有限域上二阶矩阵群表示

Aug 2025

1 引言

有限域上的二阶矩阵群 $\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的表示是有限群表示论中的一个经典具体例子。在表示论的学习中，必须要有很多的计算实例来作为积累，尤其是对于一个具体的群来说，如何找出其所有表示。但大多数课程中提出的例子如循环群的表示，或交错群 A_3 的表示都相对简单，处理起来有较多的特殊性导致对基本概念的要求较低。而 $G=\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的表示恰好弥补了这一问题，成为一个适合初学者且不平凡的例子。

我们将使用两种方式构建表示：

- 抛物诱导：通过 G 的一个子群：Borel 子群 B 上的一维表示来诱导出 G 的表示。
- Weil 表示：利用了 $\mathbb{F}_q$ 的二次扩张的算术性质，得到了部分抛物诱导构造的表示，并且补充了由抛物诱导难以发现的新的表示。

2 共轭类与 Borel 子群

熟知的有限群表示论断言：一个有限群的不可约复表示的同构类与其共轭类一一对应。因此我们首先考虑群 G 的一切共轭类。

2.1 通过线性代数进行分类共轭类

我们可以借助 Jordan 标准型理论对 $G=\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 进行分类，这是因为我们可以不妨假定在代数闭包的视角下考虑：两个 $\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 中的矩阵共轭，当且仅当它们在代数闭包 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上的 Jordan 标准型一致。

由于矩阵群的阶数仅限于二阶，那么其特征值要么落在基域 $\mathbb{F}_q$，要么落在其二次扩张 $\mathbb{F}_{q^2}$。那么我们将其分为四种类型：注意到群 G 的阶为 $(q^2-1)(q^2-q)$。

1. 中心元（标量矩阵）：形如 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$，其中 $x\in\mathbb{F}_q^\times$，它们构成群的中心 $Z(G)$，共 $q-1$ 个类，每个类中 1 个元素。

2. 正则半单元（可裂）：形如 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$，其中 $x, y \in \mathbb{F}_q^\times$，且 $x \neq y$，共 $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ 个类，每个类 $q(q+1)$ 个元素。
3. 正则半单元（不可裂或椭圆）：形如 $\begin{pmatrix} x & y \\ \tau y & x \end{pmatrix}$，其中 $x^2 - \tau y^2 \neq 0, y \in \mathbb{F}_q^\times$，这类矩阵在 $\mathbb{F}_q$ 上没有特征值，而是 $\mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ 中的一对 Galois 共轭元，共 $\frac{q(q-1)}{2}$ 个类，每个类 $q(q-1)$ 个元素。
4. 正则幺幂元：形如 $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$，其中 $x \in \mathbb{F}_q^\times$，共 $(q-1)$ 个类，每个类 $q^2 - 1$ 个元素。

2.2 Borel 子群

我们将选取一个特殊子群来构建诱导表示，在一般的表示论中，这种子群的选取经常是基于其能够保持某些量的稳定。

- Borel 子群 B：

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \right\} \tag{1}$$

  即上三角矩阵群。几何上，它是 G 中固定了一条直线（如向量 $(1, 0)$ 张成的直线）的元素集合。

- 幺幂根（N）：

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \right\} \tag{2}$$

  它是 B 的正规子群。

- 可裂环面 T_s：

$$T_s = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G \right\} \tag{3}$$

  即对角矩阵构成的子群，其同构于 $(\mathbb{F}_q^\times)^2$，几何上它同时稳定了两条不同的直线。

- 不可裂环面 T_a:

$$T_a = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \tau b & a \end{pmatrix} \in G \right\} \tag{4}$$

其同构于 $\mathbb{F}_{q^2}^{\times}$。它是 G 中保持某个 $\mathbb{F}_q$ 上的无解二次型的矩阵集合，在 $\mathbb{F}_q^2$ 中不固定任何直线。

2.3 Bruhat 分解

群 G 的结构可由 Borel 子群 B 指定:

Bruhat 分解
G 可以被分解为:

$$G = B \sqcup BwB \tag{5}$$

其中 $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是 Weyl 群的一个代表元。

首先证明其包含性，任取 G 中一个元素 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，若 $c = 0$，那么 $g = \in B$。

否则若 $c \neq 0$，我们有:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{bc-ad}{c} & -a \\ 0 & -c \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in BwB \tag{6}$$

