$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 与 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ 的表示

Aug 2025

在半单复 Lie 代数的表示理论中, 特殊线性 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (**A** 型) 的研究构成了理论的基石. 其表示可以通过标准表示 $V=\mathbb{C}^n$ 的张量幂, 借助 Young 对称化子或等价地通过 Schur 函子进行系统性的构造与分类. 然而, 这一理论框架并非普适. 当我们转向另外两个经典的 Lie 代数家族——辛 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ (**C** 型) 与正交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ (**B** 型和 **D** 型) 时, 理论的面貌发生了深刻而有趣的变化.

1 辛 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 的表示

1.1 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 的结构

1.1.1 定义与矩阵实现

辛 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 定义为在一个 $2n$ 维复向量空间 V 上的所有线性变换 (自同态) $X\in\mathfrak{gl}(V)$ 构成的集合, 这些变换保持一个给定的非退化斜对称双线性型 $Q:V\times V\to\mathbb{C}$ 不变. 不变性条件体现在无穷小形式上, 即对于任意 $v,w\in V$, 都满足:

$$Q(Xv,w)+Q(v,Xw)=0 \tag{1}$$

为了进行具体的计算, 我们为 V 选取一组" 标准" 基 $\{e_1,\ldots,e_{2n}\}$, 使得 Q 在这组基下的矩阵形式最为简洁. 具体而言, 我们定义:

$$Q(e_i,e_{n+i})=1,\quad Q(e_{n+i},e_i)=-1\quad\text{for } 1\le i\le n \tag{2}$$

而对于所有其他不满足 $j=i\pm n$ 的基向量对 (e_i,e_j), 我们定义 $Q(e_i,e_j)=0$. 在这种情况下, 双线性型 Q 的矩阵表示为 $M=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$, 其中 I_n 是 $n\times n$ 的单位矩阵.

一个 $2n\times 2n$ 的复矩阵 X 属于 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 的条件 $Q(Xv,w)+Q(v,Xw)=0$ 可以转化为矩阵方程 $X^TM+MX=0$. 我们将矩阵 X 写成分块形式 $X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, 其中 A,B,C,D 均为 $n\times n$ 矩阵. 代入上述方程, 我们得到:

$$\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

计算矩阵乘积得到:

$$\begin{pmatrix} -C^T & A^T \\ -D^T & B^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - C^T & D + A^T \\ -A - D^T & B^T - B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

由此我们得到对分块矩阵的约束条件: $C = C^T$, $B = B^T$ 以及 $D = -A^T$. 因此, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 中的任意元素都可以唯一地表示为如下形式的矩阵:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad \text{其中} B^T = B, C^T = C \tag{5}$$

1.1.2 根空间分解

遵循分析半单 Lie 代数的一般策略, 首先确定 **Cartan 子代数** $\mathfrak{h}$:

1. 自然选择为 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 中所有对角矩阵构成的子代数, 形式为

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n) \tag{6}$$

   维数为 n.

2. 基选取: 定义 $H_i = E_{i,i} - E_{n+i,n+i}$ (其中 $E_{j,k}$ 是 (j,k) 位置为 1、其余为 0 的矩阵, 且 $1 \le i \le n$).

3. 对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 的基: 选取 $\{L_1, \ldots, L_n\}$, 满足

$$\langle L_j, H_i \rangle = \delta_{ij} \tag{7}$$

   (δ_{ij} 为克罗内克函数).

通过伴随作用 $[H, X]$ (其中 $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$) 分析根空间:

长根 (Long roots)

- 根向量如 $X_{i,i}^+ = E_{i,n+i}$, 对应根为 $2L_i$；
- 根向量如 $X_{i,i}^- = E_{n+i,i}$, 对应根为 $-2L_i$.

短根 (Short roots)

- 矩阵 $X = E_{i,j} - E_{n+j,n+i}$（$i \neq j$）, 对应根为 $L_i - L_j$；
- 矩阵 $Y = E_{i,n+j} + E_{j,n+i}$（$i \neq j$）, 对应根为 $L_i + L_j$；
- 矩阵 $Z = E_{n+i,j} + E_{n+j,i}$（$i \neq j$）, 对应根为 $-L_i - L_j$.

综上, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 的**根系** R 为:

$$R = \{\pm 2L_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm L_i \pm L_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \tag{8}$$

这是 $\mathbf{C}_n$ 型根系（例如, 当 $n = 2$ 时, 根系为 $\{\pm 2L_1, \pm 2L_2, \pm L_1 \pm L_2\}$）.

1.1.3 Weyl 群与权格

$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 的 Weyl 群 $\mathcal{W}$ 是由根超平面反射生成的群. 对应于根 $\alpha = L_i - L_j$ 的反射 w_α 作用在 $\mathfrak{h}^*$ 上是交换 L_i 和 L_j. 对应于根 $\alpha = L_i + L_j$ 的反射 w_α 是交换 L_i 和 $-L_j$. 对应于根 $\alpha = 2L_i$ 的反射 w_α 是将 L_i 变为 $-L_i$. 这些反射共同生成了所谓的超八面体群 $\mathbf{B}_n$. 这个群可以看作是所有对基 $\{L_1, \ldots, L_n\}$ 的置换和任意改变其符号的组合, 即群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$, 其阶为 $2^n n!$.

