^{m-1} v_0 \neq 0$，我们必须有系数为零：

$$m(n-m+1) = 0 \tag{10}$$

因为 $m>0$，所以 $n-m+1=0$，即 $n=m-1$。这表明最高权 n 必须是一个非负整数。

3. 结构的唯一性： 这个结果表明，对于任何给定的非负整数 n，如果存在一个最高权为 n 的不可约表示，那么它的维数必须是 $n+1$，其权必须构成一个完整的、对称的整数序列：$n, n-2, \ldots, -n+2, -n$。并且，每个权空间都是一维的。由于不可约表示由其最高权唯一确定，我们得出结论：对于每个非负整数 n，最多只有一个（同构意义下）不可约表示，记为 $V^{(n)}$。

现在我们需要为每个非负整数 n 构造一个具体的不可约表示 $V^{(n)}$。

令 $V=\mathbb{C}^2$ 为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的标准表示，其基为 $\{x,y\}$，其中 $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。我们有：

$$\begin{aligned} H(x)=x, &\quad H(y)=-y \\ X(x)=0, &\quad X(y)=x \\ Y(x)=y, &\quad Y(y)=0 \end{aligned} \tag{11}$$

V 的权是 1 和 -1。x 是一个最高权向量，最高权为 1。因此，$V\cong V^{(1)}$。

考虑 V 的 n 次对称幂 $\mathrm{Sym}^n(V)$。这个空间的一个自然基是单项式 $\{x^n, x^{n-1}y, \ldots, x^k y^{n-k}, \ldots, y^n\}$。$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的作用通过其在 V 上的作用的 Leibniz 法则导出：$g\cdot(uv)=(g\cdot u)v+u(g\cdot v)$。

我们计算 H 在基向量 $x^{n-k}y^k$ 上的作用：

$$H(x^{n-k}y^k)=(n-k)H(x)x^{n-k-1}y^k+kx^{n-k}H(y)y^{k-1}=(n-2k)x^{n-k}y^k \tag{12}$$

当 k 从 0 取到 n 时，权 $(n-2k)$ 取遍了所有值 $n, n-2, \ldots, -n$。每个权都只出现一次，因此所有权空间都是一维的。

x^n 是一个最高权向量，因为 $X(x^n)=nX(x)x^{n-1}=0$，其最高权为 n。由于 $\mathrm{Sym}^n(V)$ 包含一个最高权为 n 的最高权向量，并且其权集合与我们推导出的 $V^{(n)}$ 的权集合完全一致，且所有权空间都是一维的，这足以证明 $\mathrm{Sym}^n(V)$ 是不可约的。

因此，我们得出以下基本定理：

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示基本定理
对任意非负整数 n，存在一个唯一的 $(n+1)$ 维不可约表示 $V^{(n)}$，其最高权为 n。这个表示同构于标准表示 $V=\mathbb{C}^2$ 的 n 次对称幂 $\mathrm{Sym}^n(V)$。

为了将上述理论具体化，我们显式地计算生成元 $\{H,X,Y\}$ 在表示 $V^{(2)}=\mathrm{Sym}^2(V)$ 和 $V^{(3)}=$

$\mathrm{Sym}^3(V)$ 上的矩阵表示。

- 表示 $V^{(2)} = \mathrm{Sym}^2(V)$

  $V^{(2)}$ 的维数是 $2+1=3$。我们选择基 $\{v_0, v_1, v_2\} = \{x^2, xy, y^2\}$。根据莱布尼茨法则，我们计算 H, X, Y 的作用：

  H 的作用： $H(x^2) = 2x^2, H(xy) = 0, H(y^2) = -2y^2$

  所以，在基 $\{x^2, xy, y^2\}$ 下，H 的矩阵表示为：

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

  X 的作用： $X(x^2)0, X(xy) = x^2, X(y^2) = 2xy$

  所以，X 的矩阵表示为：

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

  Y 的作用： $Y(x^2) = 2xy, Y(xy) = y^2, Y(y^2) = 0$

  所以，Y 的矩阵表示为：

$$\rho(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

  读者可以自行验证，这些 3×3 矩阵满足 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的对易关系。

- 表示 $V^{(3)} = \mathrm{Sym}^3(V)$

  $V^{(3)}$ 的维数是 $3+1=4$。我们选择基 $\{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$。

  H 的作用： $H(x^3) = 3x^3, H(x^2y) = x^2y, H(xy^2) = -xy^2, H(y^3) = -3y^3$

  矩阵表示为：

$$\rho(H) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

X 的作用： $X(x^3)=0, X(x^2y)=x^3, X(xy^2)=2x^2y, X(y^3)=3X(y)y^2=3xy^2$

矩阵表示为：

$$\rho(X)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{17}$$

Y 的作用： $Y(x^3)=3x^2y, Y(x^2y)=2xy^2, Y(xy^2)=y^3, Y(y^3)=0$

矩阵表示为：

$$\rho(Y)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \tag{18}$$

1.4 张量积分解：Clebsch-Gordan 公式

表示论的一个核心问题是理解如何分解两个不可约表示的张量积，这个问题在文献中通常被称为“多重性理论”。对于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，这个问题的答案是一个优美的公式，称为 Clebsch-Gordan 公式。

