有限群表示的诱导定理与有理性问题

Aug 2025

1 Artin 定理与循环子群的贡献

1.1 虚拟特征标环 $R(G)$ 的代数结构

为了精确地陈述诱导定理，必须首先构建一个合适的代数框架。这个框架就是虚拟特征标环 $R(G)$。

设 G 是一个有限群，其所有互不相同的不可约复特征标为 $\{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$。一个 G 上的类函数（即在共轭类上取常值的函数）如果能够表示为这些不可约特征标的非负整数系数线性组合，记为 $R^+(G)$。

在此基础上，我们定义虚拟特征标环 $R(G)$ 为由 $R^+(G)$ 生成的加法群。换言之，$R(G)$ 的元素是两个真实特征标之差。由于不可约特征标 $\{\chi_i\}$ 在整数环 $\mathbb{Z}$ 上线性无关，故 $R(G)$ 是一个自由阿贝尔群，可以表示为：

$$R(G) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\chi_h \tag{1}$$

由于两个特征标的逐点乘积仍然是一个特征标（对应于两个表示的张量积），$R(G)$ 在逐点加法和乘法下构成一个环，它是 G 上所有复值类函数构成的环的一个子环。

这个代数结构的建立，为运用环论与模论的工具研究特征标理论提供了舞台。在此框架下，两个基本操作——**限制**（Restriction）与**诱导**（Induction）扮演着核心角色。

- 限制：若 H 是 G 的一个子群，将 G 的表示限制到 H 上，在特征标层面对应一个环同态 $\mathrm{Res}_H^G : R(G) \to R(H)$。
- 诱导：从 H 的表示构造 G 的表示，在特征标层面对应一个加法群同态 $\mathrm{Ind}_H^G : R(H) \to R(G)$。

诱导操作具有一个至关重要的代数性质：$\mathrm{Ind}_H^G(R(H))$ 在 $R(G)$ 中构成一个理想。这意味着，如果一个虚拟特征标 ψ 可以由 H 的特征标诱导而来，那么 ψ 与 $R(G)$ 中任意一个虚拟特征标 χ 的乘积 $\psi \cdot \chi$ 也同样可以。这一性质是后续两大诱导定理证明的引擎，它将证明“所有特征标都具有某种性质”这一结论：可以表示为诱导特征标的组合，那么通过乘以任意特征标 χ，即可证明 χ 也落入这个由诱导特征标生成的理想中。

1.2 Artin 定理的陈述

Artin 定理
设 X 是有限群 G 的一个子群族。令 $\mathrm{Ind}: \bigoplus \mathbf{S}_{H\in X} R(H) \to R(G)$ 是由映射族 Ind_H^G（$H \in X$）定义的同态。下列性质是等价的:

(i) G 是 X 中子群的共轭子群的并集，即 $G = \bigcup_{H\in X, g\in G} gHg^{-1}$。

(ii) 同态 Ind 的余核是有限的。

由于 $R(G)$ 作为一个阿贝尔群是有限生成的，条件 (ii) 等价于：对 G 的任意特征标 χ，存在一个正整数 d 和一系列虚拟特征标 $\chi_H \in R(H)$（$H \in X$），使得:

$$d\chi = \sum_{H\in X} \mathrm{Ind}_H^G(\chi_H) \tag{2}$$

该定理最重要且应用最广泛的推论来自于一个简单的观察：任何群的任何元素都包含在某个循环子群中。因此，取 X 为 G 的所有循环子群的集合，条件 (i) 自然满足。由此得到:

Artin 定理的推论
G 的每一个特征标都是 G 的循环子群的特征标所诱导的特征标的有理系数线性组合。

这个推论的意义是革命性的。它指出，要理解一个群 G 的表示的“有理结构”（即 $R(G)\otimes\mathbb{Q}$），我们无需研究 G 本身复杂的结构，只需考察其最简单的构件——循环子群——的表示，并通过诱导这一“放大”过程，便可以重构出整个群的表示理论的有理图像。这建立了表示理论中第一个，也是最根本的局部-全局原则。定理的证明巧妙地运用了对偶性：证明 Ind 是满射（在与 $\mathbb{Q}$ 作张量积后）等价于证明其伴随算子 Res 是单射。而 Res 的单射性几乎是显而易见的：一个类函数如果在所有循环子群上的限制都为零，那么它必然是零函数。这再次说明，循环子群作为一个整体，足以“看清”整个群的特征标理论。