接下来我们确定权格 Λ_W. 权格定义为 $\mathfrak{h}^*$ 中在所有余根 $H_\alpha = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ 上取整数值的线性泛函构成的格.

- 对于根 $\alpha = L_i - L_j$, $H_\alpha = H_i - H_j$.
- 对于根 $\alpha = L_i + L_j$, $H_\alpha = H_i + H_j$.
- 对于根 $\alpha = 2L_i$, $H_\alpha = H_i$.

一个权 $\lambda = \sum c_k L_k$ 属于权格的条件是 $\langle \lambda, H_\alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ 对所有根 α 成立.

- $\langle \sum c_k L_k, H_i - H_j \rangle = c_i - c_j \in \mathbb{Z}$

- $\langle \sum c_k L_k, H_i + H_j \rangle = c_i + c_j \in \mathbb{Z}$
- $\langle \sum c_k L_k, H_i \rangle = c_i \in \mathbb{Z}$

最后一个条件 $c_i \in \mathbb{Z}$ 已经蕴含了前两个条件. 因此, 权格就是 $\{L_i\}$ 的整系数线性组合构成的格:

$$\Lambda_W = \mathbb{Z}\{L_1, \ldots, L_n\} \tag{9}$$

根格 Λ_R 是由根生成的格. 从根的表达式可以看出, 一个向量 $\sum c_i L_i \in \Lambda_R$ 的充要条件是系数之和 $\sum c_i$ 是偶数. 因此, 根格在权格中的指数为 2.

为了确定不可约表示, 我们选择一个 Weyl 室. 一个方便的选择是:

$$\mathcal{C} = \{a_1 L_1 + \cdots + a_n L_n \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0\} \tag{10}$$

这个选择对应于单正根集合 $\Delta = \{L_1 - L_2, \ldots, L_{n-1} - L_n, 2L_n\}$. 与这些单正根对应的基本权是:

$$\omega_k = L_1 + L_2 + \cdots + L_k, \quad \text{for } k = 1, \ldots, n \tag{11}$$

任何一个最高权 λ 都可以唯一地写成这些基本权的非负整系数线性组合.

1.1.4 观察：不变双线性形式的代数后果

辛 Lie 代数的结构有一个非常深刻且优美的代数解释, 它完全源于不变斜对称型 Q 的存在.Q 本身是一个 $V \otimes V \to \mathbb{C}$ 的映射, 由于其非退化, 它诱导了一个 V 到其对偶空间 V^* 的同构, 我们记作 $\phi_Q : V \xrightarrow{\sim} V^*$, 定义为 $\phi_Q(v)(w) = Q(v, w)$.

利用这个同构, 我们可以将自同态代数 $\mathfrak{gl}(V) \cong V \otimes V^*$ 与张量积空间 $V \otimes V$ 等同起来. 一个自同态 X 对应于 $V \otimes V$ 中的一个张量 $\tilde{X}$. 现在, 我们来考察 $X \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 的定义条件 $Q(Xv, w) + Q(v, Xw) = 0$ 在这个等同下的意义. 这个条件意味着, 将 X 视为一个从 V 到 V 的映射, 再通过 ϕ_Q 映到 V^*, 即 $\phi_Q \circ X : V \to V^*$, 这个映射是对称的. 也就是说, 它对应的 $V^* \otimes V^*$ 中的张量是对称的. 通过对偶, 这意味着 X 在 $V \otimes V$ 中的对应张量 $\tilde{X}$ 是对称的.

因此, 我们得到了一个典范的、不依赖于基的 Lie 代数表示同构:

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Sym}^2 V \tag{12}$$

这里的 V 是 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 的标准 $2n$ 维表示. 这个同构关系意义非凡：它表明辛 Lie 代数的伴随表示就是其标准表示的二次对称幂. 这立即解释了我们在后续实例分析中将看到的结果, 例如对于 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$, 其伴随表示是一个 10 维的不可约表示, 恰好同构于 $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^4)$. 这一性质与正交 Lie 代数形成了鲜明对比, 我们将在第二部分看到, 正交 Lie 代数的伴随表示同构于二次反对称幂 $\bigwedge^2 V$. 这种由不变双线性型的对称性（或斜对称性）决定的结构差异, 是区分这两类 Lie 代数的根本.

表 1: $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 的结构性质

性质	**描述**
秩	n
维数	$n(2n+1)$
根系类型	$\mathbf{C}_n$
Weyl 群	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$, 阶为 $2^n n!$
基本权	$\omega_k = \sum_{i=1}^k L_i$ for $k=1,\ldots,n$
伴随表示	$\mathrm{Sym}^2 V$

1.2 例子：$\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 的表示

为了具体地理解辛 Lie 代数的表示, 我们详细研究秩最低的非平凡例子 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ (即 $\mathbf{C}_2$ 型). 其最高权 λ 可以写成 $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 = (a_1+a_2)L_1 + a_2L_2$, 其中 a_1, a_2 是非负整数. 我们用 Γ_{a_1,a_2} 表示具有此最高权的不可约表示.