考虑张量积 $W=V^{(n)}\otimes V^{(m)}$。W 也是一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示。H 在 W 上的作用是对角化的，其权是 $V^{(n)}$ 和 $V^{(m)}$ 的权之和。$V^{(n)}$ 的权为 $\{n,n-2,\ldots,-n\}$，$V^{(m)}$ 的权为 $\{m,m-2,\ldots,-m\}$。因此，W 的权集合是：

$$\{\alpha+\beta \mid \alpha\in\{n,n-2,\ldots,-n\},\beta\in\{m,m-2,\ldots,-m\}\} \tag{19}$$

W 中的最高权是 $n+m$，它只出现一次，由 $v_0^{(n)}\otimes v_0^{(m)}$ 生成，其中 $v_0^{(n)}$ 和 $v_0^{(m)}$ 分别是 $V^{(n)}$ 和 $V^{(m)}$ 的最高权向量。这个向量是 W 的一个最高权向量，因为它被 X 湮灭：

$$X(v_0^{(n)}\otimes v_0^{(m)})=X(v_0^{(n)})\otimes v_0^{(m)}+v_0^{(n)}\otimes X(v_0^{(m)})=0\otimes v_0^{(m)}+v_0^{(n)}\otimes 0=0 \tag{20}$$

根据我们的分类定理，这意味着 W 包含一个同构于 $V^{(n+m)}$ 的不可约子表示。

由于半单 Lie 代数的所有有限维表示都是完全可约的（即可以分解为不可约表示的直和），我们可以写出 $W\cong V^{(n+m)}\oplus W'$。$W'$ 的权集合可以通过从 W 的权集合中减去 $V^{(n+m)}$ 的权集合得到。

$V^{(n+m)}$ 的权是 $\{n+m, n+m-2, \ldots, -(n+m)\}$，每个重数为 1。$W$ 中权 $n+m-2$ 的重数是 2（由 $v_1^{(n)} \otimes v_0^{(m)}$ 和 $v_0^{(n)} \otimes v_1^{(m)}$ 贡献），因此在 W' 中权 $n+m-2$ 的重数是 $2-1=1$。这个权是 W' 中的最高权，所以 W' 包含一个同构于 $V^{(n+m-2)}$ 的子表示。

重复这个过程，我们不断地从剩余的表示中"剥离"出最高权的不可约分量。最终我们得到 Clebsch-Gordan 公式：

$$V^{(n)} \otimes V^{(m)} \cong \bigoplus_{k=0}^{\min(n,m)} V^{(n+m-2k)} \tag{21}$$

这个公式表明，张量积分解为一系列不可约表示的直和，其最高权以 2 为步长递减。

计算实例： $V^{(2)} \otimes V^{(1)}$

我们来分解 $V^{(2)} \otimes V^{(1)}$，其中 $V^{(2)} = \mathrm{Sym}^2(V)$，$V^{(1)} = V$。根据公式，我们预期结果是 $V^{(2+1)} \oplus V^{(2-1)} = V^{(3)} \oplus V^{(1)}$。

- $V^{(2)}$ 的权是 $\{2, 0, -2\}$。
- $V^{(1)}$ 的权是 $\{1, -1\}$。
- $V^{(2)} \otimes V^{(1)}$ 的权是 $\{2+1, 2-1, 0+1, 0-1, -2+1, -2-1\} = \{3, 1, 1, -1, -1, -3\}$。

权图如下：

权	-3	-2	-1	0	1	2	3
重数	1	0	2	0	2	0	1

最高权是 3，所以它包含一个 $V^{(3)}$。$V^{(3)}$ 的权是 $\{3, 1, -1, -3\}$，每个重数为 1。从 $V^{(2)} \otimes V^{(1)}$ 的权中减去 $V^{(3)}$ 的权，我们剩下：

权	-3	-2	-1	0	1	2	3
剩余重数	0	0	1	0	1	0	0

剩下的权是 $\{1, -1\}$，每个重数为 1，这正是 $V^{(1)}$ 的权。因此，我们验证了分解：

$$V^{(2)} \otimes V^{(1)} \cong V^{(3)} \oplus V^{(1)} \tag{22}$$

这个过程揭示了一个深刻的原理：$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的代数结构不仅决定了不可约表示的基本形态，还通过张量积的分解规则，支配了这些基本构件如何组合成更复杂的结构。

表 1.1： $V^{(n)}$ 的权与基向量

为了便于参考，下表总结了不可约表示 $V^{(n)}$ 的结构。设 v_0 为最高权向量。

权 (H 的特征值)	基向量 (v_k)	$H(v_k)$	$Y(v_k)$	$X(v_k)$
n	v_0	$n \cdot v_0$	v_1	0
$n-2$	$v_1 = Y(v_0)$	$(n-2) \cdot v_1$	$2v_2$	$n \cdot v_0$
$n-4$	$v_2 = \frac{1}{2!}Y^2(v_0)$	$(n-4) \cdot v_2$	$3v_3$	$(2n-2) \cdot v_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2k$	$v_k = \frac{1}{k!}Y^k(v_0)$	$(n-2k) \cdot v_k$	$(k+1)v_{k+1}$	$(n-k+1) \cdot v_{k-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-n$	$v_n = \frac{1}{n!}Y^n(v_0)$	$-n \cdot v_n$	0	$n \cdot v_{n-1}$