于是 $G \subseteq B \sqcup BwB$。

然后证明其不交，若存在 $g \in B$ 且 $g = b_1 w b_2 \in BwB$，则

$$b_1^{-1}(b_1 w b_2) = w b_2 \in B \tag{7}$$

若 $b_2=\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & r \end{pmatrix}$，则 $wb_2=\begin{pmatrix} 0 & r \\ -p & -q \end{pmatrix}$，那么上三角条件和可逆条件矛盾。我们完成了证明。

3 抛物诱导与主序列表示

从 B 的一维表示开始，其中的元素形如 $\begin{pmatrix} x_1 & y \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$。我们可以定义一个由 $\mathbb{F}_q^\times$ 的两个特征 χ_1,χ_2 定义的 B 的特征 χ:

$$\chi\begin{pmatrix} x_1 & y \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}=\chi_1(x_1)\chi_2(x_2) \tag{8}$$

继而我们诱导表示 $I(\chi_1,\chi_2)=\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$:

$$I(\chi_1,\chi_2)=\{f:G\to\mathbb{C}:f(bg)=\chi(b)f(g)\text{ for all }b\in B,g\in G\} \tag{9}$$

群 G 通过右平移作用于这个函数空间：$(R(g')f)(g)=f(gg')$。这个诱导表示的维数是 $q+1$。

那么诱导表示 $I(\chi_1,\chi_2)$ 何时是不可约的?我们下面先计算一个空间维数:$\dim\mathrm{Hom}_G(I(\chi_1,\chi_2),I(\mu_1,\mu_2))$。

由 Frobenius 互反律，这个维数就是限制表示 $\dim\mathrm{Hom}_B(\chi,I(\mu)|_B)$。为分解限制表示 $I(\mu)|_B$，我们应用 Mackey 定理。该定理表明，限制表示的分解由 $B-B$ 双陪集决定。根据 Bruhat 分解，G 只有两个 $B-B$ 双陪集，其代表元可选为 1 和 $w=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。由 Mackey 定理，我们有

$$I(\mu)|_B\cong\mathrm{Ind}_{B\cap 1B1^{-1}}^B\left(\mu^1\right)\oplus\mathrm{Ind}_{B\cap wBw^{-1}}^B\left(\mu^w\right) \tag{10}$$

- 对于代表元 $1,B\cap 1B1^{-1}=B$，诱导表示 $\mathrm{Ind}_B^B(\mu)$ 就是一维表示 μ 本身。
- 对于代表元 $w,B\cap wBw^{-1}$ 是对角矩阵子群，即 T_s。特征 μ^w 是 T_s 上的特征，定义为 $\mu^w(t)=\mu\left(wtw^{-1}\right)$。计算可知，如果 $\mu=(\mu_1,\mu_2)$，则 $\mu^w=(\mu_2,\mu_1)$。因此，我们得到分解:

$$I(\mu)|_B\cong\mu\oplus\mathrm{Ind}_{T_s}^B\left(\mu^w\right) \tag{11}$$

现在，$\dim \operatorname{Hom}_B\left(\chi, I(\mu)|_B\right)$ 的计算变为：

$$\dim \operatorname{Hom}_B(\chi, \mu) + \dim \operatorname{Hom}_B\left(\chi, \operatorname{Ind}_{T_s}^B\left(\mu^w\right)\right) \tag{12}$$

- 第一项 $\dim \operatorname{Hom}_B(\chi, \mu)$，当且仅当 $\chi = \mu$ 时为 1，否则为 0。
- 第二项，再次使用 Frobenius 互反律，等于 $\dim \operatorname{Hom}_{T_s}\left(\chi|_{T_s}, \mu^w\right)$。这当且仅当 $\chi|_{T_s} = \mu^w$ 时为 1，即 $(\chi_1, \chi_2) = (\mu_2, \mu_1)$，否则为 0。

综上所述，我们得到最终的维数公式：

$$\dim \operatorname{Hom}_G\left(I\left(\chi_1, \chi_2\right), I\left(\mu_1, \mu_2\right)\right) = \delta_{\chi,\mu} + \delta_{\chi,\mu^w} \tag{13}$$

其中 δ 是 Kronecker delta 函数。

由 Schur 引理，$\dim \operatorname{Hom}_G(I(\chi), I(\chi)) = \delta_{\chi,\chi} + \delta_{\chi,\chi^w} = 1 + \delta_{\chi,\chi^w}$，上述分析直接导出了关于抛物诱导表示的完整分类：

