Kotobank 重构定理

Aug 2025

1　有限群的 Kotobank 重构定理

1.1　表示范畴、遗忘函子与群代数

重构定理主要关注以下三个核心对象:

- **表示范畴** $\mathcal{R}(G)$: 这是由群 G 的所有有限维复表示构成的范畴。其对象是偶对 (π, V)，其中 V 是一个有限维复线性空间，$\pi : G \to GL(V)$ 是一个群同态。其态射是从 (π, V) 到 (σ, W) 的表示同态，即满足 $f(\pi(g)v) = \sigma(g)f(v)$ 的线性映射 $f : V \to W$。

  $\mathcal{R}(G)$ 不仅是一个 Abel 范畴，还具备张量积 $\otimes$ 和对偶 $(\cdot)^\vee$ 运算，使其成为一个刚性对称张量范畴。

- **遗忘函子** F: 这是一个从表示范畴 $\mathcal{R}(G)$ 到有限维复线性空间范畴 $\mathcal{V}$ 的函子，其作用是“遗忘”群的作用结构，只保留底层的线性空间: $F((\pi, V)) = V$。这个函子是忠实且正合的，并且它保持张量积结构，即

  $$F((\pi, V) \otimes (\sigma, W)) = V \otimes W \tag{1}$$

  在更广泛的 Kotobank 理论中，这种函子被称为纤维函子。

- **群代数** $\mathbb{C}[G]$: 这是群 G 上所有复值函数构成的线性空间。它可以看作是以群元素为基 $\{[g] \mid g \in G\}$ 的复向量空间，其中 $[g]$ 是在 $h = g$ 时取值为 1，否则为 0 的函数。

群代数 $\mathbb{C}[G]$ 实际上拥有一个远比普通代数更丰富的结构——Hopf 代数结构。这种结构并非人为附加的装饰，而是群 G 自身几何结构的直接代数对偶。

1. 代数结构

- **乘法** ∇: 由函数卷积定义: $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$。在基上表现为

  $$\nabla([g_1] \otimes [g_2]) = [g_1] * [g_2] = [g_1 g_2]$$

  。

- **单位 (Unit)** η: $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[G]$ 定义为 $\eta(1) = [e]$，其中 e 是 G 的单位元。

2. 余代数结构

- **余乘法** Δ: $\Delta : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$，在基上定义为 $\Delta([g]) = [g] \otimes [g]$。
- **余单位** ϵ: $\epsilon : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$，在基上定义为 $\epsilon([g]) = 1$ 对所有 $g \in G$ 成立，或者等价地

$$\epsilon\left(\sum a_g[g]\right) = \sum a_g$$

。

3. 对极 S

- $S : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$，在基上定义为 $S([g]) = [g^{-1}]$。

群的几何结构与群代数的 Hopf 代数结构之间存在着深刻的对偶关系:

- 群乘法 $m : G \times G \to G$ 对偶于余乘法 Δ。
- 单位元嵌入 $e \to G$ 对偶于余单位 ϵ。
- 逆元映射 $g \mapsto g^{-1}$ 对偶于对极 S。

群的公理（如结合律）在对偶化后，恰好变成了 Hopf 代数的公理（如余结合律）。因此，$\mathbb{C}[G]$ 是一个 Hopf 代数这一事实，本质上是 G 是一个群这一事实的代数转述。这一观点将重构问题重新定位：由于范畴 $\mathcal{R}(G)$ 与有限维 $\mathbb{C}[G]$-模的范畴是等价的，从 $\mathcal{R}(G)$ 重构 G 的问题，从根本上讲，是从其模范畴重构 Hopf 代数 $\mathbb{C}[G]$ 的问题。

1.2 证明

证明的核心在于考察遗忘函子 F 的对称性，即其自同构群，先给出自同构群的定义:

- $\mathrm{Aut}(F)$: 遗忘函子 F 的自然自同构群。其元素 ϕ 是一族可逆线性映射 $\{\phi_V : V \to V\}_{(\pi,V)\in\mathcal{R}(G)}$，使得对于任意表示同态 $f : V \to W$，图表 $f \circ \phi_V = \phi_W \circ f$ 可交换。
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$: $\mathrm{Aut}(F)$ 的一个子群，由所有保持张量积结构的自同构构成。即，对于任意两个表示 V, W，满足 $\phi_{V\otimes W} = \phi_V \otimes \phi_W$。这个条件至关重要，它确保了自同构不仅尊重线性结构，还尊重表示的乘法结构。

正式的证明之前我们先给出三个引理:

1.2.1 引理 1

设 $x \in \mathbb{C}[G]$。如果 $\Delta(x) = x \otimes x$，那么 $x \in G$（这里需注意：严格表述应为 x 是群代数中对应群元素的基元形式，通常群 G 嵌入到群代数 $\mathbb{C}[G]$ 中是通过元素对应到基 $[g]$，所以准确说 x 是 $[g]$ 形式，属于群代数中由群元素生成的基元，后续证明会体现）。

证明的核心思想是利用余积 Δ 的定义来约束 x 的系数。

设 x 是群代数 $\mathbb{C}[G]$ 中的一个元素，它可以写作 G 中元素的线性组合：

$$x = \sum_{g \in G} a_g [g] \tag{2}$$

其中 a_g 是复数系数。

根据群代数上的余积（comultiplication）的定义，Δ 在基底 $[g]$ 上的作用是 $\Delta([g]) = [g] \otimes [g]$。将其线性地推广到任意元素 x 上，我们得到：

$$\Delta(x) = \Delta\left(\sum_{g \in G} a_g [g]\right) = \sum_{g \in G} a_g \Delta([g]) = \sum_{g \in G} a_g ([g] \otimes [g]) \tag{3}$$

另一方面，计算 $x \otimes x$：

$$x \otimes x = \left(\sum_{g \in G} a_g [g]\right) \otimes \left(\sum_{h \in G} a_h [h]\right) = \sum_{g,h \in G} a_g a_h ([g] \otimes [h]) \tag{4}$$

题目给出的条件是 $\Delta(x) = x \otimes x$，比较上面两个表达式：

$$\sum_{g \in G} a_g ([g] \otimes [g]) = \sum_{g,h \in G} a_g a_h ([g] \otimes [h]) \tag{5}$$

由于 $\{[g] \otimes [h]\}_{g,h \in G}$ 是张量积空间 $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$ 的一组基底，等式两边对应基底的系数必须相等，因此：

- 对于基底 $[g] \otimes [g]$，有 $a_g = a_g^2$；
- 对于基底 $[g] \otimes [h]$（$g \neq h$），左边无该项，故系数为 0，即 $a_g a_h = 0$。

从条件 $a_g a_h = 0$（当 $g \neq h$ 时）可推断：在系数 $\{a_g\}_{g \in G}$ 中，最多仅有一个非零。分情况讨论：

- 若所有 $a_g = 0$，则 $x = 0$。此时 $\Delta(0) = 0$ 且 $0 \otimes 0 = 0$，满足 $\Delta(x) = x \otimes x$；
- 若 $x \neq 0$，则存在唯一的 $g_0 \in G$，使得 $a_{g_0} \neq 0$，且对所有 $g \neq g_0$，$a_g = 0$。

对非零系数 a_{g_0}，利用 $a_g = a_g^2$，代入得 $a_{g_0} = a_{g_0}^2$。因 $a_{g_0} \neq 0$，两边除以 a_{g_0} 得 $a_{g_0} = 1$。

因此，$x = 1 \cdot [g_0] = [g_0]$，即 x 是群代数中对应群元素 g_0 的基元，也即 x 对应群 G 中的元素（通过群代数基元与群元素的自然对应），证毕。

1.2.2 引理 2

设 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$，则 $\phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1) \in G$。

令 $x = \phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1)$。根据定义，$\phi_{(R,\mathbb{C}[G])}$ 是一个从 $\mathbb{C}[G]$ 到自身的线性映射，所以 x 显然是 $\mathbb{C}[G]$ 中的一个元素。