2 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的表示

2.1 从 H 到 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$

在 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的分析中，单个元素 H 的对角化作用是关键。对于 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$，单个元素已不足以完全对角化其表示。正确的推广是使用一个可交换的、其元素均可对角化的子代数，即 **Cartan 子代数** $\mathfrak{h}$。对于 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$，$\mathfrak{h}$ 是所有迹为零的 3×3 对角矩阵构成的二维子空间：

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} \middle| h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}, h_1 + h_2 + h_3 = 0 \right\} \tag{23}$$

由于 $\mathfrak{h}$ 中所有元素都是对角矩阵，它们相互对易，并且在任何表示 V 上都可以同时对角化。因此，表示空间 V 可以分解为 $\mathfrak{h}$ 的公共特征空间的直和：

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} V_\alpha \tag{24}$$

这里的“特征值”不再是一个简单的标量，而是一个线性泛函 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$，称为**权**。对于任意 $v \in V_\alpha$ 和任意 $H \in \mathfrak{h}$，我们有 $H(v) = \alpha(H) \cdot v$。对应的子空间 V_α 称为**权空间**。

2.2 根、根空间与 $\mathbf{A}_2$ 型根系

为了理解 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的结构，我们首先将其自身视为一个表示——即**伴随表示**，其中 Lie 代数通过 Lie 括号作用于自身：$X \mapsto \mathrm{ad}(X)$，其中 $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$。我们将 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 作用于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$，并找出其权和权空间。

对于任意 $H = \mathrm{diag}(h_1,h_2,h_3) \in \mathfrak{h}$ 和一个矩阵单位 E_{ij}（在 (i,j) 位置为 1，其余为 0 的矩阵），我们计算它们的对易子：

$$[H,E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = (h_i - h_j)E_{ij} \tag{25}$$

这个计算表明，E_{ij} $(i \neq j)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的伴随作用下的一个公共特征向量。其对应的权是一个线性泛函，我们将它记为 $L_i - L_j \in \mathfrak{h}^*$，其定义为 $(L_i - L_j)(H) = h_i - h_j$。这里 $L_k \in \mathfrak{h}^*$ 是一个线性泛函，它选取对角矩阵的第 k 个元素，即 $L_k(\mathrm{diag}(h_1,h_2,h_3)) = h_k$。

伴随表示的非零权被称为**根**，对应的特征空间被称为**根空间** $\mathfrak{g}_\alpha$。

- **根系：** $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的根系 R 由六个根组成：

$$R = \{L_1 - L_2, L_2 - L_1, L_1 - L_3, L_3 - L_1, L_2 - L_3, L_3 - L_2\} \tag{26}$$

- **根空间：** 每个根 $\alpha = L_i - L_j$ 对应的根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 都是一维的，由矩阵单位 E_{ij} 张成。
- **Cartan 分解：** $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 因此可以分解为：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i\neq j} \mathfrak{g}_{L_i - L_j} \tag{27}$$

  其中 $\mathfrak{h}$ 是对应于权 0 的权空间，其维数为 2（因为 $\mathfrak{h}$ 是二维的）。

为了可视化根系，我们在对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 中绘制这些根。由于 $h_1 + h_2 + h_3 = 0$，$\mathfrak{h}^*$ 是一个二维空间，我们可以将 L_1, L_2, L_3 视为平面上夹角为 $120°$ 的三个向量，它们的和为零。根 $L_i - L_j$ 构成了一个正六边形。这个几何结构被称为 **$\mathbf{A}_2$ 型根系**。

2.3 权与权图：标准表示 V、其对偶 V^* 及伴随表示

现在我们为 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的几个基本表示绘制权图。图中每个点代表一个权，点的标记（如果存在）表示对应权空间的维数（多重数）。

- **标准表示 $V = \mathbb{C}^3$：**

  $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 通过矩阵乘法作用于 $V = \mathbb{C}^3$。标准基向量 e_1, e_2, e_3 是 $\mathfrak{h}$ 的特征向量。对于 $H = \mathrm{diag}(h_1, h_2, h_3)$，我们有 $H(e_i) = h_i e_i = L_i(H) e_i$。因此，权是 L_1, L_2, L_3。每个权空间都是一维的。权图是一个等边三角形。