- 标准表示: $V = \mathbb{C}^4$ 是 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 的标准表示. 其权是 $\pm L_1, \pm L_2$, 每个权的重数都是 1. 最高权是 $L_1 = \omega_1$, 所以 $V = \Gamma_{1,0}$. 其权图是一个正方形的顶点.
- 基本表示 $\Gamma_{0,1}$: 我们考虑标准表示的二次外幂 $\bigwedge^2 V$. 其维数为 $\binom{4}{2} = 6$. 它的权是 V 的不同权的两两之和, 即 $\pm L_1 \pm L_2$ (各出现一次) 和 0 (出现两次, 来自 $L_1 - L_1$ 和 $L_2 - L_2$). 权图是一个八边形的顶点加上中心一个重数为 2 的点.

  这个表示是可约的. 因为 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 的作用保持双线性型 Q 不变, 而 Q 可以被看作是 $\bigwedge^2 V^*$ 中的一个元素. 通过对偶, Q 对应于 $\bigwedge^2 V$ 中一个一维的不变子空间, 也就是平凡表示 $\mathbb{C}$. 因此, $\bigwedge^2 V$ 分解为一个五维表示 W 和一个一维平凡表示 $\mathbb{C}$ 的直和:

  $$\bigwedge^2 V = W \oplus \mathbb{C} \tag{13}$$

  W 的权是 $\pm L_1 \pm L_2$ 和 0 (重数为 1). 其最高权是 $L_1 + L_2 = \omega_2$, 因此 $W = \Gamma_{0,1}$. 这个五维表示是 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 的另一个基本表示.
- 张量积分解: 利用权图分析, 我们可以分解一些重要的张量积.

1. $\mathrm{Sym}^2V=\Gamma_{2,0}$: Sym^2V 的维数是 $\binom{4+2-1}{2}=10$. 其权是 V 的权的两两之和（允许重复），即 $\pm 2L_1,\pm 2L_2,\pm L_1\pm L_2$ (各一次) 和 0 (两次). 这恰好是 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 的根图, 加上中心重数为 2 的零权. 这正是我们从上一节预言的伴随表示 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})\cong \mathrm{Sym}^2V$. 它的最高权是 $2L_1=2\omega_1$, 因此 $\mathrm{Sym}^2V=\Gamma_{2,0}$ 是不可约的.

2. $V\otimes W=\Gamma_{1,0}\otimes\Gamma_{0,1}$: 这个张量积的维数是 $4\times 5=20$. 其权是 V 的权与 W 的权之和. 最高权是 $L_1+(L_1+L_2)=2L_1+L_2=\omega_1+\omega_2$. 因此, 它包含不可约表示 $\Gamma_{1,1}$.$\Gamma_{1,1}$ 的维数可以通过 Weyl 维数公式计算得到是 16. 剩下的 4 维表示的权恰好是 $\pm L_1,\pm L_2$, 这正是标准表示 V. 因此我们有分解:

$$V\otimes W=\Gamma_{1,1}\oplus V \tag{14}$$

3. $\mathrm{Sym}^2W=\Gamma_{0,2}\oplus\mathbb{C}$: Sym^2W 的维数是 $\binom{5+2-1}{2}=15$. 其最高权是 $2(L_1+L_2)=2\omega_2$, 因此它包含 $\Gamma_{0,2}$.$\Gamma_{0,2}$ 的维数是 14. 剩下的 1 维表示是什么? 我们可以构造一个从 Sym^2W 到平凡表示 $\mathbb{C}$ 的 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$-模同态.$W$ 是 $\bigwedge^2 V$ 的一个子商空间, 在 $\mathrm{Sym}^2(\bigwedge^2 V)$ 中, 我们可以通过楔积定义一个映射到 $\bigwedge^4 V\cong\mathbb{C}$ 的映射. 这个映射在 Sym^2W 上的限制非零, 因此给出了一个到 $\mathbb{C}$ 的满射. 故我们有分解:

$$\mathrm{Sym}^2W=\Gamma_{0,2}\oplus\mathbb{C} \tag{15}$$

1.3 一般辛 Lie 代数的表示与 Weyl 构造

上述实例中的构造方法可以推广到一般的 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$.

1.3.1 基本表示的构造

对于任意 $k\in\{1,\dots,n\}$, 我们可以定义一个典范的收缩映射 $\Phi_k:\bigwedge^k V\to\bigwedge^{k-2}V$:

$$\Phi_k(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)=\sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j-1}Q(v_i,v_j)\cdot\left(v_1\wedge\cdots\wedge\widehat{v_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{v_j}\wedge\cdots\wedge v_k\right) \tag{16}$$

这是一个 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$-模同态. 可以证明, 这个映射是满射. 其核记为 $V_{\langle k\rangle}$.