1.3 关于对称群 $\mathbf{S}_3$ 的计算示例

为了将 Artin 定理的抽象理论具体化，我们以最小的非阿贝尔群，对称群 $\mathbf{S}_3$ 为例，进行详尽的计算验证。

1.3.1 群与子群结构

$G = \mathbf{S}_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$。其共轭类为 $\mathbf{C}_1 = \{e\}, \mathbf{C}_2 = \{(12), (13), (23)\}, \mathbf{C}_3 = \{(123), (132)\}$。

其循环子群族（除平凡子群外）由两类代表构成：

- $H_2 = \langle (12) \rangle = \{e, (12)\} \cong \mathbf{C}_2$
- $H_3 = \langle (123) \rangle = \{e, (123), (132)\} \cong \mathbf{C}_3$

1.3.2 特征标表

为了进行计算，我们首先列出 $\mathbf{S}_3$ 及其循环子群 $\mathbf{C}_2$ 和 $\mathbf{C}_3$ 的特征标表。

表 1: $\mathbf{S}_3, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ 的特征标表

$\mathbf{S}_3$	$\mathbf{C}_1$ (1)	$\mathbf{C}_2$ (3)	$\mathbf{C}_3$ (2)
ψ_1 (平凡)	1	1	1
ψ_2 (符号)	1	-1	1
ψ_3 (标准)	2	0	-1

$\mathbf{C}_2$	e	(12)
ϕ_1	1	1
ϕ_2	1	-1

$\mathbf{C}_3$	e	(123)	(132)
ω_0	1	1	1
ω_1	1	w	w^2
ω_2	1	w^2	w

1.3.3 计算诱导特征标

我们使用诱导特征标的公式：

$$\chi_{\text{Ind}}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{x \in G, \\ x^{-1}gx \in H}} \chi(x^{-1}gx) \tag{3}$$

从 $H_2 = \mathbf{C}_2$ 诱导平凡特征标 ϕ_1： 令 $\chi = \phi_1$，则 $\chi(e) = 1, \chi((12)) = 1$。

- $\text{Ind}_{H_2}^{\mathbf{S}_3}(\phi_1)(e) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbf{S}_3} \phi_1(x^{-1}ex) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \phi_1(e) = 3$
- $\text{Ind}_{H_2}^{\mathbf{S}_3}(\phi_1)((12)) = \frac{1}{2}\big(\phi_1(e^{-1}(12)e) + \phi_1((12)^{-1}(12)(12))\big) = \frac{1}{2}\big(\phi_1((12)) + \phi_1((12))\big) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$

- $\mathrm{Ind}_{H_2}^{\mathbf{S}_3}(\phi_1)((123)) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{x\in\mathbf{S}_3,\\ x^{-1}(123)x\in H_2}} \phi_1(x^{-1}(123)x) = 0$ (因为 3-循环的共轭还是 3-循环，不在 H_2 中)。

所以，$\mathrm{Ind}_{H_2}^{\mathbf{S}_3}(\phi_1)$ 在共轭类 $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3)$ 上的取值为 $(3,1,0)$。查阅 $\mathbf{S}_3$ 特征标表，我们发现 $\mathrm{Ind}_{H_2}^{\mathbf{S}_3}(\phi_1) = \psi_1 + \psi_3$。

从 $H_3 = \mathbf{C}_3$ 诱导非平凡特征标 ω_1： 令 $\chi = \omega_1$，则 $\chi(e) = 1, \chi((123)) = w, \chi((132)) = w^2$。

- $\mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_1)(e) = \frac{1}{3}\sum_{x\in\mathbf{S}_3} \omega_1(x^{-1}ex) = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\omega_1(e) = 2$
- $\mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_1)((12)) = 0$ (因为 2-循环的共轭不在 H_3 中)。
- $\mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_1)((123))$：

$$\mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_1)((123)) = \omega_1((123)) + \omega_1((12)^{-1}(123)(12)) \tag{4}$$
$$= \omega_1((123)) + \omega_1((132)) = w + w^2 = -1 \tag{5}$$