根据引理 1，要证明 $x \in G$，我们只需要证明它满足条件 $\Delta(x) = x \otimes x$ 即可。也就是证明：

$$\Delta\big(\phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1)\big) = \phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1) \otimes \phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1) \tag{6}$$

这里的 ϕ 是一个函子自同构，这意味着它是一个自然变换。$\Delta : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$ 是 G 的表示之间的态射（morphism）。根据自然变换的定义，对于任何态射 $f : V \to W$，都必须满足 $\phi_W \circ f = f \circ \phi_V$。我们将此应用到 Δ 上：

$$\Delta \circ \phi_{\mathbb{C}[G]} = \phi_{\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]} \circ \Delta \tag{7}$$

我们将上述算子等式作用在元素 $1 \in \mathbb{C}[G]$ 上：

$$\Delta\big(\phi_{\mathbb{C}[G]}(1)\big) = \phi_{\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]}\big(\Delta(1)\big) \tag{8}$$

我们知道 1 是 $\mathbb{C}[G]$ 这个代数的单位元，而余积 Δ 是一个代数同态，所以 $\Delta(1) = 1 \otimes 1$。代入上式右边，得到：

$$\Delta\big(\phi_{\mathbb{C}[G]}(1)\big) = \phi_{\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]}(1 \otimes 1) \tag{9}$$

现在，我们利用 ϕ 的另一个性质：它是一个张量函子，记作 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$。这意味着 ϕ 保持张量

积结构，即 $\phi_{V\otimes W} = \phi_V \otimes \phi_W$。应用这个性质：

$$\phi_{\mathbb{C}[G]\otimes\mathbb{C}[G]}(1\otimes 1) = \big(\phi_{\mathbb{C}[G]}\otimes\phi_{\mathbb{C}[G]}\big)(1\otimes 1) \tag{10}$$

$$= \phi_{\mathbb{C}[G]}(1)\otimes\phi_{\mathbb{C}[G]}(1) \tag{11}$$

我们得到：

$$\Delta\big(\phi_{\mathbb{C}[G]}(1)\big) = \phi_{\mathbb{C}[G]}(1)\otimes\phi_{\mathbb{C}[G]}(1) \tag{12}$$

这正是我们要证明的等式。因此，根据引理 1，我们得出结论 $x = \phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1) \in G$，证毕。

1.2.3 引理 3

设 $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$。如果 $\phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1) = \psi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1)$，那么 $\phi = \psi$。

这个证明展示了为何 ϕ 在正则表示上对单位元 1 的作用，能够完全确定整个自然变换 ϕ。

我们的目标是证明，如果两个自然变换 ϕ 和 ψ 在正则表示 $\mathbb{C}[G]$ 上对元素 1 的作用相同，那么它们在任何表示 (π, V) 上的作用都相同，即 $\phi_V = \psi_V$ 对所有 V 成立。

设 $g = \phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1)$。根据引理 2，我们知道 $g \in G$。同样，设 $g' = \psi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1)$，则 $g' \in G$。题设条件为 $g = g'$。

现在，我们来证明对于任意一个 G 的表示 (π, V) 和任意一个向量 $v \in V$，$\phi_V(v)$ 的值完全由 g 决定。

这里需要利用正则表示的一个关键性质：对于任意表示 (π, V) 中的任意向量 $v \in V$，存在一个唯一的表示之间的态射 $f_v : \mathbb{C}[G] \to V$，使得 $f_v(1) = v$。这个态射的具体形式是 $f_v(h) = \pi(h)v$ 对所有 $h \in G$ 成立。

由于 ϕ 是一个自然变换，对于态射 $f_v : \mathbb{C}[G] \to V$，下面的图必须是交换的，这意味着算子等式 $f_v \circ \phi_{\mathbb{C}[G]} = \phi_V \circ f_v$ 成立。