1. 不可约主序列表示：当 $\chi_1 \neq \chi_2$ 时，$\chi \neq \chi^w$。此时，$\dim \operatorname{Hom}_G(I(\chi), I(\chi)) = 1$，表明 $I\left(\chi_1, \chi_2\right)$ 是不可约的。这些表示构成了 G 的**主序列表示**。它们的维数均为 $q+1$。
2. 可约情形：当 $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ 时 $\chi = \chi^w$。此时，$\dim \operatorname{Hom}_G(I(\chi), I(\chi)) = 2$，表明 $I(\chi, \chi)$ 是可约的，且分解为两个不等价的不可约表示的直和。
3. 特殊表示与 Steinberg 表示：在可约情形 $I(\chi, \chi)$ 中，总可以找到一个一维子表示，由函数 $g \mapsto \chi(\det g)$ 张成。商表示是一个维数为 q 的不可约表示，记为 St_χ，称为**特殊表示**。当 χ 是平凡特征时，得到的 St_1 被称为 **Steinberg 表示**。

4 Weil 表示

通过抛物诱导我们得到了大量表示，但计数后发现还有一些表示我们没有发现，尤其是一类称作"尖点表示"的重要表示。为此，我们引入 Weil 表示。这种构造不仅能生成新的表示，还能以一种统一的框架重新诠释我们已经得到的主序列表示。Weil 表示的构造比较复杂，但一切都是自然的，我们一步一步来。

首先固定一个 $\mathbb{F}_q$ 的非平凡加法特征：$\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$。考虑一个 $\mathbb{F}_q$ 上的二维代数 E，那么其只有两种可能：

- 可裂情形：$E = \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$，这是一个环但非域。其上的共轭映射为 $\overline{(x,y)} = (y,x)$，迹映射为 $\mathrm{Tr}(x,y) = x+y$，范数映射为 $\mathrm{N}(x,y) = xy$。
- 不可裂情形：$E = \mathbb{F}_{q^2}$ 这是一个域，并是 $\mathbb{F}_q$ 的二次扩张。其上的共轭，迹和范数映射就是通常的由 Frobenius 自同构给出的 Galois 形式。

接下来定义在 E 上的一切复值函数集合 $\mathcal{S}(E)$，一个函数 $f \in \mathcal{S}(E)$ 就是一个映射 $f : E \to \mathbb{C}$。对于函数，定义其 Fourier 变换

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{|E|}} \sum_{x \in E} f(x)\psi(\mathrm{Tr}(x\overline{y})) \tag{14}$$

归一化因子 $\frac{1}{\sqrt{|E|}}$ 经常被省略，容易验证的一点是 $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$。

考虑群 $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ 作用在函数空间 $\mathcal{S}(E)$ 的表示 ω，称为 Weil 表示。$\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ 的标准生成元是：

- $t(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$，作用于 $(\omega(t(a))f)(x) = f(a^{-1}x)$
- $n(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，作用于 $(\omega(n(b))f)(x) = \psi(b \cdot \mathrm{N}(x))f(x)$
- $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，作用于 $(\omega(w)f)(x) = \gamma \cdot \hat{f}(x)$，其中 γ 是特定的复数，称为 Weil 常数。

最后我们将表示从 $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ 拓展到 $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ 上。由于 $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ 中的任何矩阵 g 都可分解为一个中心元和一个 $\mathbf{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ 中的矩阵的乘积, 那么只要处理标量部分, 我们使用乘法特征 $\chi : E^\times \to \mathbb{C}^\times$ 实现这一点。

Weil 表示作用 ω 于整个空间 $\mathcal{S}(E)$，这个表示是可约的（考虑对 $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ 的中心的作用）。

对于每一个乘法特征 χ，我们定义一个子空间 $\mathcal{S}(E)_\chi \subseteq \mathcal{S}(E)$，由所有满足：

$$f(u\cdot x)=\chi(u)f(x) \text{ for all } u\in E^{\times},\mathrm{N}(u)=1 \tag{15}$$

的函数 f 组成。可以计算其维数:

$$\dim \mathcal{S}(E)_{\chi}=\begin{cases} q+1 & E \text{ 分裂} \\ q-1 & E \text{ 不分裂} \end{cases} \tag{16}$$

下面定义一个新的表示 ω_χ，它是一个 $\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的表示，作用在子空间 $\mathcal{S}(E)_\chi$ 上，对任意 $g\in\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 和 $f\in\mathcal{S}(E)_\chi$，定义 $(\omega_\chi(g)f)(x)$ 如下:

将 g 分解为 $z(d)\cdot g'$，其中 $d=\det(g), z(d)=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, g'\in\mathbf{SL}(2,\mathbb{F}_q)$。则作用为

$$(\omega_\chi(g)f)(x)=\chi(d)\cdot(\omega(g')f)(x) \tag{17}$$

我们构造了 Weil 表示，Weil 表示的强大之处首先体现在它能够再现已知的结果，从而证明其理论的自洽性与包容性。当选择可裂代数 $E=\mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q$ 时，得到的 Weil 表示就是之前发现过的主序列表示。

主序列表示重现
设 $E=\mathbb{F}_q\oplus\mathbb{F}_q, \chi=(\chi_1,\chi_2)$ 是 $E^\times\cong\mathbb{F}_q^\times\times\mathbb{F}_q^\times$ 的一个特征，且 $\chi_1,\neq\chi_2$，那么 Weil 表示 ω_χ 与主序列表示 $I(\chi_2,\chi_1)$ 同构。

这个同构映射是 $\phi\mapsto\omega_{\chi_1,\chi_2}(g)\phi(1,0)$，验证 $\omega(g)\phi(1,0)\in I(\chi_1,\chi_2)$，再计算两边的维数即可由 Schur 引理证明。

5 尖点表示

考虑 Weil 表示的不可裂情形，这提供了我们最后一种表示，尖点表示。

一个不可约表示被称为尖点表示，如果它不包含任何被幺幂子群 N 所固定的向量，即对于任何非

零线性泛函 $l: V \to \mathbb{C}$，都存在 $n \in N$ 使得 $l(\pi(n)v) \neq l(v)$ 对某个 $v \in V$ 成立，也即

$$\mathrm{Hom}_N(\pi, \mathbb{C}) = 0 \tag{18}$$

不可裂蕴含尖点表示
设 $E = \mathbb{F}_{q^2}$，并且 χ 是 $E^\times = \mathbb{F}_{q^2}\times$ 的一个特征，其在范数为 1 的元素构成子群 E^1 上的限制不平凡，那么 Weil 表示 ω_χ 是一个维数为 $q-1$ 的不可约尖点表示。

6 总结

迄今为止我们构造的四类不可约表示: 一维表示, 特殊表示, 不可约主序列表示, 由 Weil 表示构造出的不可约尖表示.

表 1: $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ 的不可约表示族

表示族	**维数**	**表示数量**	**构造方法**	**对应环面**
一维表示	1	$q-1$	由行列式 det 得到	两者皆可
Steinberg 表示 (St_χ)	q	$q-1$	抛物诱导 (可约情形)	可分裂环面 (T_s)
主序列表示 ($I(\chi_1, \chi_2)$)	$q+1$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	抛物诱导 / Weil 表示 (可裂)	可分裂环面 (T_s)
尖点表示 (ω_χ)	$q-1$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	Weil 表示 (不可裂)	不可分裂环面 (T_a)

在完成对 $\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ 表示的完整分类后，我们能发现共轭类的四种类型与表示的四种类型之间，不仅数量上完全吻合，而且似乎存在某种内在的对应关系。

这个问题的答案构成了现代表示论的核心思想之一。$\mathbf{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ 的表示分类并非偶然，它精确地反映了该群的 " 环面结构 " 的分类。群 G 拥有两种本质不同类型的极大环面子群：可裂环面 T_s 和不可裂环面 T_a。我们构造表示的过程已经揭示了这一深刻联系：

- 主序列表示和 Steinberg 表示，其维数分别为 $q+1$ 和 q，是通过对可裂环面 T_s 的特征进行诱导（或在 Weil 表示的可裂情形下）得到的。这些表示对应于那些特征值在基域 $\mathbb{F}_q$ 中的共轭类（即可裂半单和单幂类）。

- 尖点表示，其维数为 $q-1$，是通过不可裂环面 T_a 的特征在 Weil 表示的不可裂情形下得到的。这些表示对应于那些特征值落在扩张域 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中的共轭类（即不可裂半单类）。

- 一维表示则对应于中心的共轭类。

这种从“环面及其特征”到“群的表示”的对应关系，正是 Deligne-Lusztig 理论在 $\mathbf{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 这个最简单例子上的体现。该理论为一大类被称为“李型有限群”的群建立了一套系统性的表示构造方法。它表明，这些群的不可约表示可以被参数化为群中各种极大环面及其特征的对 (T,θ)。