所以，$\mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_1)$ 在共轭类 $(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3)$ 上的取值为 $(2,0,-1)$。这正是 $\mathbf{S}_3$ 的 2 维不可约特征标 ψ_3。

1.3.4 Artin 定理的验证

我们已经直接找到了一个表达式：

$$\psi_3 = \mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_1) \tag{6}$$

这是一个整系数（系数为 1）的线性组合，这比 Artin 定理保证的有理系数更强。我们也可以通过 H_2 的诱导特征标来表示 ψ_3：

$$\psi_3 = \mathrm{Ind}_{H_2}^{\mathbf{S}_3}(\phi_1) - \psi_1 \tag{7}$$

由于 ψ_1 本身也是一个特征标，为了严格满足定理的形式（表示为诱导特征标的线性组合），我们需要表示 ψ_1。例如，$\mathrm{Ind}_{H_3}^{\mathbf{S}_3}(\omega_0) = \psi_1 + \psi_2$。通过解这些线性方程，总能将任何不可约特征标表示为从循环子群诱导的特征标的有理（在此例中恰好是整数）线性组合，从而验证了 Artin 定理。

2 Brauer 定理与 p-初等子群

Artin 定理揭示了表示理论的有理骨架，而 Brauer 定理则深入到其算术核心，揭示了决定表示理论整结构的更精细的子群。

2.1 p-初等子群

从有理系数到整系数的飞跃，需要引入比循环子群更复杂的代数构件，即 p-初等子群。

设 p 是一个素数。群 G 中的一个元素 x 被称为 p-元素，如果其阶是 p 的幂；被称为 p-正则元素，如果其阶与 p 互素。G 中任意元素 x 都可以唯一地分解为可交换的 p-部分 x_u 和 p-正则部分 x_r 的乘积：$x = x_u x_r$。

一个群 H 被称为 p-初等群，如果它是一个阶与 p 互素的循环群 C 和一个 p-群 P 的直积，即 $H = C \times P$。一个群如果对某个素数 p 是 p-初等的，就被称为初等群。

这一定义看似复杂，但其背后有深刻的算术动机。循环子群足以刻画有理性质，但要处理涉及整系数和代数整数的精细问题，则需要一种能够将群的结构按照特定素数 p 进行"算术分解"的子群。p-初等群的 $C \times P$ 结构恰好实现了这种分离：它将群的行为分解为"与 p 互素"的部分（由循环群 C 控制）和"p-幂次"的部分（由 p-群 P 控制）。这种结构是在 Brauer 定理证明中进行数论论证（例如，在分圆整数环中对素理想 p 取模）的关键。

Brauer 定理
G 的每一个特征标都是 G 的初等子群的特征标所诱导的特征标的整系数线性组合。

与 Artin 定理相比，Brauer 定理有两个关键的改进：

1. **系数**: 线性组合的系数是整数，而不仅仅是有理数。
2. **子群**: 诱导操作的源头是初等子群，而不仅仅是循环子群。

这个从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的飞跃意义重大。它表明虚拟特征标环 $R(G)$ 本身，而非仅仅其有理化版本 $R(G) \otimes \mathbb{Q}$，是由从这些特殊子群的诱导表示生成的。这意味着群的表示的完整算术信息都蕴含在其初等子群中。

由于初等群是幂零的，而幂零群的不可约表示都是单项的（由一级表示诱导而来），Brauer 定理有一个更强的推论：

Brauer 定理的推论
G 的每一个特征标都是单项特征标的整系数线性组合。

这揭示了表示理论的一个基本结构性事实：最简单的诱导表示，单项表示是构成所有更复杂表示的算术基石。

2.2 关于二面体群 $\mathbf{D}_{10}$ 的计算示例

我们以 10 阶二面体群 $\mathbf{D}_{10}$ 为例，来说明初等子群的识别和 Brauer 定理的应用。

2.2.1 群与子群结构

$G = \mathbf{D}_{10} = \langle r, s \mid r^5 = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$。其阶为 $10 = 2 \cdot 5$。子群包括：平凡子群 $\{e\}$，5 个 2 阶子群（如 $\mathbf{C}_2 = \langle s \rangle$），1 个 5 阶子群 $\mathbf{C}_5 = \langle r \rangle$，以及群自身 $\mathbf{D}_{10}$。