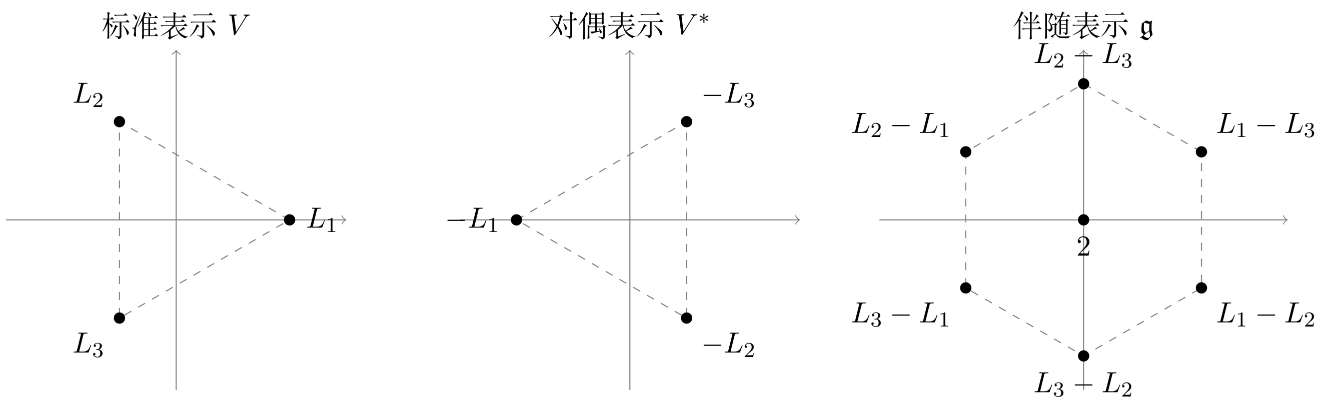
- **对偶表示 V^*：**

  V^* 的权是 V 的权的负值，即 $-L_1, -L_2, -L_3$。权图是一个倒置的等边三角形。

- **伴随表示 $\mathfrak{g}$：**

  权是六个根 $L_i - L_j$（每个重数为 1）和权 0（重数为 2，对应于 $\mathfrak{h}$ 本身）。权图是根图，但在原点处有一个重数为 2 的点。

下图展示了这三个表示的权图。



2.4 Weyl 群 $\mathfrak{S}_3$ 与权图的反射对称性

$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 权图的六边形对称性并非巧合，它源于一个更深的结构。对于根系中的每一对相反的根 α 和 $-\alpha$（例如 $L_1 - L_2$ 和 $L_2 - L_1$），它们对应的根空间 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C} \cdot E_{12}$ 和 $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbb{C} \cdot E_{21}$，以及它们的对易子 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C} \cdot H_{12}$，共同构成一个同构于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的子代数，记为 $\mathfrak{s}_\alpha$。

任何 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的表示 V，当限制到子代数 $\mathfrak{s}_\alpha$ 上时，就成为一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的表示。根据第一章的结论，这个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表示的权（即 H_{12} 的特征值）必须关于原点对称。在 $\mathfrak{h}^*$ 的几何图像中，这意味着 V 的权集合必须在穿过原点且垂直于根 $\alpha = L_1 - L_2$ 的直线（即超平面 $\langle H_{12}, \lambda \rangle = 0$）上具有反射对称性。

对每个根对 $\pm\alpha$ 都存在这样的反射。由所有这些反射生成的群被称为 **Weyl 群**，记为 W。对于 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$，Weyl 群由三个反射生成，它同构于三阶对称群 $\mathfrak{S}_3$，其作用是置换坐标 L_1, L_2, L_3。这个 $\mathfrak{S}_3$ 对称性精确地解释了我们观察到的权图的六边形对称性。

2.5 Weyl 室、支配整权与不可约表示的分类 ($\Gamma_{a,b}$)

Weyl 群的作用将 $\mathfrak{h}^*$ 分割成几个等价的区域。我们可以选择其中一个作为基本区域，称为 **Weyl 室**。

1. **正根与单根：** 我们通过选择一个线性泛函 $l \in \mathfrak{h}^*$ 来定义根的序。例如，选择 l 使得 $l(L_1) > l(L_2) > l(L_3)$。这样，根 $L_i - L_j$ 为正当且仅当 $i < j$。正根集合为 $R^+ = \{L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_1 - L_3\}$。不能表示为两个正根之和的正根称为**单根**。对于 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$，单根是 $\alpha_1 = L_1 - L_2$ 和 $\alpha_2 = L_2 - L_3$。
2. **Weyl 室：** 闭 Weyl 室 $\mathfrak{W}$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 中与所有单根的内积（由 Killing 型诱导）都非负的区域。几何上，它是一个由垂直于单根 α_1 和 α_2 的直线所围成的 $60°$ 扇形区域。
3. **支配整权：** 权格 $\mathbf{\Lambda}_W$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 中在所有 H_{ij} 上取整数值的线性泛函构成的格。一个**支配整权**是指位于 Weyl 室 $\mathfrak{W}$ 内部或边界上的权格中的点。任何一个支配整权 Λ 都可以唯一地写成两个**基本权** $\omega_1 = L_1$ 和 $\omega_2 = L_1 + L_2$ 的非负整数线性组合：$\Lambda = a\omega_1 + b\omega_2$，$a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。
4. **分类定理：** $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的不可约有限维表示与支配整权之间存在一一对应关系。

分类定理
对于每一对非负整数 (a, b)，存在一个唯一的（在同构意义下）不可约表示，记为 $\Gamma_{a,b}$，其最高权为 $\Lambda = a\omega_1 + b\omega_2 = (a + b)L_1 + bL_2$。