基本表示的构造

对于 $k=1,\dots,n$, 空间 $V_{\langle k\rangle}=\ker(\Phi_k:\bigwedge^k V\to\bigwedge^{k-2}V)$ 是具有最高权 $\omega_k=L_1+\cdots+L_k$ 的不可约 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$-模:

$$X\cdot(v_1\wedge\cdots\wedge v_k)=\sum_{i=1}^{k}v_1\wedge\cdots\wedge(Xv_i)\wedge\cdots\wedge v_k \tag{17}$$

这个定理为我们提供了所有基本表示的具体构造. 由于任何最高权都是基本权的非负整系数线性组合, 理论上所有的不可约表示都可以从这些基本表示的张量积中通过取最高权分量得到.

1.3.2 Weyl 构造

一个更系统和强大的方法是使用 Weyl 构造, 它直接从标准表示 V 出发构造任意给定的不可约表示 Γ_λ. 对于一个由 Young 图 λ 索引的表示, 我们首先应用 Schur 函子 $\mathbb{S}_\lambda$ 到标准表示 V 上, 得到空间 $\mathbb{S}_\lambda(V)$. 对于 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, 这个空间本身就是不可约的. 但对于 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$, $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 通常是可约的.

这里的关键在于, 不变形式 Q 提供了分解这个空间的系统方法. 我们可以定义从 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 到其他形如 $\mathbb{S}_\mu(V)$ 的空间的各种收缩映射.$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 的不可约表示 Γ_λ 正是 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 中被所有可能的收缩映射映为零的元素的子空间, 即”本原”元素的空间.

不可约表示为一切收缩映射之交

对应于 Young 图 λ 的不可约 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$-模 Γ_λ 是空间 $\mathbb{S}_\lambda(V)$ 中所有收缩映射的核的交.

这个构造性定理不仅证明了对每一个支配权 λ, 都存在一个唯一的不可约表示 Γ_λ, 而且给出了一个（尽管在实践中可能很复杂）具体的实现方式.

1.3.3 观察：不变形式作为普适构造工具

Weyl 构造的这一变体揭示了一个普适原理. 在 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的表示中理论, 构建单位是标准表示 V, 工具是张量积和对称群的作用（即 Schur 函子）. 当我们考虑 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 时, 我们获得了一个新的工具: 不变的斜对称型 Q.

这个 $Q\in\bigwedge^2 V^*$ 及其对偶 $Q\in\bigwedge^2 V$ 允许我们定义典范的、保持 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$ 作用的线性映射——收缩映射. 这些映射连接了不同的张量表示空间. 由 Schur 函子产生的、通常可约的空间 $\mathbb{S}_\lambda(V)$, 可

以被这些收缩映射进行” 探测”. 这个原理也同样适用于正交 Lie 代数, 只是所用的不变形式是对称的. 这为半单 Lie 代数表示理论的构造提供了一个统一的视角：表示的复杂性源于基本表示的张量组合, 而其不可约性则源于对代数内蕴的不变结构的正交性.

属性	描述
Lie 代数	$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$
根系类型	$\mathbf{C}_n$
秩	n
维数	$2n^2 + n$
正根 Φ^+	$\{L_i \pm L_j\}_{1 \le i < j \le n} \cup \{2L_i\}_{1 \le i \le n}$
基本权 ω_k	$\omega_k = L_1 + \cdots + L_k \ (k = 1, \ldots, n)$
标准表示 V	Γ_{ω_1}, 维数为 $2n$, 权为 $\{\pm L_i\}$
伴随表示	$\Gamma_{2\omega_1} = \Gamma_{2L_1}$, 同构于 $\mathrm{Sym}^2 V$
基本表示构造	$\Gamma_{\omega_k} = \ker(\bigwedge^k V \to \bigwedge^{k-2} V)$
特殊之处	表示理论完全由标准表示 V 的张量代数生成, 无需引入额外结构.

2 正交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ 的表示

现在我们转向 **B** 型和 **D** 型典型 Lie 代数, 即正交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(m, C)$. 我们将特别关注奇数维和偶数维情形的结构差异, 并揭示旋表示出现的必然性.

2.1 $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ 的结构

2.1.1 定义与矩阵实现

正交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ 定义为在一个 m 维复向量空间 V 上保持一个非退化对称双线性型 $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ 不变的自同态 $X \in \mathfrak{gl}(V)$ 的集合. 其定义条件为:

$$Q(Xv, w) + Q(v, Xw) = 0 \tag{18}$$

为了方便分析, 我们需要选择合适的基使得 Cartan 子代数由对角矩阵构成. 这导致我们对奇数维和偶数维情况采用不同的标准型 Q.

- **偶数维情形 ($m = 2n$, D 型):** 我们选择基 $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ 使得 Q 的矩阵为 $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

一个矩阵 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 属于 $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ 的条件是 $X^T M + MX = 0$, 这导出 $D = -A^T$, $B^T = -B$, $C^T = -C$. 即 B 和 C 必须是斜对称矩阵.

- **奇数维情形 ($m = 2n+1$, B 型):** 我们选择基 $\{e_1, \ldots, e_{2n+1}\}$ 使得 Q 的矩阵为 $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 一个分块矩阵 $X = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ G & H & J \end{pmatrix}$ 属于 $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ 的条件除了与偶数维情况相同的 $D = -A^T$, $B^T = -B$, $C^T = -C$ 之外, 还要求 $J = 0$, $E = -H^T$, $F = -G^T$.