2.2.2 识别初等子群

我们需要对整除 10 的素数 $p = 2$ 和 $p = 5$ 进行分析。

2-初等子群 ：形如 $C \times P$，其中 $|C|$ 是奇数，P 是 2-群。

- $\mathbf{C}_5 \times \{e\} \cong \mathbf{C}_5$ (其中 $C = \mathbf{C}_5, P = \{e\}$)
- $\{e\} \times \mathbf{C}_2 \cong \mathbf{C}_2$ (其中 $C = \{e\}, P = \mathbf{C}_2$)

5-初等子群 ：形如 $C \times P$，其中 $5 \nmid |C|$，P 是 5-群。

- $\mathbf{C}_2 \times \{e\} \cong \mathbf{C}_2$ (其中 $C = \mathbf{C}_2, P = \{e\}$)
- $\{e\} \times \mathbf{C}_5 \cong \mathbf{C}_5$ (其中 $C = \{e\}, P = \mathbf{C}_5$)

因此，$\mathbf{D}_{10}$ 的初等子群集合就是 $\{\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_5\}$。注意，在这个例子中，所有初等子群恰好都是循环群。这并非普遍现象，例如在 $\mathbf{S}_4$ 中，存在非循环的初等子群。

2.2.3 特征标表与验证

$\mathbf{D}_{10}$ 有 4 个不可约特征标：两个 1 级的（ψ_1, ψ_2）和两个 2 级的（χ_1, χ_2）。

特征标表

$\mathbf{D}_{10}$	e	r, r^4	r^2, r^3	sr^k
ψ_1	1	1	1	1
ψ_2	1	1	1	-1
χ_1	2	$2\cos(2\pi/5)$	$2\cos(4\pi/5)$	0
χ_2	2	$2\cos(4\pi/5)$	$2\cos(2\pi/5)$	0

我们来验证 Brauer 定理。考虑 2 维不可约特征标 χ_1。我们需要找到一个由 $\mathbf{C}_2$ 和 $\mathbf{C}_5$ 的特征标诱导的整系数线性组合来表示它。

令 ϕ_2 为 $\mathbf{C}_2 = \{e, s\}$ 的非平凡特征标（$\phi_2(e) = 1, \phi_2(s) = -1$）。计算其诱导特征标 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_2}^{\mathbf{D}_{10}}(\phi_2)$：

- $\mathrm{Ind}(\phi_2)(e) = [G : H]\phi_2(e) = 5 \cdot 1 = 5$
- $\mathrm{Ind}(\phi_2)(r^k) = 0$ (因为 r^k 的共轭元不在 $\mathbf{C}_2$ 中)
- $\mathrm{Ind}(\phi_2)(s) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbf{D}_{10}, x^{-1}sx \in \mathbf{C}_2} \phi_2(x^{-1}sx) = \frac{1}{2}(\phi_2(s) + \phi_2(s)) = -1$

所以，$\mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_2}^{\mathbf{D}_{10}}(\phi_2)$ 在共轭类上的值为 $(5, 0, 0, -1)$。

令 ω_1 为 $\mathbf{C}_5 = \langle r \rangle$ 的特征标，$\omega_1(r^k) = e^{2\pi ik/5}$。计算 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_5}^{\mathbf{D}_{10}}(\omega_1)$：

- $\mathrm{Ind}(\omega_1)(e) = [G : H]\omega_1(e) = 2 \cdot 1 = 2$
- $\mathrm{Ind}(\omega_1)(r) = \omega_1(r) + \omega_1(s^{-1}rs) = \omega_1(r) + \omega_1(r^{-1}) = e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5} = 2\cos(2\pi/5)$
- $\mathrm{Ind}(\omega_1)(r^2) = \omega_1(r^2) + \omega_1(r^{-2}) = 2\cos(4\pi/5)$
- $\mathrm{Ind}(\omega_1)(s) = 0$