2.6 张量积分解实例：$V \otimes V^*$ 与 $V \otimes V$ 的详细分解

我们应用这些工具来分解两个基本的张量积。

- **分解 $V \otimes V^*$：**

  1. 权计算：$V \otimes V^*$ 的权是 $\{L_i - L_j\}$ (每个重数 1) 和 0 (重数 3)。

  2. 寻找不变映射：存在一个自然的收缩映射 Tr $V \otimes V^* \to \mathbb{C}$，定义为 $\mathrm{Tr}(v \otimes f) = f(v)$。这是一个 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$-模的满同态，其像为一维的平凡表示 $\mathbb{C} \cong \Gamma_{0,0}$。

  3. 识别核：该映射的核是一个 8 维子表示，由 $V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V)$ 中所有迹为零的算子组成。这正是 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的伴随表示。其最高权为 $L_1 - L_3 = (L_1 - L_2) + (L_2 - L_3) = \alpha_1 + \alpha_2 = \omega_1 + \omega_2$。因此，这个核是不可约表示 $\Gamma_{1,1}$。

4. 最终分解：

$$V \otimes V^* \cong \Gamma_{1,1} \oplus \Gamma_{0,0} \tag{28}$$

- **分解 $V \otimes V$：**

1. 权计算：$V \otimes V$ 的权是 $\{2L_i\}$ (每个重数 1) 和 $\{L_i + L_j\}$ ($i \neq j$，每个重数 1)。

2. 识别最高权：最高权是 $2L_1 = 2\omega_1$，对应的最高权向量是 $e_1 \otimes e_1$。因此，$V \otimes V$ 包含一个不可约子表示 $\Gamma_{2,0}$。

3. 对称与反对称分解：任何向量空间的二次张量积都可以分解为对称部分和反对称部分：$V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$。这两个子空间都是 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的子表示。

4. 识别分量：$\mathrm{Sym}^2(V)$ 的最高权是 $2L_1$，因此 $\mathrm{Sym}^2(V) \cong \Gamma_{2,0}$。$\Lambda^2(V)$ 的权是 $\{L_i+L_j\}$ ($i \neq j$)。它的最高权是 $L_1 + L_2 = \omega_2$。因此 $\Lambda^2(V) \cong \Gamma_{0,1}$。值得注意的是，$\Lambda^2(V)$ 与对偶表示 V^* 同构，因为它们的权集合 $\{-L_k\}$ 和 $\{L_i + L_j\}$ 在满足 $\sum L_i = 0$ 的条件下是相同的。

5. 最终分解：

$$V \otimes V \cong \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \Lambda^2(V) \cong \Gamma_{2,0} \oplus \Gamma_{0,1} \tag{29}$$

表 2.1： $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 的根系

根α	根表达式	根空间生成元$\mathfrak{g}_\alpha$	对应$H_\alpha \in \mathfrak{h}$
α_1	$L_1 - L_2$	E_{12}	$H_{12} = E_{11} - E_{22}$
α_2	$L_2 - L_3$	E_{23}	$H_{23} = E_{22} - E_{33}$
$\alpha_1 + \alpha_2$	$L_1 - L_3$	E_{13}	$H_{13} = E_{11} - E_{33}$
$-\alpha_1$	$L_2 - L_1$	E_{21}	$H_{21} = E_{22} - E_{11}$
$-\alpha_2$	$L_3 - L_2$	E_{32}	$H_{32} = E_{33} - E_{22}$
$-(\alpha_1 + \alpha_2)$	$L_3 - L_1$	E_{31}	$H_{31} = E_{33} - E_{11}$

表 2.2： $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 基本表示的权

表示	记号	最高权	权集合	重数
标准表示	$V = \Gamma_{1,0}$	L_1	$\{L_1, L_2, L_3\}$	均为 1
对偶表示	$V^* = \Gamma_{0,1}$	$L_1 + L_2$	$\{-L_1, -L_2, -L_3\}$	均为 1
伴随表示	$\mathfrak{g} = \Gamma_{1,1}$	$L_1 - L_3$	$\{L_i - L_j\}_{i \neq j} \cup \{0\}$	根权为 1，零权为 2

3 半单 Lie 代数表示的通用分析框架

前两章对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的分析揭示了一种普适的方法论。本章将这一方法论提炼并形式化，构建一个适用于任何复半单 Lie 代数的通用分析框架。这个框架将抽象的表示问题转化为一系列具体的、算法化的步骤，其核心在于利用代数内部的几何结构，根系和 Weyl 群来对表示进行分类。

3.1 Cartan 子代数与 Cartan 分解

分析的第一步是找到一个合适的“坐标系”来分解表示空间。这个角色由 **Cartan 子代数** $\mathfrak{h}$ 扮演。

在一个半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中，Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是一个极大交换子代数，并且其中所有元素的伴随作用 $\mathrm{ad}(H)$ 都是可对角化的。