在这两种标准基下, Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 都可以选择为对角矩阵的集合, 它由 $H_i = E_{i,i} - E_{n+i,n+i}$ $(1 \le i \le n)$ 张成. 对偶基仍然是 $\{L_i\}$.

2.1.2 根系与 Weyl 群

通过与辛代数类似的计算, 我们可以得到正交代数的根系.

- $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ (**B 型**): 根系为 $R = \{\pm L_i \pm L_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm L_i\}$. 这是一个 $\mathbf{B}_n$ 型根系. 其 Weyl 群与 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 的相同, 是超八面体群 $\mathbf{B}_n$.
- $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ (**D 型**): 根系为 $R = \{\pm L_i \pm L_j \mid i \neq j\}$. 这是一个 $\mathbf{D}_n$ 型根系. 其 Weyl 群是 $\mathbf{B}_n$ 的一个指数为 2 的子群, 由置换和偶数次变号组成.

与 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ 的根系 $\{\pm L_i \pm L_j, \pm 2L_i\}$ 相比, $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ 的根系是将长根 $\pm 2L_i$ 替换为短根 $\pm L_i$, 而 $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ 则是直接去掉了这些根.

2.1.3 权格与基本权

对于正交代数, 情况变得更加有趣. 通过计算余根 H_α, 我们发现一个权 $\lambda = \sum c_i L_i$ 属于权格 Λ_W 的条件是所有 $c_i - c_j$ 是整数, 且 $c_i + c_j$ 也是整数. 这蕴含着所有 c_i 要么同时是整数, 要么同时是半整数. 因此, 权格可以描述为:

$$\Lambda_W = \mathbb{Z}\{L_1, \ldots, L_n\} \cup \left(\frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_n) + \mathbb{Z}\{L_1, \ldots, L_n\} \right) \tag{19}$$

这个格可以由 $\left\{L_1, \ldots, L_{n-1}, \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_n)\right\}$ 生成.

基本权如下:

- **B 型** ($m = 2n+1$): $\omega_k = L_1 + \cdots + L_k$ for $k < n$, 以及自旋权 $\omega_n = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_n)$.
- **D 型** ($m = 2n$): $\omega_k = L_1 + \cdots + L_k$ for $k < n-1$, 以及两个半自旋权 $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_{n-1} - L_n)$ 和 $\omega_n = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_{n-1} + L_n)$.

2.1.4 观察：$\mathbf{B}_n$ 与 $\mathbf{D}_n$ 的结构差异

$\mathbf{B}_n$ 和 $\mathbf{D}_n$ 根系的微小差异, 即是否存在短根 $\pm L_i$ 导致了它们表示理论的分野. 这个差异的根源在于标准表示 V 的结构. 在 $\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$ 的标准表示中, 基向量 e_{2n+1} 是一个权为 0 的权向量. 正是这个零权向量与其他根空间的相互作用, 通过 Lie 括号运算, 生成了对应于短根 $\pm L_i$ 的根空间. 例如, $[E_{i,2n+1} - E_{2n+1,n+i}, E_{n+i,2n+1} - E_{2n+1,i}]$ 就会涉及到 H_i.

而在 $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ 的标准表示中, 不存在零权向量, 短根 $\pm L_i$ 也就无从产生. 这一差异直接反映在它们的 Dynkin 图上：$\mathbf{B}_n$ 的图是线性链, 而 $\mathbf{D}_n$ 的图在末端有一个分叉. 这个分叉正是代数结构差异的直观体现. 它意味着 $\mathbf{D}_n$ 型代数末端的两个单根 $L_{n-1} - L_n$ 和 $L_{n-1} + L_n$ 之间的关系与其他相邻单根不同（它们不正交, 但夹角也不是 $120°$）. 这个分叉导致了两个不等价的基本表示, 即两个半自旋表示, 它们的最高权 ω_{n-1} 和 ω_n 在 Weyl 群的作用下并不可相互转换. 相比之下, $\mathbf{B}_n$ 型代数的 Dynkin 图是线性的, 只存在一个自旋表示, 其最高权 ω_n 在 Weyl 群作用下是稳定的. 因此, 从最基本的代数结构出发, 我们就能预见到偶数维和奇数维正交代数在”旋表示”层面上将表现出本质的不同.

表 2: $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ 的结构性质

类型	**性质**	**描述**
$\mathbf{B}_n$	代数	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$
	秩	n
	维数	$n(2n+1)$
	Weyl 群	$\mathbf{B}_n$
	基本权	$\omega_k = \sum_{i=1}^{k} L_i \ (k < n), \omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i$
$\mathbf{D}_n$	代数	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$
	秩	n
	维数	$n(2n-1)$
	Weyl 群	$\mathbf{D}_n$ (指数为 2 的 $\mathbf{B}_n$ 子群)
	基本权	$\omega_k = \sum_{i=1}^{k} L_i \ (k < n-1), \omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1} L_i - L_n), \omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i$

2.2 低维同构

Dynkin 图的分类预示了一些低维代数之间的同构, 这些同构在表示理论中极为重要.