我们发现 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_5}^{\mathbf{D}_{10}}(\omega_1) = \chi_1$。

因此，我们找到了一个整系数（系数为 1）表达式：$\chi_1 = \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_5}^{\mathbf{D}_{10}}(\omega_1)$。类似地，$\chi_2 = \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_5}^{\mathbf{D}_{10}}(\omega_2)$。对于 1 维特征标，例如 ψ_2，可以表示为 $\psi_2 = \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_2}^{\mathbf{D}_{10}}(\phi_2) - \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_5}^{\mathbf{D}_{10}}(\omega_1) - \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}_5}^{\mathbf{D}_{10}}(\omega_2) - \psi_1$。通过进一步的组合，总能找到一个纯粹由诱导特征标构成的整系数表达式，从而验证了 Brauer 定理。

3 Brauer 定理的应用

Brauer 定理不仅是一个深刻的结构性结论，更是一个强大的工具，它能够解决表示理论内部的判定问题，也能为经典的群论问题提供优雅的现代证明。

Brauer 定理最直接的应用之一，是提供了一个判断一个给定的类函数是否为虚拟特征标的有效准则。

Brauer 判定准则
设 φ 是 G 上的一个类函数。如果对于 G 的每一个初等子群 H，φ 在 H 上的限制 $\mathrm{Res}_H^G(\varphi)$ 都是 H 的一个虚拟特征标（即属于 $R(H)$），那么 φ 本身就是 G 的一个虚拟特征标（属于 $R(G)$）。

这个定理的威力在于其“局部-全局”的特性。要验证一个函数 φ 是否是 G 的虚拟特征标，直接操作可能非常困难，因为需要将其分解为不可约特征标的整系数线性组合。定理将 G 上进行验证，只需在其所有的初等子群 H 上进行验证即可。由于初等子群是幂零群，其结构远比一般群简单，它们的表示理论也更容易处理。因此，这个定理将一个全局的、困难的判定问题，转化为一系列局部的、相对简单的判定问题，极大地增强了特征标理论的可计算性。

Brauer 定理的应用超越了表示理论本身，能够为一些经典的群论计数问题提供出人意料的简洁证明。Frobenius 定理就是一个典范。

Frobenius 定理
设 G 是一个有限群，n 是一个整除 $|G|$ 的正整数。那么，在 G 中满足方程 $x^n = 1$ 的元素个数可被 n 整除。

4 有理性问题

前面的讨论都默认在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行。一个自然且深刻的问题是：这些表示和特征标理论如何在其他数域（特别是特征为零的域，如 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$）上表现？这引出了表示的有理性问题，其核心工具是 Schur 指标。

4.1 Schur 指标

前面的讨论都默认在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行。一个自然且深刻的问题是：这些表示和特征标理论如何在其他数域（特别是特征为零的域，如 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$）上表现？这引出了表示的有理性问题，其核心工具是 Schur 指标。

设 K 是一个特征为零的域。一个复表示 $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$ 被称为**可在 K 上实现**，如果存在一个等价的表示 $\rho'\colon G \to \mathbf{GL}(n, K)$，其矩阵元全部在 K 中。其特征标 χ 的值域所在的域 $K(\chi)$ 是 K 的子域，这是可实现的一个必要条件，但远非充分条件。

Schur 指标 $m_K(\chi)$ 定量地刻画了这种实现的障碍。对于一个不可约复特征标 χ，其关于域 K 的 Schur 指标 $m_K(\chi)$ 被定义为最小的正整数 m，使得 $m\chi$ 是某个 K-表示的特征标。

- 如果一个表示可在 K 上实现，则其 Schur 指标 $m_K(\chi) = 1$。
- 如果 $m_K(\chi) > 1$，则该表示本身无法在 K 上实现，但其 $m_K(\chi)$ 个拷贝的直和所对应的表示，可以在 K 上实现。