对于任何有限维表示 V，$\mathfrak{h}$ 中的所有元素都可以被同时对角化。这导致了 V 的**权空间分解**：

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} V_\alpha \tag{30}$$

其中，$\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 是表示的**权**，$V_\alpha = \{v \in V \mid H(v) = \alpha(H)v \text{ for all } H \in \mathfrak{h}\}$ 是对应的**权空间**。

3.2 根系、根格与权格

将权空间分解应用于 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示，我们得到了 Lie 代数自身的结构性分解，即 **Cartan 分解**：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha \tag{31}$$

伴随表示的非零权被称为根。所有根的集合 $R \subset \mathfrak{h}^*$ 构成**根系**. 对应于根 α 的一维权空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 被称为根空间。

根系具有高度的对称性和结构性：

1. R 张成 $\mathfrak{h}^*$。
2. 如果 $\alpha \in R$，那么 $-\alpha \in R$。
3. 对于任意两个根 $\alpha, \beta \in R$，$\beta(H_\alpha)$ 是一个整数。
4. 对于任意两个根 $\alpha, \beta \in R$，$\beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ 仍然是根系中的一个根。

基于这些性质，我们定义了两个重要的格 (lattice)：

- 根格 $\mathbf{A}_R$：由根系 R 中所有根的整系数线性组合生成的格。
- 权格 $\mathbf{A}_W$：由所有在 H_α（对于所有 $\alpha \in R$）上取整数值的权 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 组成的格。

任何有限维表示的所有权都必须位于权格 $\mathbf{A}_W$ 中，并且任意两个权之差必须位于根格 $\mathbf{A}_R$ 中。

3.3 Weyl 群：作为反射群的定义

根系的内在对称性由 **Weyl 群** W 描述。

对于根系中的每一个根 α，我们定义一个作用于 $\mathfrak{h}^*$ 上的**反射** w_α：

$$w_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha \tag{32}$$

Weyl 群 W 是由所有这些根反射 w_α 生成的群。它是一个有限群。

任何表示 V 的权集合在 Weyl 群 W 的作用下是不变的。此外，对于任意 $w \in W$，权空间 V_β 和 $V_{w(\beta)}$ 的维数相同：$\dim(V_\beta) = \dim(V_{w(\beta)})$。

3.4 Killing 型与 Euclid 几何结构

为了赋予权空间 $\mathfrak{h}^*$ 一个几何结构，我们引入 **Killing 型**，这是一个在 $\mathfrak{g}$ 上自然定义的对称双线性形式：

$$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)) \tag{33}$$

Cartan 判据
一个 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的，当且仅当其 Killing 型是非退化的。

Killing 型在 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 上的限制也是非退化的，因此它在对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 上诱导了一个内积。

在这个内积下，$\mathfrak{h}^*$ 成为一个 Euclid 空间。Weyl 群的反射 w_α 正是关于垂直于根 α 的超平面的标准几何反射。这为我们提供了一个强大的几何直觉来理解权和根的结构。

3.5 正根、Weyl 室与最高权分类定理

为了对表示进行分类，我们需要一个类似于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 中“最高”权的概念。

3.5.1 正根与 Weyl 室：

通过在 $\mathfrak{h}^*$ 中选择一个超平面（不经过任何根），我们可以将根系 R 划分为**正根** R^+ 和**负根** R^-。

单根：正根中不能被写成两个其他正根之和的根。单根构成 $\mathfrak{h}^*$ 的一个基。

Weyl 室 $\mathfrak{W}$：闭 Weyl 室是 $\mathfrak{h}^*$ 中与所有单根的内积都非负的权构成的锥形区域。Weyl 群的作用将 $\mathfrak{h}^*$ 完美地剖分成若干个 Weyl 室的复制品。

3.5.2 最高权分类定理：

在一个表示 V 中，一个权 Λ 如果满足对于所有正根 $\alpha \in R^+$，$\Lambda + \alpha$ 都不是 V 的权，则称 Λ 为一个最高权。属于最高权 Λ 的权空间 V_Λ 中的非零向量，且被所有正根空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 湮灭的向量称为**最高权向量**。

最高权分类定理

1. 任何有限维不可约表示都有唯一的（在一个标量因子内）最高权向量。
2. 其最高权 Λ 必须是一个**支配整权**，即 $\Lambda \in \mathbf{A}_W \cap \mathfrak{W}$。
3. 对于每一个支配整权 Λ，都存在一个唯一的（在同构意义下）不可约表示 V_Λ，其最高权为 Λ。

这个定理是半单 Lie 代数表示理论的基石。它将一个看似无穷无尽的分类问题，简化为在一个基本几何区域（Weyl 室）内寻找格点（权格中的点）的组合问题。表示的全部复杂性都被编码在其最高权这个单一的代数对象中。

4 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的表示

本章将第三章建立的通用框架应用于一族最重要的半单 Lie 代数——特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$。我们将揭示其表示理论与组合数学中 Young 图和对称函数的深刻联系，最终通过 Weyl 构造为所

有不可约表示提供一个具体而强大的实现。

4.1 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的结构：$\mathbf{A}_{n-1}$ 型根系与 Weyl 群 $\mathfrak{S}_n$