- $\mathbf{B}_1 \cong \mathbf{A}_1$: $\mathfrak{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 几何上, $\mathbf{SO}(3,\mathbb{C})$ 保持 $\mathbb{P}^2$ 中的一条非退化二次曲线不变. 任何这样的二次曲线都同构于 $\mathbb{P}^1$, 而 $\mathbb{P}^1$ 的自同构群是 $\mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})$, 其 Lie 代数是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

- $\mathbf{D}_2 \cong \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$: $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. 几何上, $\mathbf{SO}(4,\mathbb{C})$ 保持 $\mathbb{P}^3$ 中的一个二次曲面 Q 不变. 这个二次曲面是一个双纹曲面, 即它包含两族直线, 每一族都构成一个 $\mathbb{P}^1$.Q 同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.$\mathbf{SO}(4,\mathbb{C})$ 的作用保持这两族直线, 因此诱导了到自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbf{PGL}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{PGL}(2,\mathbb{C})$ 的一个同构.

- $\mathbf{B}_2 \cong \mathbf{C}_2$: $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$. 这个同构的几何解释略微复杂.$\mathbf{SO}(5,\mathbb{C})$ 作用在 $\mathbb{P}^4$ 中的二次曲面 Q 上.Q 上的直线构成一个格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(2,5)$ 中的一个子流形, 这个子流形恰好是 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ 到 $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4) \cong \mathbb{P}^5$ 的 Plücker 嵌入像与一个超平面的交, 这个交是一个 $\mathbb{P}^3$ 中的二次曲面. 这个过程建立了 $\mathbf{SO}(5,\mathbb{C})$ 和 $\mathbf{PSp}(4,\mathbb{C})$ 之间的联系.

- $\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{A}_3$: $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$. 几何上, $\mathbf{SO}(6,\mathbb{C})$ 作用在 $\mathbb{P}^5$ 中的二次曲面 Q 上. 这个二次曲面 Q 恰好是格拉斯曼流形 $\mathbf{Gr}(2,4)$ 在 Plücker 嵌入下的像.$\mathbf{Gr}(2,4)$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的直线空间, 其自同构群是 $\mathbf{PGL}(4,\mathbb{C})$.

2.2.1 观察：同构建立表示论对应

这些低维同构为我们提供了一个强大的工具来理解看似复杂的表示. 例如, $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ 的同构意味着我们可以用 $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ 的语言来完全描述 $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ 的所有表示.

为此, 我们需要建立表示之间的精确对应.$\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ 的标准 6 维表示 $V_{\mathfrak{so}}$ 具有最高权 L_1. 在 $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ 的表示中, 哪个表示具有 6 维且其权在同构下匹配？答案是 $\bigwedge^2 V_{\mathfrak{sl}}$, 其中 $V_{\mathfrak{sl}} = \mathbb{C}^4$ 是 $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ 的标准表示, 其最高权为 $L_1 + L_2$. 通过仔细匹配 Cartan 子代数和根系, 我们可以建立一个映射, 例如 $L_1^{\mathfrak{so}} \mapsto L_1^{\mathfrak{sl}} + L_2^{\mathfrak{sl}}$.

更令人惊讶的是, $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ 的两个 8 维半自旋表示 S_+ 和 S_-, 它们的最高权是 $\frac{1}{2}(L_1 + L_2 + L_3)$ 和 $\frac{1}{2}(L_1 + L_2 - L_3)$. 在同构之下, 它们分别对应于 $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$ 的 4 维标准表示 $V_{\mathfrak{sl}}$ 和其对偶 $V_{\mathfrak{sl}}^*$. 这个发现极大地简化了对 $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ 旋表示的理解, 这展示了代数同构如何将一个理论框架中的复杂对象转化为另一个框架中的基本对象.

表 3: 低维 Lie 代数同构

正交代数	同构代数	Dynkin 图等价
$\mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbf{B}_1 \cong \mathbf{A}_1$
$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	$\mathbf{D}_2 \cong \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$
$\mathfrak{so}(5,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$	$\mathbf{B}_2 \cong \mathbf{C}_2$
$\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$	$\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{A}_3$

2.3 正交 Lie 代数的一般表示与 Weyl 构造

对于一般的 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$, 我们可以构造出那些最高权是 $\{L_i\}$ 的整系数线性组合的不可约表示, 这些通常被称为**张量表示**.

与辛代数类似, 对于 $k < m/2$, 存在一个由不变对称型 Q 诱导的收缩映射 $\Phi_k : \bigwedge^k V \to \bigwedge^{k-2} V$, 其核 $V_{\langle k \rangle}$ 是具有最高权 $\omega_k = L_1 + \cdots + L_k$ 的不可约表示.

然而, 这个构造有其局限. 它无法生成那些最高权包含 $\frac{1}{2}\sum L_i$ 分量的表示, 即**旋表示**.Weyl 构造对于正交群也有一个版本, 它同样可以用来构造所有的张量表示, 但同样无法触及旋表示. 这种系统性的" 失败" 是深刻的, 它直接指向了我们需要引入全新代数结构, Clifford 代数的必要性.