我们将这个算子等式作用在元素 $1 \in \mathbb{C}[G]$ 上：

$$f_v\big(\phi_{\mathbb{C}[G]}(1)\big) = \phi_V\big(f_v(1)\big) \tag{13}$$

根据定义，$g = \phi_{\mathbb{C}[G]}(1)$ 且 $v = f_v(1)$。代入上式得到：

$$f_v(g) = \phi_V(v) \tag{14}$$

现在我们计算 $f_v(g)$。根据 f_v 的定义，我们有 $f_v(g) = \pi(g)v$。

我们得到了：

$$\phi_V(v) = \pi(g)v \tag{15}$$

其中 $g = \phi_{\mathbb{C}[G]}(1)$。这个等式表明，$\phi$ 在任意表示 V 上对任意向量 v 的作用，都等同于让群元素 g 在该表示下作用于 v。

现在回到最初的问题。我们有 $\phi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1) = \psi_{(R,\mathbb{C}[G])}(1)$。令这个共同的元素为 g。

根据上面的推导，对于任意 (π, V) 和 $v \in V$，我们有 $\phi_V(v) = \pi(g)v$。同理，对于 ψ，我们也有 $\psi_V(v) = \pi(g)v$。因此，$\phi_V(v) = \psi_V(v)$ 对所有 $v \in V$ 成立，这意味着 $\phi_V = \psi_V$。

由于这对于任意表示 V 都成立，所以我们得出结论：自然变换 ϕ 和 ψ 是完全相同的，即 $\phi = \psi$，证毕。

1.3 Kotobank 定理的证明

于是我们将开始 Kotobank 定理的证明：

Kotobank 重构定理的证明旨在建立一个群同构 $T : G \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$。

对于任意群元素 $g \in G$，我们可以定义一个函子自同构 $T(g) \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$。其在表示 (π, V) 上的分量被定义为线性映射 $\pi(g) : V \to V$。不难验证，这族映射满足自然性和保持张量积的条件，因此 $T(g)$ 确实是 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的一个元素，并且映射 T 是一个群同态。

下面证明 T 是同构：

- **单射性**: 假设 $T(g)$ 是单位自同构，即对所有表示 (π, V) 都有 $\pi(g) = \mathrm{id}_V$。特别地，对于右正则表示，有 $R(g) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[G]}$。由于右正则表示是忠实的（即 $R : G \to GL(\mathbb{C}[G])$ 是单射），这必然推出 $g = e$。因此 T 是单射。
- **满射性**: 取任意 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$。根据引理 2，存在一个唯一的 $g_\phi \in G$ 使得 $\phi_{(R,\mathbb{C}[G])}([e]) = [g_\phi]$。

现在考虑 $T(g_\phi^{-1})$。它在任意表示 (π, V) 上的作用是 $\pi(g_\phi^{-1})$。因此，我们发现 ϕ 与 $T(g_\phi^{-1})$ 在所有表示上的作用都相同。这意味着 $\phi = T(g_\phi^{-1})$。这就证明了任何 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 都在 T 的像中，故 T 是满射。

至此，我们完成了 $G \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的证明。

这个看似技巧性的证明，实际上是范畴论中一个更普适原理，即 Yoneda 引理的体现。在 $\mathbb{C}[G]$-模的范畴中，遗忘函子 F 可由 $\mathbb{C}[G]$ 本身（作为正则模）所表示，即 $F(V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G], V)$。Yoneda 引理告诉我们，一个可表示函子的自同构群同构于其表示对象的自同态代数。这里的重构定理可以被看作是 Yoneda 引理在 Hopf 代数和张量结构下的一个“线性化”和“丰富化”的版本。证明中的每一步，都可以在这个更抽象的框架下找到其对应的普适概念。

2 紧群的 Kotobank 重构定理

将 Kotobank 重构定理从有限群推广到紧群，是一次从纯代数王国到分析与拓扑疆域的跨越。虽然核心哲学保持不变，但证明的工具和技术发生了根本性的变化。

2.1 从代数到拓扑

有限群的证明框架在紧群面前遇到了根本性的障碍。对于一个紧群 G（例如圆周群 $\mathbf{S}^1$ 或特殊酉群 $\mathbf{SU}(2)$），其上的连续函数空间 $C(G)$ 是无穷维的。这带来了两个主要问题：