我们系统地应用通用框架来分析 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的结构：

- Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$: 由 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 中所有迹为零的对角矩阵构成，其维数为 $n-1$。
- 根与根系: 与 $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 的情况类似，通过计算对角矩阵与矩阵单位 E_{ij} 的对易子，发现根是所有形如 $L_i - L_j$ 的线性泛函（其中 $1 \leq i,j \leq n, i \neq j$），该根系被称为 $\mathbf{A}_{n-1}$ 型根系。
- Weyl 群: 反射 $w_{L_i - L_j}$ 的作用是交换 $\mathfrak{h}^*$ 中的坐标 L_i 和 L_j，由所有这些反射生成的群正是 n 阶对称群 $\mathfrak{S}_n$，它通过置换坐标 $\{L_1,\ldots,L_n\}$ 作用。
- Weyl 室: 选择单根为 $\{\alpha_i = L_i - L_{i+1} \mid i = 1,\ldots,n-1\}$，闭 Weyl 室 $\mathfrak{W}$ 由满足 $\lambda(H_{\alpha_i}) \geq 0$ 的所有权 λ 构成。若将权 λ 与其在对偶基上的坐标 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 等同（满足 $\sum \lambda_i = 0$），则 Weyl 室由不等式链 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 定义。

4.2 基本表示：标准表示 V 的外幂 $\Lambda^k(V)$

根据最高权理论，所有不可约表示都可以由一组“基本”表示通过张量积构造出来。这些基本表示对应于**基本权**，它们是 Weyl 室的生成元：

- 对于 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，有 $n-1$ 个基本权，分别为：

$$\omega_k = L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \quad k = 1,\ldots,n-1 \tag{34}$$

- 令 $V = \mathbb{C}^n$ 为 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的标准表示：
- V 本身的最高权是 $L_1 = \omega_1$，因此 V 是第一个基本表示。
- 更一般地，第 k 个外幂 $\Lambda^k(V)$ 是一个不可约表示，其最高权向量为 $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k$，对应的最高权正是 $\omega_k = L_1 + \cdots + L_k$。
- 因此，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的 $n-1$ 个基本表示就是标准表示 V 的外幂 $\Lambda^k(V), k = 1,\ldots,n-1$。根据最高权理论，任何一个 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的不可约表示都可以通过取这些基本表示的张量积，然后分解并提取出具有所需最高权的分量来获得。

4.3 Weyl 构造：Young 图、Schur 函子与不可约表示 $\mathbb{S}_\lambda(V)$

虽然理论上可以通过张量积构造所有表示，但有一个更直接、更优雅的构造方法，即 **Weyl 构造**，它将 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的表示论与对称群的表示论以及组合学联系起来：

- **Young 图：** $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的支配整权 $\Lambda = a_1\omega_1 + \cdots + a_{n-1}\omega_{n-1}$ 可以等价地由一个划分 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ 来描述，其中 $\lambda_i - \lambda_{i+1} = a_i$。每个划分都可以可视化为一个 Young 图，这是一个由方格组成的图形，第 i 行有 λ_i 个方格。
- **Schur 函子：** 考虑 V 的 d 次张量积 $V^{\otimes d}$（其中 $d = \sum \lambda_i$），对称群 $\mathfrak{S}_d$ 自然地作用于 $V^{\otimes d}$（通过置换张量因子），且这个作用与 $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$（以及其子代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$）的作用可交换。
- 对于每个划分 λ，有一个来自对称群代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_d]$ 的特定元素，称为 **Young 对称化子** c_λ。Schur 函子 $\mathbb{S}_\lambda$ 作用于向量空间 V 的结果被定义为 Young 对称化子在 $V^{\otimes d}$ 上的像：

  $$\mathbb{S}_\lambda(V) = c_\lambda(V^{\otimes d}) \subset V^{\otimes d} \tag{35}$$

  $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 是 $V^{\otimes d}$ 的一个子表示。
- **构造定理:** Weyl 构造的核心结果是以下定理：

Weyl 构造定理

对于划分 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$，由 Schur 函子构造的表示 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 是 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的不可约表示，其最高权为 $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$。

这个定理为每一个支配整权（即每一个划分）都提供了一个具体、统一的实现方式，从而完成了对 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 所有不可约表示的构造。

4.4 表示的维数与特征标：Schur 函数

Weyl 构造的优美之处在于它将表示的许多重要性质与组合对象联系起来：

- **特征标与 Schur 函数:** $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ 在表示 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 上的特征标是一个著名的对称多项式，称为 **Schur 多项式** $S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$。$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 表示的特征标是这个多项式在 $x_1 \cdots x_n = 1$ 的约束下的限制。

- **维数公式:** 表示 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 的维数可以通过一个纯组合的公式计算。对于 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，这个公式可以写作:

$$\dim(\mathbb{S}_\lambda(V)) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} \tag{36}$$

这个公式等价于著名的**钩长公式**，它将维数计算为在 Young 图上填数字（构成标准 Young 表）的方法数。

4.5 张量积分解：Pieri 公式与 Littlewood-Richardson 规则

由于 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的不可约表示 $V_\lambda \cong \mathbb{S}_\lambda(V)$ 的特征标是 Schur 多项式 S_λ，张量积表示 $V_\lambda \otimes V_\mu$ 的特征标就是 Schur 函数之积 $S_\lambda \cdot S_\mu$。因此，分解张量积的代数问题完全转化为将 Schur 函数之积展开为 Schur 函数线性组合的组合问题：