Schur 指标的数值定义背后，隐藏着深刻的代数结构。对于一个不可约复表示 V（特征标为 χ），可以构造一个 $K(\chi)$ 上的中心单代数 $\mathrm{End}_{K(\chi)[G]}(V)$。一个基础性的定理指出，$V$ 可以在 $K(\chi)$ 的某个域扩张 L 上实现，当且仅当这个中心单代数在 L 上分裂（即同构于一个矩阵代数）。Schur 指标 $m_K(\chi)$ 恰好就是这个中心单代数在 Brauer 群中的**指数**，它衡量了这个代数距离一个矩阵代数有多"远"。这个联系在表示论与中心单代数理论之间建立了一座至关重要的桥梁。

4.2 Artin 与 Brauer 定理的推广

Artin 和 Brauer 定理可以被推广到任意特征零域 K 上的表示环 $R_K(G)$。其核心思想不变：$R_K(G)$ 的结构仍然由从特定子群族（循环子群或初等子群）的诱导表示所决定，只是线性组合的系数现在位于 K 或其整数环中。

4.3 关于对称群 $\mathbf{Q}_8$ 的计算示例

四元数群 $\mathbf{Q}_8$ 是阐释 Schur 指标的经典案例。它完美地展示了同一个表示在不同域上可以有截然不同的有理性。

4.3.1 群、表示与特征标

四元数群 $\mathbf{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$，其关系为 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$。它有 5 个共轭类：$\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$。因此有 5 个不可约复表示，其中 4 个是 1 维的，1 个是 2 维的。

表 2: 四元数群 $\mathbf{Q}_8$ 的特征标表

$\mathbf{Q}_8$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
ψ	2	-2	0	0	0

我们关注这个唯一的 2 维不可约表示，其特征标为 ψ。这个表示可以通过将 i, j 映射到 $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ 中的矩阵来实现，例如：

$$\rho(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

4.3.2 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的有理性

特征标 ψ 的值都是整数，所以其域 $\mathbb{Q}(\psi) = \mathbb{Q}$。然而，这并不意味着表示 ρ 可以在 $\mathbb{Q}$ 上实现。

最深刻的论证是考察其在 $\mathbb{Q}[\mathbf{Q}_8]$-模 V 上的自同态环 $D = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}[\mathbf{Q}_8]}(V)$。对于 $\mathbf{Q}_8$ 的这个 2 维表示，可以证明 D 同构于哈密顿四元数代数 $\mathbb{H}$：

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

$\mathbb{H}$ 是一个在 $\mathbb{Q}$ 上的 4 维中心**除环**，它不是一个矩阵代数 $M_2(\mathbb{Q})$。根据舒尔引理的一般形式，一个表示在域 K 上是绝对不可约的（即在 K 的代数闭包上不可约）当且仅当其自同态环就是 K。在这里，自同态环是一个除环，说明该表示在 $\mathbb{Q}$ 上是不可约的，但不是绝对不可约的。

由于 $D \cong \mathbb{H}$ 不是一个分裂代数（矩阵代数），表示 ρ 不能在 $\mathbb{Q}$ 上实现。$\mathbb{H}$ 在布饶尔群中的指数为 2，这意味着我们需要将基域从 $\mathbb{Q}$ 扩张到某个 2 次扩张（例如 $\mathbb{Q}(i)$）才能使其分裂。因此，ψ 的

Schur 指标为：

$$m_{\mathbb{Q}}(\psi) = 2$$

4.3.3 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的有理性

现在我们将基域换为实数域 $\mathbb{R}$。特征标域仍然是 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$。我们需要考察的自同态环是 $D' = \mathrm{End}_{\mathbb{R}[\mathbf{Q}_8]}(V) \cong D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$。

这是一个标准结论：实数域上的哈密顿四元数代数同构于 2×2 实矩阵代数：

$$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}) \tag{9}$$

由于自同态环现在是一个矩阵代数（即它在 $\mathbb{R}$ 上分裂了），这表明表示 ρ 是**可以**在 $\mathbb{R}$ 上实现的。因此，其 Schur 指标为：

$$m_{\mathbb{R}}(\psi) = 1 \tag{10}$$

这个例子清晰地展示了 Schur 指标的精髓：它不仅依赖于表示本身，也深刻地依赖于我们试图实现它的那个域。同一个表示，对于 $\mathbb{Q}$ 来说是“非有理性的”（需要加倍才能实现），但对于 $\mathbb{R}$ 来说却是“有理性的”。