1. **群代数的失效**: $\mathbb{C}[G]$ 的概念失去了意义。$C(G)$ 虽然是一个代数（在卷积乘法下），但它不再是有限维的，也不再具有有限群代数那种简洁的 Hopf 代数基。群 G 本身无法作为一组基嵌入到 $C(G)$ 中。
2. **拓扑的引入**: 群 G 和表示空间都带有拓扑结构，表示本身（群同态）必须是连续的。这要求我们使用的工具必须能处理连续性、极限和逼近等分析概念。

因此，必须寻找新的分析工具来替代有限群证明中的纯代数构造。这个替代工具就是 Peter-Weyl 定理。该定理是紧群上调和分析的基石，其地位堪比有限群理论中的正则表示分解。

Peter-Weyl 定理有多种表述，对于重构定理而言，最核心的是以下两点：

1. **矩阵系数的分解**: 作为 $G \times G$ 的表示，$L^2(G)$（G 上平方可积函数的 Hilbert 空间）可以分解

为所有不可约酉表示 (π, V_π) 的 Hilbert 直和：

$$L^2(G) \simeq \widehat{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}}} V_\pi \otimes V_\pi^\vee \tag{16}$$

其中 $\hat{G}$ 是 G 的所有不可约酉表示的等价类集合。

2. **函数逼近**: 所有有限维表示的矩阵系数所张成的线性空间，被称为代表函数代数，记为 $R(G)$。Peter-Weyl 定理保证，$R(G)$ 在 $C(G)$ 中（在一致范数下）和在 $L^2(G)$ 中（在 L^2 范数下）都是稠密的。

$R(G)$ 正是我们在紧群情况下寻找的、能够替代有限群代数 $\mathbb{C}[G]$ 的分析对象。对于有限群，$R(G)$ 就是 $\mathbb{C}[G]$ 本身。而对于紧群，$R(G)$ 虽然只是 $C(G)$ 的一个真子空间，但 Peter-Weyl 定理告诉我们，这个子空间已经“足够大”，它包含了重构整个群所需的全部信息。该定理的 Plancherel 公式版本，则给出了函数在不可约表示基下的“傅里叶展开”，是有限群正则表示分解的直接分析模拟。

2.2 证明

我们再次证明 $T : G \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是同构，本次将以一种分析的视角。

$\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的紧性是与有限群情况的第一个显著区别。对于紧群 G，其不可约表示可以被赋予一个 G-不变的内积，使其成为酉表示。一个自同构 $\phi \in \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 必须保持这种酉结构。具体来说，对于任意不可约酉表示 (π, V)，$\phi_V : V \to V$ 必须是一个酉算子，即 $\phi_V \in U(V)$。

因此，$\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 可以被看作是所有酉群 $U(V_\pi)$（对于 $\pi \in \hat{G}$）的直积 $\prod_{\pi \in \hat{G}} U(V_\pi)$ 的一个闭子群。由于每个 $U(V_\pi)$ 都是紧群，它们的（任意）直积在乘积拓扑下也是一个紧群。作为紧群的闭子群，$\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 本身也是一个**紧拓扑群**。

这一事实至关重要，因为它意味着我们可以将 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 视作一个新的紧群，并对其应用紧群理论的工具，例如 Haar 测度。

范畴等价

与有限群情况类似，可以证明拉回函子 $T^* : \mathcal{R}(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)) \to \mathcal{R}(G)$ 是一个范畴等价。这意味着 G 和我们潜在重构出的群 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 拥有完全相同的表示理论。这是通过构造一个从 $\mathcal{R}(G)$ 到 $\mathcal{R}(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F))$ 的“扩张函子” T_* 来实现的，该函子将 G-表示 (π, V) 提升为 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$-表示，其作用定义为 $\phi \cdot v = \phi_V(v)$。