- **Pieri 公式：**这是处理特殊情况的简单规则，描述了将任意不可约表示 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 与一个对称幂 $\mathrm{Sym}^k(V) = \mathbb{S}_{(k)}(V)$ 或一个外幂 $\Lambda^k(V) = \mathbb{S}_{(1^k)}(V)$ 作张量积的分解：
- $\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \mathrm{Sym}^k(V) = \bigoplus_\mu \mathbb{S}_\mu(V)$，其中 μ 是所有通过向 λ 的 Young 图添加 k 个方格，且任意两个新方格都不在同一列所得到的 Young 图。
- $\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \Lambda^k(V) = \bigoplus_\mu \mathbb{S}_\mu(V)$，其中 μ 是所有通过向 λ 的 Young 图添加 k 个方格，且任意两个新方格都不在同一行所得到的 Young 图。
- **Littlewood-Richardson 规则：**这是分解一般张量积 $\mathbb{S}_\lambda(V) \otimes \mathbb{S}_\mu(V)$ 的通用组合规则。分解后的不可约分量 $\mathbb{S}_\nu(V)$ 的重数 $N_{\lambda\mu\nu}$ 等于特定的组合对象——**Littlewood-Richardson tableaux** 的数量。

4.6 计算实例：以 $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ 为例的表示分解

我们应用 Pieri 公式来分解 $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ 的一个张量积：$\Lambda^2 V \otimes V$，其中 $V = \mathbb{C}^4$ 是标准表示。

1. **识别表示与 Young 图:**
   - V 对应于划分 (1)，Young 图为一个方格：$\square$。
   - $\Lambda^2 V$ 对应于划分 $(1,1)$，Young 图为一个竖排的两个方格：$\begin{matrix}\square\\\square\end{matrix}$。

2. **应用 Pieri 公式:** 我们要计算 $\mathbb{S}_{(1,1)}(V) \otimes \mathbb{S}_{(1)}(V)$。由于 $\mathbb{S}_{(1)}(V) = \mathrm{Sym}^1(V)$，我们使用 Pieri 公式的第一种形式，即向 Young 图 $\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}$ 添加一个方格，要求新加的方格与自身不在同一列（这个条件在这里自动满足）。

3. **组合过程:**

   - 从 Young 图 $\lambda = (1,1)$ 开始:

   $$\begin{array}{c}\square\\\square\end{array} \tag{37}$$

   - 我们可以将一个新方格添加到第一行的末尾，得到划分 $\mu_1 = (2,1)$:

   $$\begin{array}{cc}\square & \square\\\square & \end{array} \tag{38}$$

   - 或者，我们可以将一个新方格添加到第三行，得到划分 $\mu_2 = (1,1,1)$:

   $$\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array} \tag{39}$$

   这两种是所有可能的方式。

4. **得出分解:** 根据 Pieri 公式，分解结果为:

   $$\Lambda^2 V \otimes V \cong \mathbb{S}_{(2,1)}(V) \oplus \mathbb{S}_{(1,1,1)}(V) \tag{40}$$

   其中 $\mathbb{S}_{(1,1,1)}(V) = \Lambda^3 V$。这与通过权分析得到的结果 $\Lambda^2 V \otimes V \cong \Gamma_{1,1,0} \oplus \Lambda^3 V$ 相符，因为 $\mathbb{S}_{(2,1)}(V)$ 的最高权是 $2L_1 + L_2 = \omega_1 + \omega_2$，正是 $\Gamma_{1,1,0}$。

这个例子展示了如何将一个复杂的代数分解问题转化为一个简单的、可视化的组合操作。

表 4.1: $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 的结构特性

属性	描述
秩 (Rank)	$n-1$
维数 (Dimension)	n^2-1
根系类型 (Root System Type)	$\mathbf{A}_{n-1}$
Weyl 群 (Weyl Group)	$\mathfrak{S}_n$ (n 阶对称群)
基本权 (Fundamental Weights)	$\omega_k = L_1 + \cdots + L_k, \text{ for } k = 1, \ldots, n-1$

表 4.2: Young 图与 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 表示的对应关系

Young 图 (Partition λ)	**表示**	**最高权**
□ ((1))	V (标准表示)	$\omega_1 = L_1$
□□ . . . □ ((k)) (k 个方格)	$\mathrm{Sym}^k(V)$ (对称幂)	$k\omega_1 = kL_1$
□ ⋮ ((1^k)) (k 个方格) □	$\Lambda^k(V)$ (外幂)	$\omega_k = L_1 + \cdots + L_k$
□ □ □ ((2, 1))	$\Gamma_{1,1,0,\ldots}$ (对$n \geq 3$)	$\omega_1 + \omega_2 = 2L_1 + L_2$
□ . . . □ ((1^n)) (n 个方格)	$\Lambda^n(V) \cong \mathbb{C}$ (平凡表示)	0