3 旋表示与旋群

本部分旨在填补上一部分留下的空白, 通过引入 Clifford 代数来系统地构造正交 Lie 代数的旋表示.

3.1 Clifford 代数

3.1.1 动机

正交 Lie 代数 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ 的权格 Λ_W 中含有诸如 $\frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_n)$ 这样的" 半整" 权. 然而, 标准表示 V 的所有权都是" 整" 的（即 $\{L_i\}$ 的整系数线性组合）. 由于张量积、外幂、对称幂等标准多重线性代数运算只会将整权映射到整权, 因此我们永远无法通过这些运算从标准表示 V 出发构造出具有半整最高权的表示. 这表明, 标准表示 V 的张量代数在代数上是不完备的, 不足以生成 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ 的所有表示. 我们需要一个更丰富的代数结构, 这个结构就是 Clifford 代数.

3.1.2 定义与性质

给定一个 m 维复向量空间 V 和一个非退化对称双线性型 Q, Clifford 代数 $C(V,Q)$ 是一个结合代数, 它由 V 生成, 并满足关系:

$$v \cdot w + w \cdot v = 2Q(v,w) \cdot 1 \tag{20}$$

对于所有 $v, w \in V$. 这里 1 是代数的单位元. 这个代数具有一个普适性质. 它的维数是 2^m.Clifford 代数有一个自然的 $\mathbb{Z}_2$-分次结构, $C(V,Q) = C^+ \oplus C^-$, 其中偶部 C^+ 是由 V 中偶数个向量的乘积

张成的子代数, 奇部 C^- 是由奇数个向量的乘积张成的子空间.

3.2 旋表示的构造

3.2.1 嵌入

构造旋表示的关键一步是在 Clifford 代数中找到正交 Lie 代数的一个副本. 我们已经知道 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C}) \cong \bigwedge^2 V$. 可以证明, 映射

$$\psi : \bigwedge^2 V \to C^+(V,Q) \quad \text{定义为} \quad v \wedge w \mapsto \frac{1}{2}(v \cdot w - w \cdot v) \tag{21}$$

是一个 Lie 代数单同态. 这个嵌入意味着,

$C(V,Q)$ 的任何一个模, 通过限制作用, 都自动成为 $\mathfrak{so}(m,\mathbb{C})$ 的一个表示. 我们的任务就是为 $C(V,Q)$ 寻找合适的不可约模.

3.2.2 偶数维情形 ($m = 2n$)

在这种情况下, 我们可以将 V 分解为两个 n 维最大迷向子空间的直和, $V = W \oplus W'$ (即 Q 在 W 和 W' 上的限制为零). 这是一个关键的分解, 它允许我们证明一个深刻的代数同构:

$$C(V,Q) \cong \mathrm{End}(\bigwedge^\bullet W) \tag{22}$$

其中 $\bigwedge^\bullet W = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k W$ 是 W 的外代数. 这个 2^n 维的空间 $\bigwedge^\bullet W$ 被称为**旋量空间**, 记为 S.

根据嵌入 $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) \hookrightarrow C^+ \subset C(V,Q) \cong \mathrm{End}(S)$, 旋量空间 S 成为了 $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ 的一个表示. 由于 $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ 的元素位于偶部 C^+ 中, 它们的作用保持 S 的 $\mathbb{Z}_2$-分次, 即将偶数次外幂和奇数次外幂分别映到自身. 因此, S 分解为两个 2^{n-1} 维的子表示:

$$S_+ = \bigwedge^{\text{even}} W \quad \text{和} \quad S_- = \bigwedge^{\text{odd}} W \tag{23}$$

这两个表示被称为**半自旋表示**. 通过详细的计算, 可以证明它们是不可约的, 并且它们的最高权恰好是之前确定的两个半整基本权 $\omega_n = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_n)$ 和 $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_{n-1} - L_n)$.

3.2.3 奇数维情形 ($m = 2n+1$)

奇数维的构造类似. 我们将 V 分解为 $V = W \oplus W' \oplus \mathbb{C}u$, 其中 W, W' 是 n 维最大迷向子空间, 而 u 是一个单位向量. 在这种情况下, Clifford 代数同构于一个矩阵代数:

$$C(V, Q) \cong \mathrm{End}(S) \tag{24}$$

其中 $S = \bigwedge^\bullet W$ 仍然是 2^n 维的旋量空间. 但与偶数维不同的是, $C(V, Q)$ 在这种情况下是单代数, 因此 S 是其唯一的不可约模. 当我们将这个模限制到 $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) \subset C^+$ 时, 它仍然是不可约的. 这个表示被称为**旋表示**. 其最高权可以计算出是基本权 $\omega_n = \frac{1}{2}(L_1 + \cdots + L_n)$.

3.3 旋群 $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$

旋群 $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 可以被具体地定义为偶 Clifford 代数 C^+ 的可逆元群中的一个特定子群. 其元素 g 满足 $gVg^{-1} \subset V$ 并且 $gg^* = 1$, 其中 $*$ 是一个特定的反自同构.