代表函数代数的同构

接下来证明,由 T 诱导的代数同态 $T^*: R(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)) \to R(G)$ 是一个同构。这一步依赖于 Plancherel 公式，它允许我们为 $R(G)$ 中的函数 f 定义其在 $R(\mathrm{Aut}^{\otimes}(F))$ 中的对应项。

单射性

证明与有限群情况完全相同。如果 $T(g)$ 是单位元, 那么 $\pi(g) = \mathrm{id}_V$ 对所有表示 π 成立。Peter-Weyl 定理的一个直接推论是，如果 $g \neq e$，则必然存在一个表示 π 使得 $\pi(g) \neq \mathrm{id}_V$。因此 g 必须是单位元 e 。

满射性

这是最需要分析工具的一步。我们已经知道 $T : G \to \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是一个连续的群同态，其像 $T(G)$ 是 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的一个闭子群。为了证明 $T(G) = \mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$，我们采用反证法。

假设 $T(G)$ 是 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 的一个真子群。由于 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 是一个紧群，我们可以找到一个在 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 上的非零连续函数 f'，它在 $T(G)$ 的补集上有支撑，但在 $T(G)$ 上恒为零。考虑 f' 在 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 上的 Haar 积分：$\int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} f'(\phi)d\phi > 0$。

另一方面，我们可以证明，对于任何 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 上的代表函数，其在 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$ 上的积分等于其通过 T^* 拉回到 G 上的积分。由于代表函数在连续函数空间中是稠密的，这个性质可以推广到所有连续函数。因此，$\int_{\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)} f'(\phi)d\phi = \int_G (T^*f')(g)dg$。但根据 f' 的构造，T^*f' 在 G 上恒为零，所以其积分为零。

这就导出了 $0 > 0$ 的矛盾。因此，假设不成立，$T(G)$ 必须是整个 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(F)$。

3 Kotobank 范畴的形式理论

最后陈列一下 Kotobank 范畴理论的定义和基本定理，仅作为欣赏。

Kotobank 范畴理论将重构思想从具体的群表示提升到了一个纯粹的范畴论层面，其核心在于识别出何种抽象范畴“表现得像”一个群的表示范畴。

一个中性 Kotobank 范畴 $\mathcal{C}$，定义在一个域 k 上，是一个满足以下公理的范畴：

1. **k-线性 Abel 范畴**: $\mathcal{C}$ 中的态射集是 k-向量空间，且范畴具有核、余核、直和等良好结构。
2. **对称张量范畴**: $\mathcal{C}$ 上定义了一个双线性、结合且对称的张量积运算 $\otimes$，并有一个单位对象 $\mathbf{1}$。这编码了表示的张量积运算。
3. **刚性范畴**: $\mathcal{C}$ 中的每个对象 V 都存在一个对偶对象 $V^\vee$。这编码了对偶表示的存在。
4. **纤维函子**: 存在一个忠实、正合的 k-线性张量函子 $\omega : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$，其中 Vec_k 是 k 上的有限维向量空间范畴。这个函子是遗忘函子 F 的抽象推广。

Kotobank 范畴理论的基石是以下重构定理：

Kotobank 重构定理
任何一个定义在域 k 上的中性 Kotobank 范畴 $\mathcal{C}$，都典范地等价于某个仿射群概形 G 在 k 上的有限维表示范畴 $\mathrm{Rep}_k(G)$。并且，这个群概形 G 可以被重构为纤维函子 ω 的张量自同构群：

$$G \cong \mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega) \tag{17}$$

这个定理揭示了前两部分工作的本质：我们实际上是在验证有限群和紧群的表示范畴 $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ 满足了中性 Kotobank 范畴的所有公理，并最终重构出了群 G（作为仿射群概形的一个特例）。

此外，该理论还处理了更一般的情况。如果一个范畴的纤维函子只能定义在域的某个扩张 L/k 上，那么它被称为**非中性 Kotobank 范畴**。此时重构出的对象不再是一个群概形，而是一个更微妙的几何对象，称为 **Gerbe** 。这显示了该理论的惊人深度和广度。