这个群通过伴随作用在 V 上, 诱导了一个到 $\mathbf{SO}(m, \mathbb{C})$ 的群同态. 可以证明, 这个同态是一个二重覆盖映射, 并且对于 $m \geq 3$, $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 是单连通的. 因此, $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 正是特殊正交群 $\mathbf{SO}(m, \mathbb{C})$ 的万有覆盖群.

旋表示 S (或 $S_\pm$) 是 $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 的忠实表示, 但它们在 $\mathbf{SO}(m, \mathbb{C})$ 上的作用不是良定义的（中心的元素 $-1 \in \mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 作用为 $-I$, 但它被映到 $\mathbf{SO}(m, \mathbb{C})$ 的单位元）.

3.3.1 观察：代数与拓扑

旋表示的出现诠释了 Lie 代数表示理论与相关 Lie 群拓扑性质之间的深刻联系. 我们在代数层面遇到的问题——标准表示的张量代数无法生成所有不可约表示——其根源在于拓扑层面: $\mathbf{SO}(m, \mathbb{C})$ 群不是单连通的. 一个非单连通的群可以拥有其 Lie 代数的一些表示所无法" 提升" 为群表示的情况.

万有覆盖群 $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 修正了这种拓扑上的" 缺陷". 而 Clifford 代数, 则恰好提供了构造这个万有覆盖群的表示所需要的代数框架. 旋表示正是 $\mathbf{Spin}(m, \mathbb{C})$ 的基本表示, 它们在 Lie 代数层面表现为具有" 半整" 权的表示. 因此, Clifford 代数的引入并非一个偶然的技巧, 而是解决由 Lie 群拓扑性质引发的代数表示不完备性问题的必然要求. 这一现象雄辩地证明了在 Lie 理论中, 代数与拓扑是同一个数学对象的两个密不可分的侧面.

3.4 特例：$\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ 的三旋性

$\mathbf{D}_4$ 型 Lie 代数 $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ 展现了一个独一无二的现象, 称为**三旋性**. 其根源在于 $\mathbf{D}_4$ Dynkin 图的高度对称性——它有一个三阶的旋转对称. 这个图的对称性对应于 $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ 的一个三阶外自同构. 这个自同构的作用非常奇特：它置换了 $\mathfrak{so}(8,\mathbb{C})$ 的三个 8 维的不可约表示：标准向量表示 V、半自旋表示 S_+、半自旋表示 S_-.

这三个表示在其他所有正交代数中维数都不同, 唯独在 8 维时维数偶然相等, 从而允许了这种置换对称性的存在. 三旋性在代数上可以被描述为在直和空间 $V \oplus S_+ \oplus S_-$ 上定义一个可交换但非结合的积, 这个积被一个三阶自同构所保持. 这个现象在数学和物理的许多领域都有着深刻的应用.

属性	**描述**
Lie 代数	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$
根系类型	$\mathbf{B}_n$
秩	n
维数	$2n^2+n$
正根 Φ^+	$\{L_i \pm L_j\}_{1\le i<j\le n} \cup \{L_i\}_{1\le i\le n}$
基本权 ω_k	$\omega_k = L_1+\cdots+L_k$ $(k<n)$; $\omega_n = \frac{1}{2}(L_1+\cdots+L_n)$
标准表示 V	Γ_{ω_1}, 维数为 $2n+1$, 权为 $\{\pm L_i, 0\}$
伴随表示	$\Gamma_{\omega_2} = \Gamma_{L_1+L_2}$, 同构于 $\bigwedge^2 V$
基本表示构造	Γ_{ω_k} $(k<n)$ 可由 $\bigwedge^k V$ 构造；Γ_{ω_n} 无法由 V 的张量构造.
特殊表示	旋量表示 Γ_{ω_n}, 维数为 2^n.

属性	**描述**
Lie 代数	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$
根系类型	$\mathbf{D}_n$
秩	n
维数	$2n^2-n$
正根 Φ^+	$\{L_i \pm L_j\}_{1\le i<j\le n}$
基本权 ω_k	$\omega_k = L_1+\cdots+L_k$ $(k\le n-2)$; $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(L_1+\cdots-L_n)$; $\omega_n = \frac{1}{2}(L_1+\cdots+L_n)$
标准表示 V	Γ_{ω_1}, 维数为 $2n$, 权为 $\{\pm L_i\}$
伴随表示	$\Gamma_{\omega_2} = \Gamma_{L_1+L_2}$, 同构于 $\bigwedge^2 V$
基本表示构造	Γ_{ω_k} $(k\le n-2)$ 可由 $\bigwedge^k V$ 构造；$\Gamma_{\omega_{n-1}}, \Gamma_{\omega_n}$ 无法由 V 的张量构造.
特殊表示	两个半旋量表示 $\Gamma_{\omega_{n-1}}$ 和 Γ_{ω_n}, 维数均为 2^{n-1}. 对于 $\mathbf{D}_4(\mathfrak{so}(8))$, 存在三旋同构现象.